第19卷 增刊 岩石力学与工程学报 19(增): 1006～1013
2000年6月 Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering June, 2000

多孔介质中流体流动的细观-宏观模拟

章根德 刘曰武
(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘要 阐述了如何用体积平均化方法推导具有非线性吸附效应的多孔介质中的 Forchhemer 方程和对流-扩散方程。这两个方程对分析多孔介质中质量输运有着极大的应用价值。在分析 Navier-Stokes 方程中, 我们发现非滑移条件在平均化过程中并不扮演重要的角色, 而吸附边界条件对体积平均化输运方程作出了重要贡献。所以, 在推导多相输运方程时对平均化方法和边界条件的处理必须非常小心。

关键词 多孔介质, 多相流, 体积平均化

分类号 O 35, P 641.13 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2000)增-01006-08

1 前 言

流体在多孔介质中的流动是地质学、水文地质学、岩土力学、流体力学、石油工程、海洋工程等学科研究者所共同感兴趣的重要问题, 在最近几十年来已经取得了相当可观的进展。

流体在地质材料中的流动是十分复杂的。在水文地质系统中, 一般地说在多孔的、透水的、不固结的地层中是层流(Darcy 流); 而在破裂的、固结的岩层中、地下流体主要在裂隙中流动, 可能是层流也可能是湍流; 而在具有溶解特性的岩层中, 其流动主要通过溶解沟道流动, 速度的大小和方向都不规则, 是层流、湍流和具有管流特性的复杂流动[1, 2]。这样, 流动的实验观察往往呈现出无序状态。为了将无序的观察结果转换成明确的数量关系, 就需要建立恰当的数学物理模型来描述它。

流体在地质材料中流动所表现出来的宏观现象与它的微观结构是密切相关的。地质材料从微观到宏观, 结构上存在着不同的层次。一方面, 层次与层次之间是相关联的, 有耦合的, 因此我们需要理解更深层次的基本规律。如果我们将流体在细小的孔隙和裂隙中的流动行为搞得很清楚, 就可以进一步解释流体在地下的宏观流动现象, 给出明确的数量关系。另一方面, 层次之间在某些情况下也存在着脱耦现象, 往往是较深层次规律对理解相隔了好几个层次的物理现象会丧失其重要性, 也就是说我们可以不从原子- 分子的运动层次来说明地下流体的流动。二者之间相隔了较多的层次, 其间并没有密切相关的耦合作用。例如, 地下流体的压力是一个宏观意义上的平均量, 虽然在微观机理上它与地下流体中每一相的分子流动相关联, 但通过建立恰当的物理力学模型, 就可以不再考虑分子微观运动的细节而确定宏观平均意义上多相流体在多孔介质中流动的压力效应, 其它量, 如速度、动量、质量等等亦一样。本文中, 就是通过建立体积平均化模型来对地质材料中流体的流动进行细观-宏观模拟的。

2 地质材料中流体流动的分析

下面考虑一种较为简单的情况: 不可压缩的流体在刚性孔隙介质中流动, 流动过程中发生化学类的质量迁移并且在流体- 固体界面存在吸附作用。如图1所示, 用σ相表示刚性固体, β相表示流体。于是, 描述这个过程的微分方程可以写成:

$$\nabla \mathrm{v}_\beta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\beta \mathrm{v}_\beta) + \nabla (\rho_\beta \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta) = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathrm{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathrm{v}_\beta \tag{2}$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \nabla (c_A \mathrm{v}_\beta) = D_\beta \nabla^2 c_A \tag{3}$$

上述方程中: ρ_β为流体密度, μ_β为流体的粘性, D_β为流体β相中某种A 类物质的扩散系数。方程(2) 是矢量方程, 包含了动量源$-\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathrm{g}$。而方程(3) 是标量方程。

