

Bingham 流体与固壁、液面斜撞击的数值模拟

徐胜利¹, 岳朋涛¹, 刘大有², 段新平²

(1. 中国科学技术大学力学和机械工程系, 安徽 合肥 230026;

2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要: 在交错网格中用 MAC 方法求解二维不可压 N-S 方程, 对圆截面液柱与固壁、液面斜撞击问题进行了数值模拟, 得到了自由面随时间演化的图像。主要考察了: (1) 固壁和液面; (2) 牛顿、非牛顿流体; (3) 碰撞入射角; (4) Bingham 流体近似本构式中参数 q_0 、 K 对计算结果的影响。结果表明: 液柱与液面碰撞形成的自由面更复杂。碰撞初期, Bingham 流体和水的自由面相似; 但碰撞后期, Bingham 流体的自由面相对简单。

对液柱与液面碰撞自由面的影响较大。本文条件下, 当 $K > 20$ 时, K 对自由面的影响不大; 当 q_0 增大时, 自由面变得相对简单。

关键词: 非牛顿流体; 斜撞击; MAC 方法; 数值模拟

* 中图分类号: O353.4 文献标识码: A

1 引 言

生活中的许多现象, 如雨水降落、农作物的施肥和药物喷洒等, 都涉及到液滴、液柱与固壁、液面的撞击问题, 因此, 研究牛顿/非牛顿流体与固壁或液面的斜撞击是有意义的。F. H. Harlow 等^[1]对圆柱形水柱和液面正撞击过程作过数值模拟。研究碰撞问题时, 自由面的模拟十分重要, 目前有 SLIC^[2]、Level set^[3]、VOF^[4]等方法。分析表明: MAC 方法是模拟复杂自由面、特别是大变形自由面的好方法。因此, 在水动力学和爆炸力学研究中得到了广泛的应用。MAC 方法由 F. H. Harlow 和 J. E. Welch 提出^[5], 以当地流体速度运动的标记点分布来确定自由面位置。该方法具有简单直观、程序编制容易等优点, 后来推广到隐式, 并用于复杂区域自由面的模拟^[6]。由于 MAC 方法不能精确地确定自由面位置, 因此, 在自由面上也不能准确地提出应力边界条件。当用 MAC 方法模拟大剪切变形时, 若网格中标记点的数密度较小, 流体中会出现虚假的空格子, 但可通过增大标记点的数密度来抑制。

本文的研究目的是: 选择非牛顿流体——Bingham 流体作为介质, 利用数值模拟研究液柱和固壁、液面的斜撞击问题, 并与水的结果作对比。通过了解自由面随时间的演化, 探索斜撞击过程中所伴随的物理现象。主要内容包括: (1) 液柱与固壁间的斜撞击; (2) 液柱与液面间的斜撞击; (3) 近似本构式中主要参数对斜撞击的影响。

2 控制方程和边界条件

2.1 Bingham 流体本构关系

Bingham 流体存在屈服应力, 其本构式具有如下形式^[7]

$$\begin{cases} e_{ij} = 0 & a = 0 \\ ij = 2\mu_0 \left(1 + \frac{q_0}{q} \right) \cdot e_{ij} & a > 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2000-03-02; 修回日期: 2001-07-12

基金项目: 国家自然科学基金项目 (49771003)

作者简介: 徐胜利 (1965—), 男, 博士, 教授。

取 $\mu = f(q) \mu_0$, 且 $f(q) = (1 + q_0/q)$, 则 Bingham 流体有不可压牛顿流体本构式的形式。式中: τ_{ij}, e_{ij} 分别为应力、应变率; μ_0 为常数, 粘性系数 μ 依赖于当地流动参数; a_0, q_0 分别为等效应力、屈服应力和等效应变率, 其中 q_0 为与 a_0 对应的应变率, 且 $a_0 = \mu_0 q_0$ 。在二维条件下, 有

$$q = [2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2]^{1/2} \quad (2)$$

