层合板自由振动和强迫振动的三维精确解[1)]

杨亚政[*,†]　刘 华[*,2)]

[*](北京航空航天大学固体力学研究所，北京 100083)

[†](中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要　主要基于三维弹性力学和状态空间法给出了四边简支各向同性矩形层合板自由振动和强迫振动问题的精确解. 首先基于三维弹性力学建立了层合板的基本方程，利用状态空间法解决了层合板的自由振动问题，然后根据 Lagrange 动力学方程求解了层合板受到横向冲击时的强迫振动响应.

关键词　冲击，状态空间法，振动

THREE-DIMENSIONAL EXACT SOLUTION FOR FREE AND FORCED VIBRATIONS OF MULTILAYERED PLATES[1)]

YANG Yazheng[*,†]　LIU Hua[*,2)]

[*](Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

[†](Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Based on the three-dimensional theory of elasticity and the state space approach, this paper studies the free vibration and forced vibration of an isotropic multilayered rectangular plate with four edges simply supported. Firstly, on the basis of the theory of elasticity, the governing equations of a multilayered plate are established and the free vibration response of the laminated panel is obtained by the state space approach. Then the dynamic response of the multilayered plate subjected to an impact loading is obtained from Lagrangian dynamic formulations.

Key words impact, state space approach, vibration

层合板广泛应用于航空、船舶等领域，层合板的振动问题一直为人们所关注，精确分析层合板在动载荷下的力学性能因而具有重要的工程意义和理论价值. 以典型的夹层板为例，在过去的几十年里，已有很多关于夹层板的理论研究 [1]，大致包括 Reissner 理论、Hoff 理论、ПрусакоВ- 杜庆华理论等，在 Reissner 理论中，面板被视为一薄膜，不考虑其本身的抗弯刚度，而只考虑夹芯的横向剪切效应；在 Hoff 理论中，面板被视为普通的薄板，考虑了夹芯的剪切和面板的抗弯刚度；在 ПрусакоВ- 杜庆华理论中，面板被视为薄板，夹芯除承受剪切外，还考虑夹芯的横向弹性变形. 最近还有 Reddy 等 [2] 提出的层合板高阶剪切变形理论.

为了能更精确地获得层合板的力学性能，人们开始尝试用三维弹性理论分析层合板的振动力学特性，例如 Chen 等 [3] 给出了两对边简支的层合板的三维自由振动半解析解. 丁皓江等 [4] 对横观各向同性层合矩形板弯曲、自由振动和稳定的三维精确分析. 高荣誉 [5] 关于复合材料层合地基大厚度板的静动力分析，利用 Fourier 双重级数给出了 Winkler 地基上正交各向异性层合板的固有频率. 因为涉及三维问题，所以见到的文献报道中多是涉及自由振动问题，或者将三维问题简化为平面应力问题进行层合板梁的强迫振动分析 [6]，或者基于更高阶模型分

2007-10-8 收到第 1 稿，2007-11-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10602005)，北京市教育委员会共建项目建设计划资助.

2) E-mail: liuhuarui@buaa.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

析夹芯结构受到与自振频率相同的外力作用时的强迫振动[7]，还很少见到运用三维弹性力学理论分析层合板的强迫振动问题. 因此本文将在前人研究基础上，基于三维弹性力学和状态空间法给出四边简支各向同性层合板自由振动和受到横向冲击载荷的强迫振动响应的解析表达式.

1 层合板的自由振动

对于总层数为 s 的各向同性层合板，取坐标如图 1 所示，假设层合板沿 x 和 y 方向的长度分别为 a 和 b，层合板四边简支，板的高度为 H，第 k 层的高度为 h_k. 下面公式中变量的右上标 "k" 表示第 k 层的相关变量，对各层都适用的物理量未加上标. 由弹性力学可知，第 k 层的本构方程为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{12}\frac{\partial w}{\partial z}\\
\sigma_y &= C_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{11}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{12}\frac{\partial w}{\partial z}\\
\sigma_z &= C_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{11}\frac{\partial w}{\partial z}\\
\tau_{yz} &= C_{44}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
\tau_{xz} &= C_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy} &= C_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 u, v, w 分别表示沿坐标轴 x, y, z 的位移分量，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 是应力分量，C_{11}, C_{12}, C_{44} 是弹性常数，且 $C_{44} = 0.5(C_{11} - C_{12})$. 三维弹性力学的动力平衡方程为

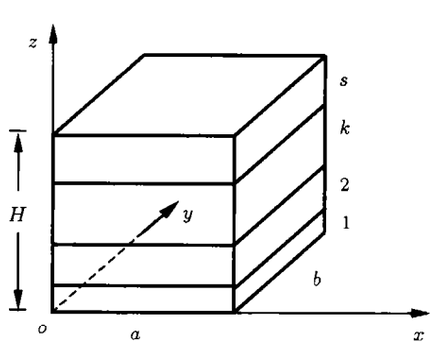

图 1 层合板示意图

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 ρ 为质量密度，t 是时间.