2000年3月20日收到初稿, 2000年4月8日收到修改稿。

作者 章根德 简 介: 男, 57岁, 1965年毕业于中国科技大学近代力学系, 现为研究员, 主要事岩土力学、本构模拟、流固耦合等方面的研究工作。

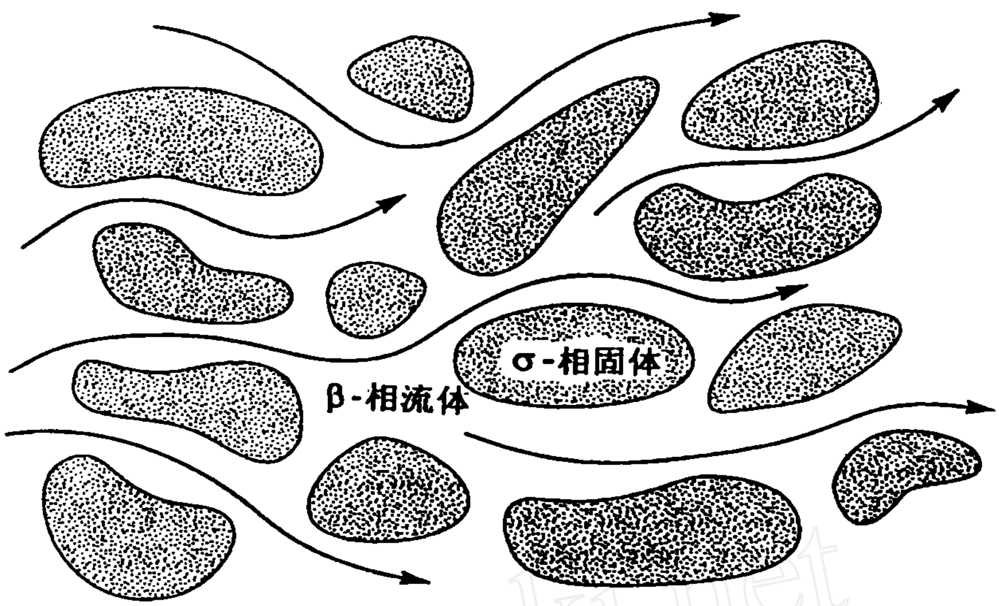

图 1　刚性多孔介质中的流动示意图

Fig. 1　Flow in a rigid povous medium

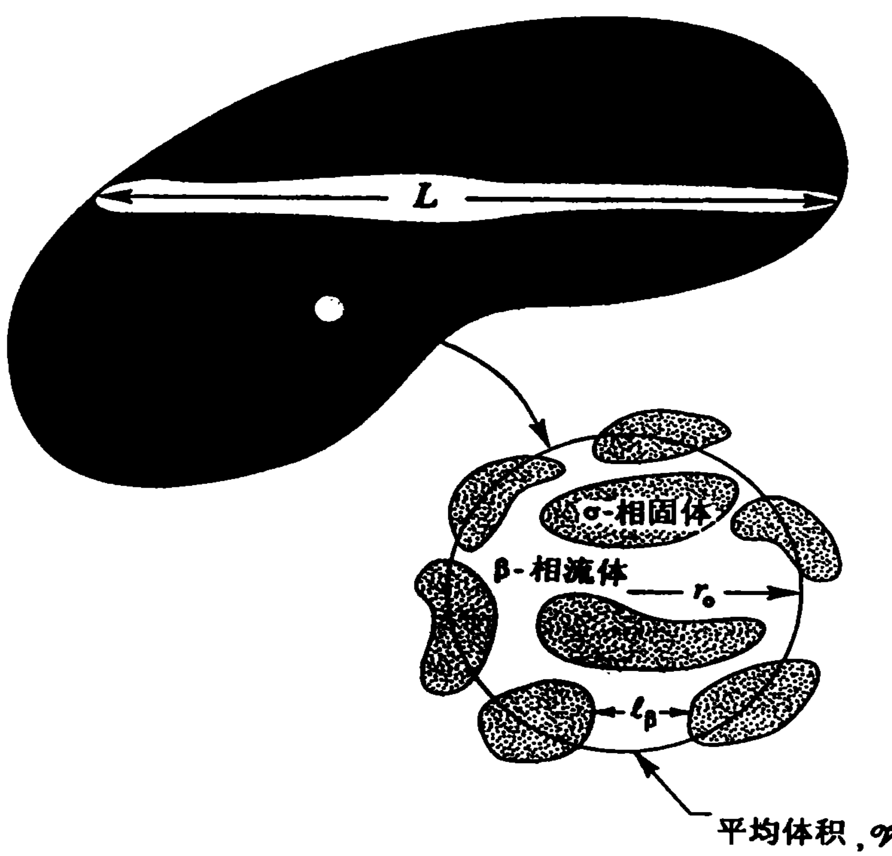

图 2　局部平均化体积和宏观区域

Fig. 2　Macroscopic region and averagyng volume

质量迁移和动量传递之间主要不同之处在接触面的边界条件上反映出来:

$$v_\beta = 0 \tag{4}$$

$$-n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A = K_{eq}\frac{\partial c_A}{\partial t} \tag{5}$$

如果用$A_{\beta\sigma}$表示宏观区域所包含的β-σ相接触面的面积, 如图2所示。方程(4)表示了流体-固体接触面的非滑移条件。而方程(5)描述了非线性的吸附过程, 其中K_{eq}是体积浓度函数c_A的函数。除了接触面的边界条件外, 还需要表述宏观区域(如图2所示)入口处边界条件。如果用A_{BC}表示β相流体在相关区域的入口处, 则其边界条件可表示为

$$v_\beta = f(r, t) \tag{6}$$

$$c_A = f(r, t) \tag{7}$$

一般情况下, 在A_{BC}处边界条件中的速度和浓度都用平均量来表示。而列出这个边界条件对提醒我们所考虑的过程中什么是未知量来说是十分重要的。对于多孔介质中均匀流体流动情况, Pru(1989, 1990, 1992)[3~5], Sahraoui和Kaviany(1992, 1993, 1994)[6~8]利用数值化实验进行了研究, 而Ochoa-Tapia和Whitakor(1995, 1997)[9, 10]发展了一般的理论近似的方法。

3 体积平均化模型

体积平均化模型联系了流体在多孔介质中流动的细观过程和宏观现象。如图3所示, V表示一相关体积, 它包含了流体和固体两相。

表观平均量可定义为

$$\langle \psi_\beta \rangle = \frac{1}{V}\int_{V_\beta} \psi_\beta \mathrm{d}V \tag{8}$$