式中: u_x, u_y 和 v_x, v_y 为速度分量 u 和 v 沿 x, y 方向对应的导数。对 Bingham 流体, 本构式中 τ_{ij} 和 e_{ij} 不是单值对应。可取连续函数 $f(q)$ 逼近方程(1), 经过调试^[7], 有

$$f(q) = 1 + \frac{q_0 + Kq_0}{q_0 + Kq} \left\{ 1 - \exp \left[-K \frac{q_0 + Kq}{q_0 + Kq_0} \right] \right\} \quad (3)$$

图 1 给出了不同 K 值对应的本构式曲线。当 $K > 20$ 时, 近似本构式与 Bingham 流体已非常接近; 当 $K=0$ 时, 对应牛顿流体。

2.2 控制方程

在直角坐标系中, 二维不可压非牛顿流体的控制方程为

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + g_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + g_y \quad (6)$$

式中: ρ, p 为密度和压力; g_x, g_y 为重力加速度沿 x, y 的分量。

取 $\mu_0, a_0, p_0, L_0, g_0$ 为无量纲化参考变量。有 $u_0 = \sqrt{g_0 L_0}, t_0 = L_0 / u_0, p_0 = \rho_0 u_0^2, Re = \rho_0 u_0 L_0 / \mu_0$ 。考虑到介质不可压 ($\rho = \rho_0 = \text{常数}$), 方程(4)、(5)、(6)的无量纲形式为

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad (7)$$

$$\partial u / \partial t = -\partial p / \partial x \quad (8)$$

$$\partial v / \partial t = -\partial p / \partial y \quad (9)$$

式中:
$$= - \left\{ \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \right\} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + g_x \quad (10)$$

$$= - \left\{ \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} \right\} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} + g_y \quad (11)$$

将方程(8)、(9)分别对 x, y 求导后相加, 得无量纲压力 Poisson 方程

$$\nabla^2 p = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (12)$$

求解变量为 u, v 和 p 。其中 u, v 由方程(8)、(9)求解, p 由方程(12)确定。方程(7)作为限制条件, 体现在压力 Poisson 方程的求解上。为防止误差积累, 令 $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ 。由于数值误差, 可能存在 $\nabla \cdot \mathbf{v}^n \neq 0$ 。其中 $\mathbf{v} = (u, v)$, \mathbf{v} 为流体速度。除特别说明外, 以下各量均为无量纲量。

2.3 初始和边界条件

(1) 初始条件。如图 2 所示, 当 $t=0$ 时, Bingham 流体和水均为尺寸相同的圆柱体(简称液柱)。无量纲初速度取 5, 当 x 轴夹角为 θ 。碰撞前, 液面处于静止状态, 即 $\mathbf{v} = 0$ 。计算中, 液柱和靶液体均为同种流体。

(2) 边界条件。速度沿壁面取无滑移 ($\mathbf{v} = 0$) 或滑移条件 ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$), 本文中取无滑移条件。为节省计算量, 圆柱和壁面的距离取得较近。压力边界条件由动量方程(8)、(9)确定。出口取无穷远边界条件, 即 $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$

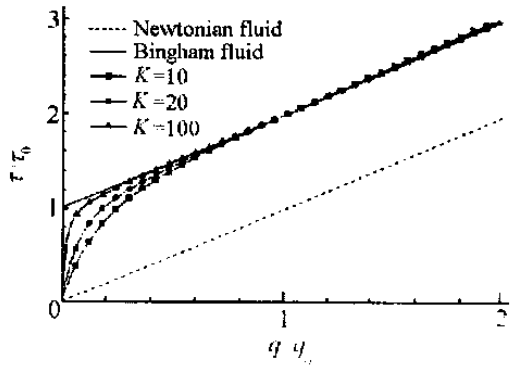


图 1 不同 K 值对应的本构式
Fig. 1 Constitutive relationships for different K

(3)自由面条件。忽略自由面的表面张力,只计空气压力。由应力连续性条件得

法向
$$\sigma_{ij}n_i n_j = -p_{atm} \tag{13}$$

切向
$$\sigma_{ij}t_i n_j = 0 \tag{14}$$

式中: $i, j = 1, 2, n = (n_1, n_2)$ 和 $t = (t_1, t_2)$ 分别为自由面的法向和切向单位向量, p_{atm} 为空气压强。