假设层合板自由振动的频率是 ω, 层合板任意一层的应力和位移可表示为[3]

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \overline{X}(z)\sin(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
\sigma_y &= \overline{Y}(z)\sin(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
\sigma_z &= \overline{Z}(z)\sin(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
\tau_{xz} &= \overline{T_{xz}}(z)\cos(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
\tau_{yz} &= \overline{T_{yz}}(z)\sin(\lambda_a x)\cos(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
\tau_{xy} &= \overline{T_{xy}}(z)\cos(\lambda_a x)\cos(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
u &= \overline{U}(z)\cos(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
v &= \overline{V}(z)\sin(\lambda_a x)\cos(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\
w &= \overline{W}(z)\sin(\lambda_a x)\sin(\lambda_b y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $\lambda_a = m\pi/a$, $\lambda_b = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3\cdots$, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \overline{T_{xz}}, \overline{T_{yz}}, \overline{T_{xy}}, \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ 都是关于 z 的待定函数.

将式 (3) 代入式 (1) 和式 (2), 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\overline{\boldsymbol{\delta}}(z) = \boldsymbol{M}^{(k)}\overline{\boldsymbol{\delta}}(z) \tag{4}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{\delta}} = [\overline{Z}\ \ \overline{U}\ \ \overline{V}\ \ \overline{W}\ \ \overline{T_{xz}}\ \ \overline{T_{yz}}]^{\mathrm{T}}$$

第 k 层常系数矩阵 $\boldsymbol{M}^{(k)}$ 为

$$\boldsymbol{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{M}_2^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}_1^{(k)} = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 & \lambda_a & \lambda_b \\ -\lambda_a & c_5 & 0 \\ -\lambda_b & 0 & c_5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2^{(k)} = \begin{bmatrix} c_6 & -c_1\lambda_a & -c_1\lambda_b \\ c_1\lambda_a & -\rho\omega^2 + c_4\lambda_b^2 + c_2\lambda_a^2 & \lambda_a\lambda_b(c_3 + c_4) \\ c_1\lambda_b & \lambda_a\lambda_b(c_3 + c_4) & -\rho\omega^2 + c_2\lambda_b^2 + c_4\lambda_a^2 \end{bmatrix}$$

其中

$$c_1 = -\frac{C_{12}}{C_{11}},\quad c_2 = C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}},\quad c_3 = C_{12} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}},$$

$$c_4 = C_{44},\quad c_5 = \frac{1}{C_{44}},\quad c_6 = \frac{1}{C_{11}}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

利用矩阵理论，很容易求出方程 (4) 的解 $\overline{\boldsymbol{\delta}}(z)$ 为

$$\left.\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\delta}}(z)=\exp[\boldsymbol{M}^{(k)}(z-z_{k-1})]\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_{k-1})\\(z_{k-1}\le z\le z_k,\ k=1,2,\cdots,s)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 $z_0=0$ 和 $z_k=\sum_{r=1}^{k}h_r$, h_r 是第 r 层的厚度. 在方程 (5) 中令 $z=z_k$，可得到

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_k)=\exp[\boldsymbol{M}^{(k)}h_k]\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_{k-1})$$

同理

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_{k+1})=\exp[\boldsymbol{M}^{(k+1)}h_{k+1}]\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_k)$$

由以上两个方程可以得到

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_{k+1})=\exp[\boldsymbol{M}^{(k+1)}h_{k+1}]\exp[\boldsymbol{M}^{(k)}h_k]\overline{\boldsymbol{\delta}}(z_{k-1})$$
$$k=1,2,\cdots,s-1$$

依此类推，不断地运用层合板层间应力和位移的连续条件，可将第 s 层上表面的物理量写为

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}(H)=S\overline{\boldsymbol{\delta}}(0)\tag{6}$$

$\boldsymbol{S}=\prod_{k=s}^{1}\exp[\boldsymbol{M}^{(k)}h_k]$ 为整体传递矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为 6×6 的矩阵.