式中: V_β为相关体积中所包含的β相流体的体积, ψ_β为β相流体中所定义的任意函数, 而平均量$\langle \psi_\beta \rangle$则与平均体积的质量中心相关联。若质量中心的位置用位移矢量X表示, β相流体中某点与质量中心相对位置用Y_β表示, 更确切地说, 方程(8)所定义的量可写成

$$\langle \psi_\beta \rangle \big|_x = \frac{1}{V}\int_{V_\beta(x)} \psi_\beta (x + y_\beta)\mathrm{d}V \tag{9}$$

为了更清楚地表示$\langle \psi_\beta \rangle$与质量中心相关, 积分应涉及相对位移矢量$y_\beta$的所有分量。一般来说, 方程(8)是一种简单的表示而方程(9)才真正是对所理解的体积平均化的概念特别详细的表述。

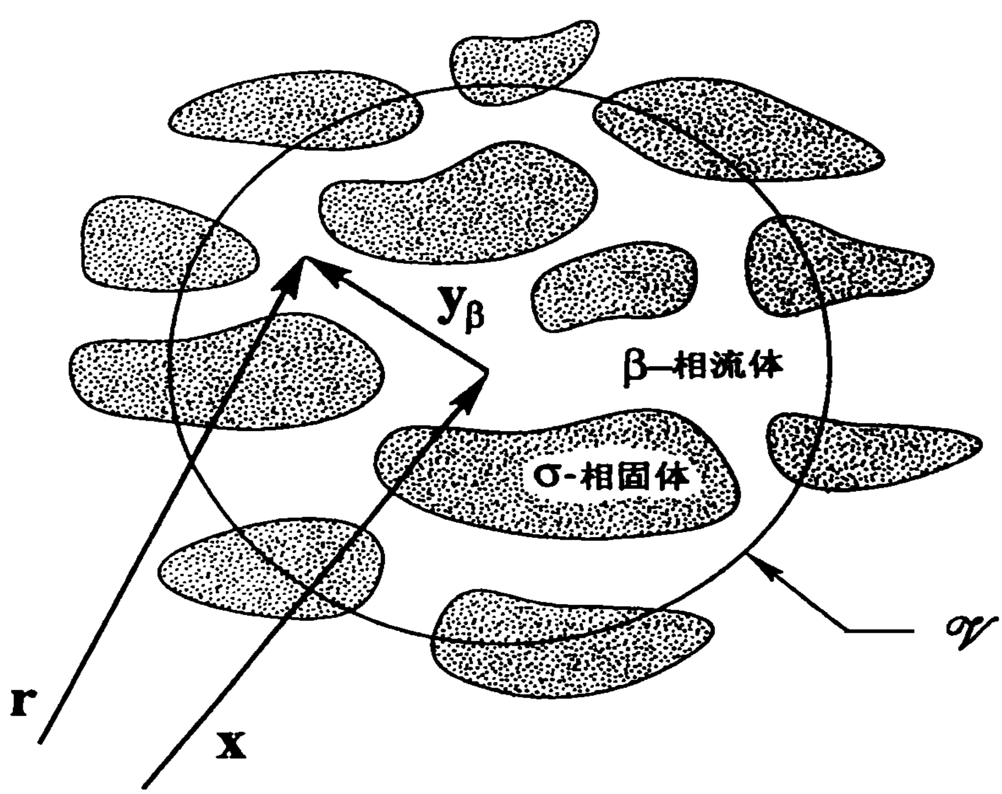

图3 与平均体积相关的位移矢量图

Fig.3 Displacement vectors associated with the averaging volume

除了表观平均量，我们还可以定义本征平均量为

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta}\int_{V_\beta} \psi_\beta \,\mathrm{d}V \tag{10}$$

表观平均量与本征平均量之间存在着如下的关系:

$$\langle \psi_\beta \rangle = \epsilon_\beta \langle \psi_\beta \rangle^\beta \tag{11}$$

式中: ϵ_β 是 β 相流体所占的体积比率，即孔隙率。虽然这里使用的术语显得有些繁琐，但仔细地区分表观平均值与本征平均值是十分重要的，否则就会出现 ϵ_β 量级的误差。这从式(11) 中就可以明显地看出来。

在上述体积平均化的意义下，描述多孔介质中流体流动的基本方程组将发生何种变化?基本方程中各项的物理意义如何? 特作如下的阐述。

4　连续性方程

下面对连续方程进行平均化过程。方程(1) 的表观平均化可得到

$$\frac{1}{V}\int_{V_\beta} \nabla \mathrm{v}_\beta \,\mathrm{d}V = \langle \nabla \mathrm{v}_\beta \rangle = 0 \tag{12}$$

为了对方程(12) 中的微分与积分进行反演，需要使用平均化定律 (Howes 和 Whitaker, 1985, Whitaker, 1985) [11, 12]，简要地可以表示成

$$\langle \nabla \mathrm{v}_\beta \rangle = \nabla \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} \mathrm{n}_{\beta\sigma}\psi_\beta \,\mathrm{d}A \tag{13}$$

式中: $A_{\beta\sigma}$为包含于平均体积中的表面积，而 $\mathrm{n}_{\beta\sigma}$ 为 β 相流体指向 σ 相固体单位法向矢量。对方程(12) 使用平均化定律，得出

$$\langle \nabla \mathrm{v}_\beta \rangle = \nabla \langle \mathrm{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} \mathrm{n}_{\beta\sigma}\psi_\beta \,\mathrm{d}A = 0 \tag{14}$$