3 方程的离散

本文的计算在均匀的交错网格中进行,各流动变量的定义如图3所示。因MAC方法较成熟,具体可参考文献[5]。方程离散时,时间导数采用一阶前差,所有空间导数项取中心差分。与牛顿流体相比,非牛顿流体 μ 的计算更复杂。本文中 $\mu_{i,j}^n$ 的确定依赖于速度场,所涉及的空间导数采用中心差分。要说明的是:上述内点差分中涉及的不在定义点的速度和粘性系数采用算术平均。边界和自由面外的速度由相应边界条件和自由面条件确定。

4 结果与讨论

计算前,用水的溃坝问题验证本程序,结果与文献[5]符合得很好。以下算例中,除特别说明外,碰撞角取 60° ,对 Bingham 流体, Re 、 q_0 和 K 分别取 100、10 和 20。

4.1 液柱与固壁的斜撞击

图4给出了 Bingham 流体液柱与固壁斜撞击的自由面随时间演化的图像。虽然碰撞是非对称的,但自由面的非对称性不明显。碰撞过程中,自由面形状类似于随时间变化的“帽子”。在“帽子”左侧的壁面附近,形成翘起的、尖锐的自由面,该自由面与壁面分离,并向斜上方运动。“帽子”顶部未发生飞溅。近壁面的右侧自由面被侵蚀,出现液体飞溅。随着时间推进,“帽子”向两侧运动并变得扁平,右侧自由面的侵蚀没有继续扩展。由于存在屈服应力,当计算时间足够长时,壁面上会留下厚度均匀的薄层 Bingham 流体。

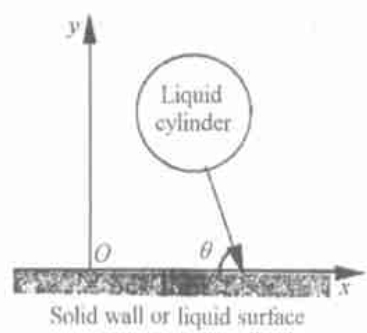


图2 计算域示意图
Fig. 2 Computation schematic

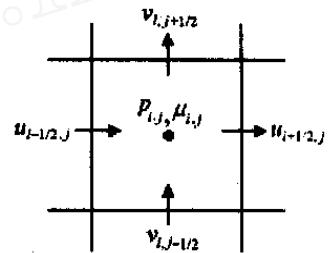


图3 网格中流动参数的定义
Fig. 3 Variables in grids

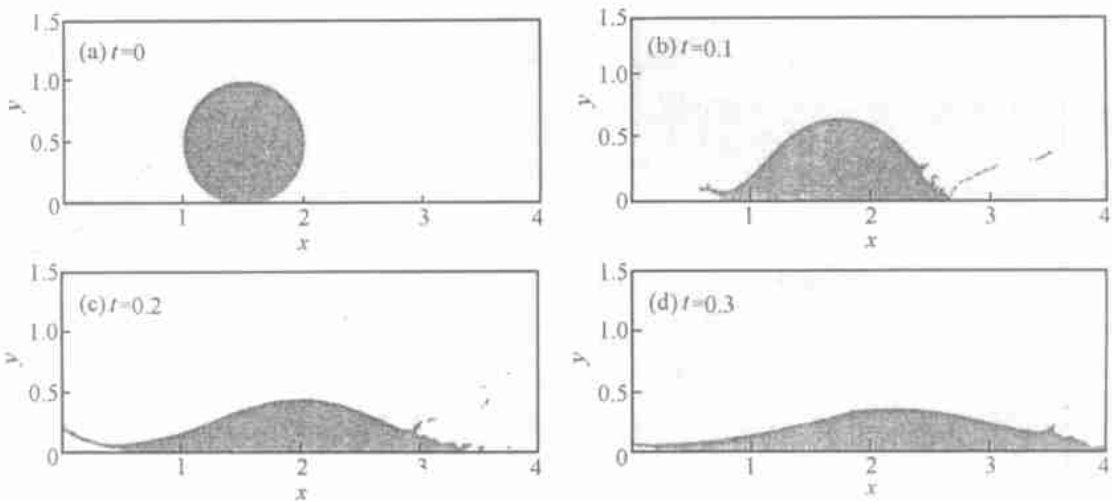


图4 液柱与固壁斜撞击的自由面分布 (Bingham 流体)
Fig. 4 Free surface of liquid cylinder impacted to a solid wall (Bingham fluid)