对于自由振动问题, 层合板上表面和下表面外力自由，相应的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\overline{Z}(H)=\overline{T_{xz}}(H)=\overline{T_{yz}}(H)=0\\\overline{Z}(0)=\overline{T_{xz}}(0)=\overline{T_{yz}}(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

由式 (6), 式 (7) 可以得到

$$\begin{bmatrix}\overline{Z}(H)\\\overline{T_{xz}}(H)\\\overline{T_{yz}}(H)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{12}&S_{13}&S_{14}\\S_{52}&S_{53}&S_{54}\\S_{62}&S_{63}&S_{64}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{U}(0)\\\bar{V}(0)\\\bar{W}(0)\end{bmatrix}\tag{8}$$

其中 S_{ij} 是 $\boldsymbol{S}$ 矩阵中的元素，式 (8) 是关于 $\bar{U}(0),\bar{V}(0),\bar{W}(0)$ 的齐次方程组，当系数行列式为零时有非零解，于是层合板的频率方程为

$$\begin{vmatrix}S_{12}&S_{13}&S_{14}\\S_{52}&S_{53}&S_{54}\\S_{62}&S_{63}&S_{64}\end{vmatrix}=0\tag{9}$$

每一对给定的 (m,n)，都有一个对应的固有频率方程 (9), 由该方程可以计算出层合板的固有频率 ω_{mn}. 方程 (9) 是一个超越方程. 运用方程 (9) 求解固有频率时，方程的阶数不会随着层合板层数的增多而增大，而且所求的频谱范围比通常板理论要宽得多.

求解出各阶固有频率后, 可以求得 $\bar{U}(0)$, $\bar{V}(0)$ 与 $\bar{W}(0)$ 的幅值之比及层合板各层的位移函数, 利用层间的连续条件，进而将层合板各层的所有位移分量都用 $\bar{W}(0)$ 表示，再根据本构方程 (1)，可以得到每层的应力表达式.

2 层合板的强迫振动

假设一集中力 $F(t)$ 作用在层合板的上表面 (x_s,y_s,H) 处. 板的动态响应可以写为

$$\left.\begin{aligned}u^k&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}(x,y,z)q_{mn}(t)\\v^k&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}(x,y,z)q_{mn}(t)\\w^k&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}(x,y,z)q_{mn}(t)\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

其中 $k=1,2,\cdots,s$, $q_{mn}(t)$ 是广义坐标时间函数, 且

$$\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}=\bar{U}^k(z)\cos(\lambda_a^k x)\sin(\lambda_b^k y)$$
$$\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}=\overline{V}^k(z)\sin(\lambda_a^k x)\cos(\lambda_b^k y)$$
$$\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}=\overline{W}^k(z)\sin(\lambda_a^k x)\sin(\lambda_b^k y)$$

层合板的势能 $V(t)$ 可以写为

$$V(t)=\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty}q_{mn}^2\sum_{k=1}^{s}\iiint V_{mn}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\tag{11}$$

其中

$$V_{mn}^k=C_{11}^k\left[\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$2C_{12}^k\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}}{\partial x}\frac{\partial\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}}{\partial x}\frac{\partial\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}}{\partial z}+\right.$$
$$\left.\frac{\partial\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}}{\partial y}\frac{\partial\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}}{\partial z}\right)+C_{44}^k\left(\frac{\partial\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}}{\partial z}\right)^2+$$
$$C_{44}^k\left(\frac{\partial\overline{\overline{W}}{}^k_{mn}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}}{\partial z}\right)^2+C_{44}^k\left(\frac{\partial\overline{\overline{V}}{}^k_{mn}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\overline{U}}{}^k_{mn}}{\partial y}\right)^2$$

层合板的动能 $T(t)$ 可以写为

$$T(t)=\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial q_{mn}}{\partial t}\right)^2\sum_{k=1}^{s}\iiint T_{mn}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\tag{12}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中

$$T_{mn}^k=\rho^k\left[(\overline{\overline{U}}_{mn}^k)^2+(\overline{\overline{V}}_{mn}^k)^2+(\overline{\overline{W}}_{mn}^k)^2\right]$$