使用方程(4) 所给出的非滑移条件，连续方程的表观平均化形式就可表示成

$$\nabla \langle \mathrm{v}_\beta \rangle = 0 \tag{15}$$

式中: $\langle \mathrm{v}_\beta \rangle$ 称为表观平均速度。同样我们也可以用连续性方程得到本征平均速度 $\langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta$。两者间存在着下列关系:

$$\langle \mathrm{v}_\beta \rangle = \epsilon_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \tag{16}$$

于是连续性方程就可用下列的替换式表示为

$$\nabla \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta = -\epsilon_\beta^{-1} \nabla \epsilon_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \tag{17}$$

5　动量方程

Navier-Stokes 方程的表观平均化形式可写成

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\beta \mathrm{v}_\beta) \right\rangle + \langle \nabla (\rho_\beta \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta) \rangle =$$

$$-\langle \nabla p_\beta \rangle + \langle \rho_\beta \mathrm{g} \rangle + \langle \mu_\beta \nabla^2 \mathrm{v}_\beta \rangle \tag{18}$$

不考虑密度与粘性的变化，上式可写成

$$\rho_\beta \left\langle \frac{\partial \mathrm{v}_\beta}{\partial t} \right\rangle + \rho_\beta \langle \nabla (\mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta) \rangle =$$

$$-\langle \nabla p_\beta \rangle + \epsilon_\beta \rho_\beta \mathrm{g} + \mu_\beta \langle \nabla \nabla \mathrm{v}_\beta \rangle \tag{19}$$

下面对动量方程中的惯性项、压力项和粘性项分别进行讨论。

5.1　惯性项

注意到方程(19) 中，平均体积所包含的 β 相流体体积是不依赖于时间的。所以方程中关于时间的微分与空间积分的次序可以交换。方程(19) 的第一项可写成

$$\left\langle \frac{\partial \mathrm{v}_\beta}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{V}\int_{V_\beta} \frac{\partial \mathrm{v}_\beta}{\partial t} \mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{1}{V}\int_{V_\beta} \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}V \right\} = \frac{\partial \langle \mathrm{v}_\beta \rangle}{\partial t} \tag{20}$$

将此移用于方程(19) 中的迁移惯性项，使用方程(13) 所表述的平均化定理，可得

$$\langle \nabla (\mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta) \rangle = \nabla \langle \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} \mathrm{n}_{\beta\sigma} \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A \tag{21}$$

再利用方程(4) 所表示的无滑移条件，上式可简化成

$$\langle \nabla (\mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta) \rangle = \nabla \langle \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta \rangle \tag{22}$$

将式(20) 和(22) 代入式(19)，就可得到下列形式的表观平均化的Navier-Stokes 方程

$$\rho_\beta \left\langle \frac{\partial \mathrm{v}_\beta}{\partial t} \right\rangle + \rho_\beta \nabla \langle \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta \rangle =$$

$$-\langle \nabla p_\beta \rangle + \epsilon_\beta \rho_\beta \mathrm{g} + \mu_\beta \langle \nabla \nabla \mathrm{v}_\beta \rangle \tag{23}$$

在体积平均化方法中，速度与压力在三维空间中都分解为平均量和偏量。虽然表观平均速度较好地表示了宏观平均速度，但是在速度偏量的定义中最好使用本征平均速度。根据 Gray (1975) [13] 总速度可表示为

$$\mathrm{v}_\beta = \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathrm{v}}_\beta \tag{24}$$

根据式(8) 和式(9) 的定义，可更清楚地看出这种分解:

$$\mathrm{v}_\beta \big|_r = \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \big|_r + \tilde{\mathrm{v}}_\beta \big|_r \tag{25}$$

这里 r 是图 3 中所说的矢量位置，将这个表达式用于方程(23) 中的迁移惯性项上，很清楚，可得到下列回项:

$$\langle \mathrm{v}_\beta \mathrm{v}_\beta \rangle = \langle \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \rangle +$$

$$\langle \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathrm{v}}_\beta \rangle + \langle \tilde{\mathrm{v}}_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \rangle + \langle \tilde{\mathrm{v}}_\beta \tilde{\mathrm{v}}_\beta \rangle \tag{26}$$

由于平均速度 $\langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta$ 是由除了平均体积的质量中心之外的其他点速度来估算的，所以上式表示了非局部化形式的迁移动量流。照此，参考方程(9)，方程(26) 右边的第一项可表示为

$$\langle \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \rangle \big|_{\mathrm{x}} =$$

$$\frac{1}{V}\int_{V_\beta(x)}\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\big|_{x+y_\beta}\mathrm{d}V_y \qquad (27)$$

如果忽略平均体积中本征平均速度的变化(Carbonell和Whitaker, 1984)[14]非局部化形式就可简化成局部化形式。在这种情况下，方程(26) 就简化为

$$\langle \mathbf{v}_\beta\mathbf{v}_\beta\rangle = \langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\langle 1\rangle + \langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta + \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta + \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle \qquad (28)$$

而这个简化与偏量平均值等于零的结果是一致的，即

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle = 0 \qquad (29)$$

在这种情况下，方程式(28) 简化成

$$\langle \mathbf{v}_\beta\mathbf{v}_\beta\rangle = \epsilon_\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta + \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle \qquad (30)$$