与图 4 相比,图 5 表明:碰撞初期,水的自由面随时间变化与 Bingham 流体相似,特别是两种流体左侧自由面的形状非常吻合。对于水,自由面的非对称性变得明显。右侧自由面被侵蚀得更严重,形成了更多的流体飞溅。若计算时间相同,自由面向两侧扩展的尺度基本相同。在撞击后期($q/q_0 < 0.1$),若应变率相同,Bingham 流体和水的应力相差较大,加上存在的屈服应力,造成两者自由面差别较大。

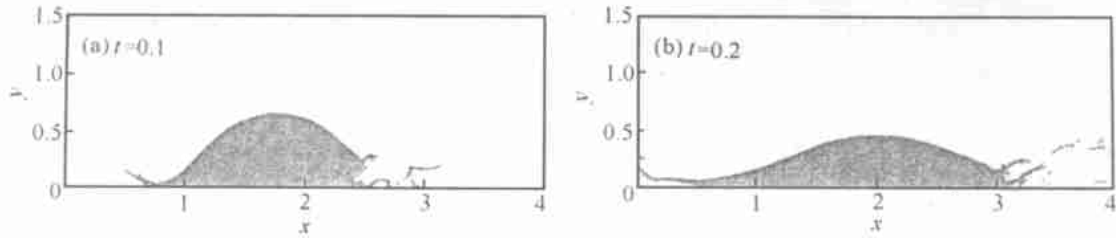


图 5 液柱与固壁斜撞击的自由面分布(水)

Fig. 5 Free surface of liquid cylinder impacted to a solid wall (water)

要说明的是:在碰撞初期,自由面变形较大,若单位网格中标记点的数密度小,计算中会出现伪物理的空格子。这时,需重新布置数目较多的标记点,并考察标记点数密度对计算结果的影响,以得到正确的自由面分布。一般地,标记点数目越多,得到的自由面分布就越接近于实际。

4.2 液柱与液面的斜撞击

图 6、7 给出了液柱与液面斜撞击的自由面随时间演化的图像。与图 4、5 相比,液柱与固壁和液面斜撞击后自由面的分布存在很大差别。与液面斜撞击,自由面不对称性非常明显。图 6 表明:在液面上,形成左侧翻卷的“侵坑”,该翻卷的自由面为有限振幅的扰动波。在“侵坑”右侧,形成了形状复杂的自由面。撞击初期,变形圆柱和液面相交的右侧,自由面被侵蚀,且形状复杂,形成向斜上方飞出的流体,相当于射流,但射流不向周围散开。随着时间推进,扰动波向左继续传播。非对称“侵坑”的开口和深度也不断变大。右侧射流聚集,形成带状的自由面突起。受重力作用,该带状射流向下弯曲,经过足够长的时间,射流将与液面复合。在复合过程中,会形成夹杂气泡。与图 6 相比,图 7 表明:在撞击初期($t < 0.3$),水自由面随时间演化与 Bingham 流体相似。在撞击后期($t > 0.3$),“侵坑”右侧射流自由面较