由 Lagrange 方程可知 [6]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\dot{q}_{mn}}\right)+\frac{\partial V}{\partial q_{mn}}=Q_{mn} \tag{13}$$

因 F 的虚功为

$$\delta W_F=F\delta w^{k=s}(x_s,y_s,H,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}F\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)\delta q_{mn}$$

所以有

$$Q_{mn}=\sum_{m,n=1}^{\infty}F\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H) \tag{14}$$

将式 (11), 式 (12) 和式 (14) 代入式 (13), 可以得到

$$T_{mn}\frac{\partial^2 q_{mn}}{\partial t^2}+V_{mn}q_{mn}=F\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)$$

其中

$$T_{mn}=\sum_{k=1}^{s}\iiint T_{mn}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_{mn}=\sum_{k=1}^{s}\iiint V_{mn}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式 (7) 可以进一步写为

$$\frac{\partial^2 q_{mn}}{\partial t^2}+\omega_{mn}^2q_{mn}=\frac{F\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)}{T_{mn}} \tag{15}$$

其中, $\omega_{mn}=\sqrt{\dfrac{V_{mn}}{T_{mn}}}$.

由式 (15) 可以解出 q_{mn}, 即

$$q_{mn}=\frac{\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)}{T_{mn}\omega_{mn}}\int_0^t F(\tau)\sin[\omega_{mn}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

当 F 为作用在 t_1 时刻的冲击载荷时, 则

$$F(t)=F\delta(t-t_1) \tag{17}$$

将式 (17) 代入式 (16), 再由式 (9) 可以获得第 k 层的位移为

$$u^k(x,y,z,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}F\overline{\overline{U}}_{mn}^k(x,y,z)\frac{\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)}{T_{mn}\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-t_1)]$$

$$v^k(x,y,z,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}F\overline{\overline{V}}_{mn}^k(x,y,z)\frac{\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)}{T_{mn}\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-t_1)]$$

$$w^k(x,y,z,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}F\overline{\overline{W}}_{mn}^k(x,y,z)\frac{\overline{\overline{W}}_{mn}^{k=s}(x_s,y_s,H)}{T_{mn}\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-t_1)]$$

3 结束语

(1) 本文基于三维弹性理论和状态空间法给出了四边简支各向同性层合板的自由振动和强迫振动的解析表达式, 仅是一个很初步的工作. 与传统的解法相比, 运用状态空间法的最大优点就是在分析层合板的自由振动时, 最后的求解矩阵阶数不会随着层合板层数的增多而增大.

(2) 基于三维弹性理论可以给出更精确的固有频率、高阶频率和冲击响应, 与传统低阶和高阶的剪切变形理论相比, 计算强迫振动响应的工作量比较大.

(3) 该方法可以推广到各向异性的层合板, 例如在本构方程里通过坐标旋转公式反映出不同方向铺层板的弹性常数分析复合材料层合板的振动, 还可以应用到常见的正交各向异性层合板中.

(4) 四边简支的层合板可以给出精确解, 对于其它的边界情况则不能给出精确解, 可以参照文献 [3] 中的方法给出两对边简支的半解析解.

参 考 文 献

1 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京: 科学出版社, 1977

2 Reddy JN. Mechanics of Composite Plates, Theory and Analysis. Boca Raton, FL: CRC Press, 1997

3 Chen WQ, Lue CF. 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported. *Composite Structures*, 2005, 69: 77~87

4 丁皓江, 陈伟球, 徐荣桥. 横观各向同性层合矩形板弯曲、振动和稳定的三维精确分析. 应用力学与数学, 2001, 22(1): 16~22 (Ding Haojiang, Chen Weiqiu, Xu Rongqiao. On the bending, vibration and stability of laminated rectangular plates with transversely isotropic layers. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(1): 16~22 (in Chinese))

5 高荣誉. 复合材料层合地基大厚度板的静、动力分析. 中国矿业大学学报, 2001, 30(2): 143~147 (Gao Rongyu. Static and dynamic analyses of thick laminated composite foundation plates. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2001, 30(2): 143~147 (in Chinese))

6 田金梅, 邢誉峰, 谢文剑. 复合材料叠层梁的冲击响应特性. 振动与冲击, 2006, 25(4): 1~4 (Tian Jinmei, Xing Yifeng, Xie Wenjian. Impact responses of composite laminated beam. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(4): 1~4 (in Chinese))

7 Yang MJ, Qiao PZ. Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 5460~5490

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net