上式中使用了记号$\langle 1\rangle = \epsilon_\beta$。

Quintard 和*Whitaker*(1994)[15]曾证明，当长度比例尺满足下式时，方程(29) 是近似正确的。

$$l_\beta \ll r_0 \quad r_0^2 \ll L_{v1}L_v \qquad (31)$$

式中：r_0 是平均体积的半径，而 l_β 与 β 相流体相关的特征长度(见图 2)。而大的长度比例尺L_{v1}和L_v 由下式估算:

$$\begin{cases}\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta = O\left(\Delta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta / L_v\right)\\ \nabla\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta = O\left(\Delta(\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta)/L_{v1}\right)\end{cases} \qquad (32)$$

式中：$\Delta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta$表示发生在距离$L_v$ 长度上速度的变化，而$\Delta(\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta)$ 表示在L_{v1} 长度的范围内速度梯度的变化。

回到公式(23)，使用式(30) 后，Navier-Stokers 方程的体积平均化可表示为

$$\rho_\beta\left\langle\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t}\right\rangle + \epsilon_\beta\rho_\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta + \rho_\beta\nabla\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle = -\langle\nabla p_\beta\rangle + \epsilon_\beta\rho_\beta\mathbf{g} + \mu_\beta\langle\nabla\nabla\mathbf{v}_\beta\rangle \qquad (33)$$

推导上式时，使用了$\epsilon_\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta$的散度为零的事实，同时也使用了方程(16)。为了用本征平均速度表达局部加速度，利用了ϵ_β与时间无关的事实。于是，最后可得到

$$\epsilon_\beta\rho_\beta\frac{\partial\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta}{\partial t} + \epsilon_\beta\rho_\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta + \rho_\beta\nabla\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle = -\langle\nabla p_\beta\rangle + \epsilon_\beta\rho_\beta\mathbf{g} + \mu_\beta\langle\nabla\nabla\mathbf{v}_\beta\rangle \qquad (34)$$

5.2 压力项

使用平均化定理，压力梯度可写成

$$\langle\nabla p_\beta\rangle = \nabla\langle p_\beta\rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}p_\beta\,\mathrm{d}A \qquad (35)$$

为了用本征平均压力来表示这个表达式，可利用

$$\langle p_\beta\rangle = \epsilon_\beta\langle p_\beta\rangle^\beta \qquad (36)$$

于是，方程(35) 可写成

$$\langle\nabla p_\beta\rangle = \epsilon_\beta\nabla\langle p_\beta\rangle^\beta + \langle p_\beta\rangle^\beta\epsilon_\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}p_\beta\,\mathrm{d}A \qquad (37)$$

为了对压力进行分解，可利用类似于式(24) 的公式

$$p_\beta = \langle p_\beta\rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \qquad (38)$$

将上式代入式(37) 就可导出压力梯度平均化的非局部形式:

$$\langle\nabla p_\beta\rangle = \epsilon_\beta\nabla\langle p_\beta\rangle^\beta + \langle p_\beta\rangle^\beta\nabla\epsilon_\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\langle p_\beta\rangle^\beta\mathrm{d}A + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\tilde{p}_\beta\mathrm{d}A \qquad (39)$$

推导其局部形式，必须从面积分中消去平均压力，得到

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\langle p_\beta\rangle^\beta\mathrm{d}A = \left\{\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\mathrm{d}A\right\}\langle p_\beta\rangle^\beta \qquad (40)$$

上述简化形式必须满足长度比例尺限制:

$$l_\beta \ll r_0 \qquad \frac{r_0^2}{L_\epsilon L_{p1}} \ll 1 \qquad (41)$$

式中：L_l 和L_{pl}由下式估算

$$\nabla\epsilon_\beta = O\left(\frac{\Delta\epsilon_\beta}{L_\epsilon}\right) \quad \nabla\nabla\langle p_\beta\rangle^\beta = O\left(\frac{\Delta(\nabla\langle p_\beta\rangle^\beta)}{L_{p1}}\right) \qquad (42)$$

从平均化定理，可求得式(40) 中面积分的比较方便的表达式，取成

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\mathrm{d}A = -\nabla\epsilon_\beta \qquad (43)$$

这样，就得到了

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\langle p_\beta\rangle^\beta\mathrm{d}A = -(\nabla\epsilon_\beta)\langle p_\beta\rangle^\beta \qquad (44)$$

将上式代入方程(39)，给出

$$\langle\nabla p_\beta\rangle = \epsilon_\beta\nabla\langle p_\beta\rangle^\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\tilde{p}_\beta\mathrm{d}A \qquad (45)$$

将压力梯度平均化的这个表达式用于式(34)，我们可得到

$$\epsilon_\beta\rho_\beta\left\langle\frac{\partial\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta}{\partial t}\right\rangle + \epsilon_\beta\rho_\beta\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta\nabla\langle \mathbf{v}_\beta\rangle^\beta + \rho_\beta\nabla\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta\tilde{\mathbf{v}}_\beta\rangle = -\epsilon_\beta\langle\nabla p_\beta\rangle^\beta - \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\tilde{p}_\beta\mathrm{d}A + \epsilon_\beta\rho_\beta\mathbf{g} + \mu_\beta\langle\nabla\nabla v_\beta\rangle \qquad (46)$$