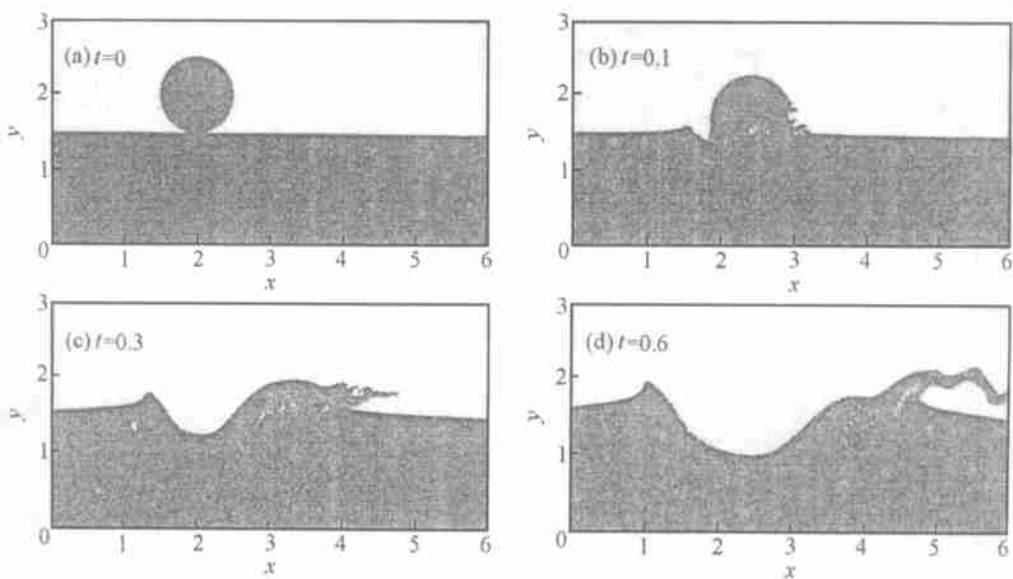


图 6 液柱与液面斜撞击的自由面分布(Bingham 流体)

Fig. 6 Free surface of liquid cylinder impacted to its surface (Bingham fluid)

Bingham 流体复杂得多。射流不聚集为带状,而是向周围散开。若认为撞击初期时图 6、7 中(a)~(c)的自由面完全相同,则图 6(d)和图 7(d)反映了撞击后期因本构关系不同而导致的自由面的差别。数值研究还表明:对 Bingham 流体,液柱和液面斜撞击,存在无量纲临界速度 v_c 。近似地,由动量定理得: $v_c \sin = \sqrt{q_0/Re}$ 。当碰撞速度 $v_1 \gg v_c$,Bingham 流体变形引起的应力要远大于屈服应力,此时,Bingham 流体和水的本构式相同。因此,Bingham 流体和水自由面变化基本相同。当 $v_1 \ll v_c$,Bingham 流体与水遵守不同的本构式。由图 1 知:当 $q/q_0 = 0.1$,水的应力约为 Bingham 流体的 $1/8 (K = 20)$ 。当局部点应力小于屈服应力,Bingham 流体不会产生变形。

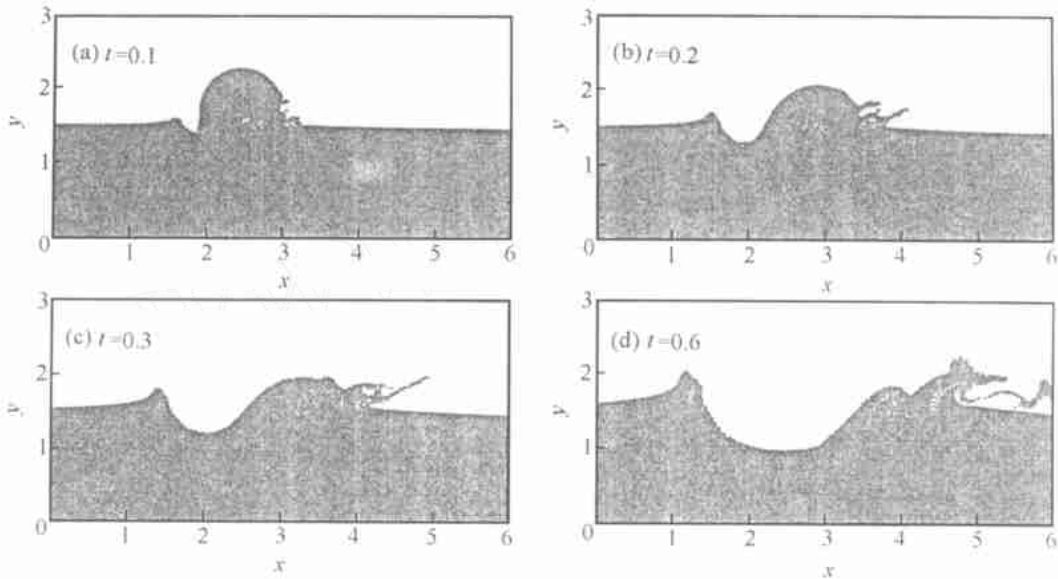


图 7 液柱与液面斜撞击的自由面分布(水)