5.3 粘性项

对方程(46) 中的最后一项应用平均化定理，可得出

$$\mu_\beta\langle\nabla\nabla\mathbf{v}_\beta\rangle = \mu_\beta\nabla\langle\nabla\mathbf{v}_\beta\rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathbf{n}_{\beta\sigma}\mu_\beta\nabla\mathbf{v}_\beta\mathrm{d}A \qquad (47)$$

应用式(13) 可将粘性项表示成

$$\mu_\beta\langle\nabla\nabla\mathbf{v}_\beta\rangle =$$

$$\mu_\beta\left[\nabla\left(<\nabla \mathrm{v}_\beta>+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\nabla \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A\right)\right]+$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\mu_\beta\nabla \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A \tag{48}$$

将此结果代入方程(46)，可给出体积平均化的 Navier-Stokes 方程

$$\epsilon_\beta\rho_\beta<\frac{\partial<\mathrm{v}_\beta>^\beta}{\partial t}>+\epsilon_\beta\rho_\beta<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+$$

$$\rho_\beta\nabla<\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{\mathrm{v}}_\beta>=-\epsilon_\beta<\nabla p_\beta>^\beta-\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\tilde{p}_\beta \mathrm{d}A+$$

$$\epsilon_\beta\rho_\beta \mathrm{g}+\mu_\beta\left[\nabla\left(<\nabla \mathrm{v}_\beta>+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A\right)\right]+$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\mu_\beta\nabla \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A \tag{49}$$

至此，还未用到方程式(4)所给出的边界条件。应用非滑移条件将使粘性项变得非常简单。采用前面推导压力梯度的类似步骤，可得

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\nabla \mathrm{v}_\beta \mathrm{d}A=$$

$$-\nabla\epsilon_\beta\nabla<\nabla \mathrm{v}_\beta>^\beta+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta \mathrm{d}A \tag{50}$$

这里，使用了式(24)所给出的分解速度的公式。并且从面积分中消去了 $\nabla<v_\beta>^\beta$。这里所必须满足的长度比例尺为

$$l_\beta<<r_0\quad\frac{r_0^2}{L\cdot L_{p1}}<<1 \tag{51}$$

特征长度 L_ϵ 由式(42)中的第一式定义，而新的特征长度 L_{v2} 由下式估算

$$\nabla\nabla\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta=O\left(\frac{\Delta(\nabla\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta)}{L_{v2}}\right) \tag{52}$$

将式(50)代入式(49)再加上非滑移条件就可将体积平均化的动量方程表示为

$$\epsilon_\beta\rho_\beta<\frac{\partial<\mathrm{v}_\beta>^\beta}{\partial t}>+\epsilon_\beta\rho_\beta<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+$$

$$\rho_\beta\nabla<\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{\mathrm{v}}_\beta>=-\epsilon_\beta<\nabla p_\beta>^\beta+\epsilon_\beta\rho_\beta \mathrm{g}+\mu_\beta\nabla^2<\mathrm{v}_\beta>-$$

$$\mu_\beta\nabla\epsilon_\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}[-\tilde{p}_\beta+\mu_\beta\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta]\mathrm{d}A \tag{53}$$

用 $\nabla \mathrm{v}_\beta$ 代替 $\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta$，并根据 $\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta>>\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta$，这个结果和 Du Plessis(1994)[16]所给出的结果是一致的。

方程(53)是表观平均形式的 Navier-Stokes 方程，即每项都表示了多孔介质单位体积内的力。但传统上宁可采用本征平均的动量矩方程，因为它给出包含 $\nabla<p_\beta>^\beta$ 形式的方程，而这正是人们感兴趣的关键参量。由方程(53)两边除以 ϵ_β 就可得到本征平均化的方程

$$\rho_\beta<\frac{\partial<\mathrm{v}_\beta>^\beta}{\partial t}>+\rho_\beta<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+$$

$$\rho_\beta\epsilon_\beta^{-1}\nabla<\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{\mathrm{v}}_\beta>=-<\nabla p_\beta>^\beta+\rho_\beta \mathrm{g}+$$

$$\mu_\beta(\nabla^2<\mathrm{v}_\beta>^\beta+\epsilon_\beta^{-1}\nabla\epsilon_\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+\epsilon_\beta^{-1}<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla\epsilon_\beta)$$

$$+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}[-\mathrm{I}\tilde{p}_\beta+\mu_\beta\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta]\mathrm{d}A \tag{54}$$

方程中的每项代表了流相单位体积上的力。

每个包含有 $\nabla\epsilon_\beta$ 和 $\nabla^2\epsilon_\beta$ 的项都是重要的，方程(54)中的面积分没有简化表示，即意味着闭合问题没有简单解。对于孔隙介质中与均匀流体或均匀固体之间边界相关的区域，孔隙率变化很大，这些区域可以方便地采用动量跳跃条件来处理，详细可见文[17]。