Fig. 7 Free surface of liquid cylinder impacted to water surface (water)

4.3 K 和 q_0 对 Bingham 流体斜撞击的影响

图 8 给出了 $\theta = 30^\circ$ 时水和液面斜撞击时自由面的分布。与图 7 相比,图 8 表明:减小 θ ,斜碰撞的切向分速度增大。若计算时间相同,“侵坑”的开口和深度变得更大,其两侧自由面翻卷更严重,并出现折叠,形成高度相近的自由面突起,相当于有限振幅的扰动波,沿左、右方向传播。受重力作用,还会形成向“侵坑”中心传播的扰动波。另外,在碰撞初期,自由面对称性很明显。但随着时间推进,自由面对称性变好。我们还对 $\theta = 30^\circ$ 时 Bingham 流体与固壁、液面的斜撞击进行了数值模拟,其自由面演化与图 4.6 相似,此处不再给出图线。计算结果表明:在本文条件下,壁面的物理性质不同,对液柱和斜撞击后自由面分布的影响也不相同。对于固壁,当 θ 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内变化时, θ 的影响较小;对于液面,

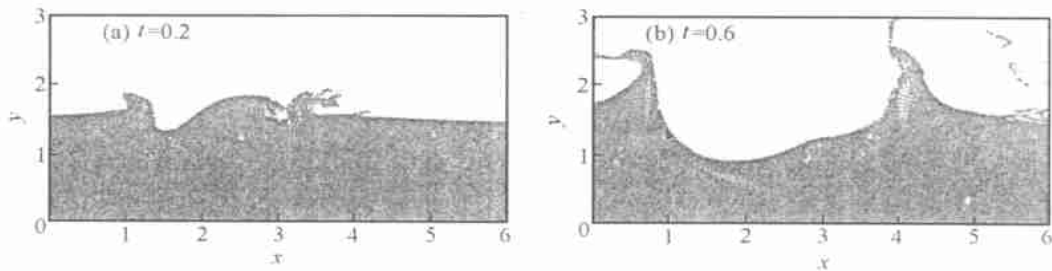


图 8 液柱与液面斜撞击的自由面分布(水, $\theta = 30^\circ$)

Fig. 8 Free surface of liquid cylinder impacted to water surface(water, $\theta = 30^\circ$)

当在 $0^\circ \sim 60^\circ$ 范围内变化时, 的影响较大。

我们还考察了 q_0 、 K 对 Bingham 流体的液柱与液面斜撞击的影响。当 Re 、 K 不变时, 将 q_0 由 10 增大为 100, 相当于屈服应力提高 10 倍。从图 6、9 可以看出: 两者自由面演化过程相似。由于粘性变大, 图 9 自由面相对平滑, 斜碰撞过程中未出现液体飞溅。“侵坑”左侧液面未出现明显的翻卷。要说明的是: 由于 Bingham 流体本构式是非线性的, 其运动受多个参数控制。因此, 难以找到合适的参数, 如 $q_0 / (v_1 \sin \theta)^2$, 使该参数相同而碰撞中自由面图像相似。当 Re 和 q_0 不变, 将 K 由 20 增大到 100, 计算结果和图 6 差别不大。这表明: 在本文条件下, $K=20$, 公式 (3) 已非常逼近 Bingham 流体本构关系。

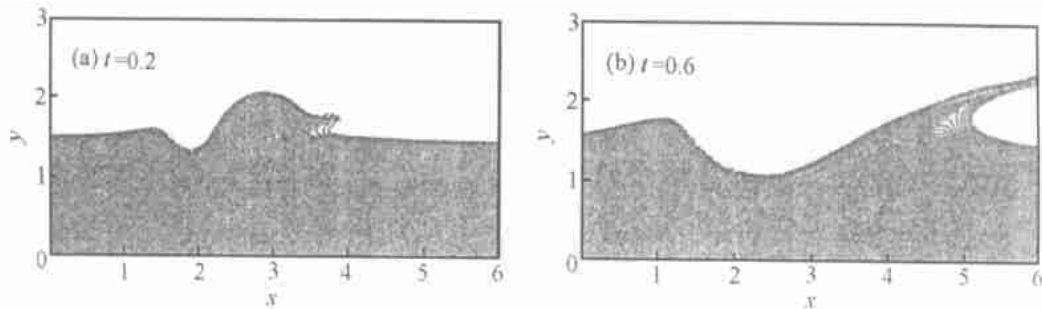


图 9 液柱与液面斜撞击的自由面分布 (Bingham 流体, $q_0 = 100$)