当孔隙率是常数时，包含 ϵ_β 梯度的项就消失，即长度比例尺满足下列限制条件

$$L_\epsilon<<L_v \tag{55}$$

方程(54)就简化为

$$\rho_\beta<\frac{\partial<\mathrm{v}_\beta>^\beta}{\partial t}>+\rho_\beta<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla<\mathrm{v}_\beta>^\beta+$$

$$\rho_\beta\epsilon_\beta^{-1}\nabla<\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{\mathrm{v}}_\beta>=-<\nabla p_\beta>^\beta+\rho_\beta \mathrm{g}+$$

$$\mu_\beta\nabla^2<\mathrm{v}_\beta>^\beta+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}[-\mathrm{I}\tilde{p}_\beta+\mu_\beta\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta]\mathrm{d}A \tag{56}$$

这里，可以看到在多孔介质体积中包含有 $\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{\mathrm{v}}_\beta$ 的体积平均化的项，而在最后一项与多孔介质表面过滤相关的，包含有 $-\mathrm{I}\tilde{p}_\beta+\mu_\beta\nabla\tilde{\mathrm{v}}_\beta$ 的面积分项。这是因为闭合问题中某些微观信息可以从边界面的面积分中得到，并不是所有可得到的微观信息都出现在体积平均化的动量方程中。而如何知道这些多孔介质函数则是体积平均化方法的一个重要方面。

6　对流-扩散方程

由方程(2)与(3)之间的相似点，可以依照推导式(18)与(49)那样导出

$$\epsilon_\beta<\frac{\partial<\mathrm{v}_\beta>^\beta}{\partial t}>+\epsilon_\beta<\mathrm{v}_\beta>^\beta\nabla<c_A>^\beta+$$

$$\nabla<\tilde{\mathrm{v}}_\beta\tilde{c}_\beta>=D_\beta\nabla\cdot$$

$$\left[\left(\nabla<c_A>+\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}\nabla c_A \mathrm{d}A\right)\right]+$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}}\mathrm{n}_{\beta\sigma}D_\beta\nabla c_A \mathrm{d}A \tag{57}$$

这里，已将浓度分解成

$$c_A=<c_A>^\beta+\tilde{c}_A \tag{58}$$

式中：c_A 是空间 A 点的(体积)克分子浓度，而 $<c_A>^\beta$ 是空间中 A 点 β 相流体的本征平均浓度，$\tilde{c}_A$ 称为空间 A 点 β 相流体浓度的空间偏量。方程(57)明显地类似于方程(49)，但是不能再利用动量方程继续进行分析。首先，与非滑移条件相比，基于某些问题不能消去关于 $\mathrm{n}_{\beta\sigma}c_A$ 的积分，为了得到下式，迫使照方程(35)到(45)那样来处理压力梯度

$$\langle \nabla c_A \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} c_A \,\mathrm{d}A =$$

$$\epsilon_\beta \nabla \langle c_A \rangle^\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} \tilde{c}_A \,\mathrm{d}A \tag{59}$$

将上式代入式(57)可给出

$$\epsilon_\beta \left\langle \frac{\partial \langle c_A \rangle^\beta}{\partial t} \right\rangle + \epsilon_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \nabla \langle c_A \rangle^\beta + \nabla \langle \tilde{\mathrm{v}}_\beta \tilde{c}_\beta \rangle = D_\beta \nabla \cdot \left[\left(\epsilon_\beta \nabla \langle c_A \rangle^\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} \tilde{c}_A \,\mathrm{d}A \right)\right] + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A \,\mathrm{d}A \tag{60}$$

将我们的注意力转到式(49)和式(60)中关于分界面流量的项，方程(49)中的最后一项表示粘性力，即流体作用于固体上的力，而它必须作为闭合问题的一部分而来确定。这就意味着，基于$\nabla \tilde{\mathrm{v}}_\beta \gg \nabla \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta$的事实，$\mu_\beta \nabla \mathrm{v}_\beta$的主要部分由$\mu_\beta \nabla \tilde{\mathrm{v}}_\beta$所表示。另一方面，方程(60)中分界面流量的主要部分由平均浓度表示，而这意味着它是由平均法所决定的一部分。回到方程(5)所给出的边界条件，除子V的面积分为

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A \,\mathrm{d}A = -\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} K_{\mathrm{eq}} \frac{\partial c_A}{\partial t} \mathrm{d}A \tag{61}$$

所以吸附过程能直接合并到体积平均化质量迁移方程中。对于非线性吸附作用系数K_{eq}是浓度C_K的函数，按照Whitaker(1988)[18]，此函数可表示为

$$K_{\mathrm{eq}} = K_{\mathrm{eq}}(\langle c_A \rangle^\beta) \tag{62}$$

这是基于$\tilde{c}_A \ll \langle c_A \rangle^\beta$，它与满足非滑移条件$\tilde{\mathrm{v}}_\beta = \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta$的动量传递过程显著地不同。例如平均体积中本征平均浓度的变化可以忽略，就能从积分中消去K_{eq}，方程(61)变成

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A \,\mathrm{d}A = -K_{\mathrm{eq}} \left\{ \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} \frac{\partial c_A}{\partial t} \mathrm{d}A \right\} \tag{63}$$

由于孔隙介质是看成刚性的，所以积分和微分可以交换，可得

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A \,\mathrm{d}A = -a_{\mathrm{v}} K_{\mathrm{eq}} \frac{\partial \langle c_A \rangle_{\beta\sigma}}{\partial t} \tag{64}$$