Fig.9 Free surface of liquid cylinder impacted to its surface (Bingham fluid, $q_0 = 100$)

5 结 论

本文条件下, MAC 方法可较好地模拟斜撞击过程中牛顿/非牛顿流体大变形、复杂自由面的演化过程。主要结论如下:

(1) 壁面性质对斜撞击后自由面的演化影响很大。对固壁和液面, 撞击后自由面差别较大, 其中与液面斜撞击后自由面的变化更复杂。

(2) 对液柱和液面斜撞击, 当 $v_1 \gg v_c$ (撞击初期), Bingham 流体和水遵守相同的本构关系, 其应力远大于屈服应力, 两者自由面形状相差不大。当 $v_1 \ll v_c$ (撞击后期), 对应的应变率较小时 (小于 0.1), Bingham 流体较水的应力大, 加上存在屈服应力, 其自由面形状和水相差较大。

(3) 壁面的物理性质不同, 对斜撞击后自由面分布的影响也不同。本文条件下, 对于固壁, 当 $0^\circ < \theta < 90^\circ$, 的影响较小; 对于液面, $0^\circ < \theta < 60^\circ$, 的影响较大。

(4) 当 $K > 20$, 近似本构式中 K 对计算结果的影响不大。 q_0 越大, 自由面变得相对简单, 流体飞溅受到抑制。

参考文献:

- [1] Harlow F H, Shannon J P. Numerical Study of a Cylindrical Liquid Impacts a Free Water Surface [J]. Science, 1967, 157(13): 547-550.
- [2] Noh W F, Woodward P. SLIC (Simple Line Interface Calculation) [A]. Van Dooren A I, Zandbergen P J, et al. Lecture Notes in Physics, 59[Z]. New York: Springer, 1976: 330-340.
- [3] Sussman M, Smereka P, Osher S. A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-phase Multiphase Flow [J]. J Comput Phys, 1994, 114: 146-149.
- [4] Hirt C W, Nichols D D. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries [J]. J Comput Phys, 1981, 39: 201-225.
- [5] Harlow F H, Welch J E. Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface [J]. Phys of Fluid, 1965, 8(13): 2182-2189.

- [6] Peyret R ,Taylor T D. Computational Methods for Fluid Flow [M]. Berlin :Springer ,1983.
[7] 马富华. 带自由面的二维非定常泥浆运动的数值模拟[D]. 合肥:中国科学技术大学,1999.

Numerical Simulation on Cylindrical Bingham Fluid Impacted to a Solid Wall and Fluid Surface

XU Sheng-li¹, YUE Peng-tao¹, LIU Da-you², DUAN Xin-ping²

(1. University of Science and Technology of China, Hefei 230026, Anhui, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract :Two dimensional incompressible Navier-Stokes equations were solved by MAC method in staggered grids. Oblique impact of cylindrical Bingham fluid on a solid wall and fluid surface was investigated numerically. Time histories of free surface were obtained. Several conditions were tested in the computation ,i. e. wall property ,Newtonian fluid and Bingham fluid ,impact angle and parameters K , q_0 in an approximate constitutive relationship of Bingham fluid. The results show that evolution of free surface impacted to fluid surface is much more complex. Initially ,evolution of free surface of Bingham fluid is similar to that of water ,but becomes relatively simple at final stage. The free surface is greatly affected by changing in the case of cylindrical fluid impacted on fluid surface. Free surface of Bingham fluid becomes less complicated as q_0 is increased. In this paper , K has less effect to the result if K is more than 20.

Key words :non-Newtonian fluid ;oblique impact ;MAC approach ;numerical simulation