式中：a_v表示单位体积的面积，$\langle c_A \rangle_{\beta\sigma}$表示体积平均浓度，这些量定义为

$$a_v = A_{\beta\sigma}/V, \qquad \langle c_A \rangle_{\beta\sigma} = \frac{1}{A_{\beta\sigma}}\int_{A_{\beta\sigma}} c_A \,\mathrm{d}A \tag{65}$$

利用方程(58)，面平均浓度可表示成

$$\langle c_A \rangle_{\beta\sigma} = \frac{1}{A_{\beta\sigma}}\int_{A_{\beta\sigma}} \langle c_A \rangle^\beta \mathrm{d}A + \frac{1}{A_{\beta\sigma}}\int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{c}_A \,\mathrm{d}A \tag{66}$$

面浓度的空间偏量与浓度的空间平均量相比是个小量，即$\tilde{c}_A \ll \langle c_A \rangle^\beta$，故其结果可简化为

$$\langle c_A \rangle_{\beta\sigma} = \frac{1}{A_{\beta\sigma}}\int_{A_{\beta\sigma}} \langle c_A \rangle^\beta \mathrm{d}A \tag{67}$$

再假设平均体积内三维平均浓度的变化可以忽略，就可得出更简单的结果：

$$\langle c_A \rangle_{\beta\sigma} = \langle c_A \rangle^\beta \tag{68}$$

使用方程(64)所给出的吸附边界条件，可得到

$$\frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} D_\beta \nabla c_A \,\mathrm{d}A = -a_{\mathrm{v}} K_{\mathrm{eq}} \frac{\partial \langle c_A \rangle^\beta}{\partial t} \tag{69}$$

于是，方程(60)就可写成

$$\epsilon_\beta \left\langle \frac{\partial \langle c_A \rangle^\beta}{\partial t} \right\rangle + \epsilon_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta \nabla \langle c_A \rangle^\beta + \nabla \langle \tilde{\mathrm{v}}_\beta \tilde{c}_\beta \rangle = -D_\beta \nabla \cdot \left[\left(\epsilon_\beta \nabla \langle c_A \rangle^\beta + \frac{1}{V}\int_{A_{\beta\sigma}} n_{\beta\sigma} \tilde{c}_A \,\mathrm{d}A \right)\right] - a_v K_{\mathrm{eq}} \frac{\partial \langle c_A \rangle^\beta}{\partial t} \tag{70}$$

这样就给出了对流-扩散方程体积平均化形式，方程(70)表示了表观平均的质量迁移方程，而方程(56)表示了本征平均动量传递方程。本征平均形式喜欢从动量传递方程得到是基于本征平均压力梯度$\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta$，而这意味着方程(56)中每一项都表示流体单位体积的力。质量迁移方程采用由方程(70)所给出的形式是因为保留面速度$\langle \mathrm{v}_\beta \rangle = \epsilon_\beta \langle \mathrm{v}_\beta \rangle^\beta$是很方便的，这在包含吸附和反应的稳态流中是经常发生的。在这种情况下方程(70)中每项代表了孔隙介质单位体积内每单位时间的克分子数。而在其他情况，采用本征质量迁移方程较佳。

参　考　文　献

1　章根德　固体-流体混合物连续介质理论及其在工程中的应用[J]. 力学进展，1993，23(1)：58～68

2　章根德，韦昌富，尚根根等　水蚀性岩层中的渗流和无机物污染物的迁移[J]. 力学进展，1996，26(4)：482～493

3　Prat M. On the boundary conditions at the macroscopic level[J]. Transprot in Porous Media，1989，(4)：259～280

4　Prat M. Modeling of heat transfer by conduction in a transition region between a porous medium and an external fluid[J]. Transport in Porous Media，1990，?(5)：71～95

5　Prat M. Some refinements concerning the boundary conditions at the macroscopic level[J]. Transport in Porous Media，1992，(7)：147～161

6　Sahraoui M，Kaviany M. Slip and no-slip velocity conditions at interface of porous[J]. Int. J. Heat Mass Trans，1992，(35)：927～943

7　Sahraoui M，Kaviany M. Slip and no-slip temperature boundary condition at interface of porous[J]. Int. J. Heat Mass Trans，1993，(36)：1019～1033

8　Sahraoui M，Kaviany M. Slip and no-slip temperature boundary condition at interface of porous[J]. Int. J. Heat Mass Trans，1994，(37)：1029～1044

9　Ochoa-Tapia J A，Whitaker S. Momentum transfer at the

boundary between a porous medium and a homogeneous fluid Ⅱ: comparison with experiment[J]. Int. J. Heat Mass Trans, 1994, (37): 1029～1044
10 Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogenous fluid[J]. Int. J. Heat Mass Trans, in Pvess
11 Howes F A, Whitaker S. The spatial averaging theorem revisited[J]. Chem. Eng. Sci, 1985, 40: 1387～1392
12 Whitaker S. A simple geometrical deviation of the spatial averaging theorem[A]. In: Whitaker S. ed. Chem. Engr[M]. 1985, 18～21, 50～52
13 Gray W G. A deviation of the equation for multiphase transport [J]. Chem. Eng. Sci, 1975, 30: 229～233
14 Carbonell R G, Whittaker S. Heat and mass transfer in porous media[A]. In: Bear J, Corapcioglu M Y ed. Fundermentals of Transport Phonomena in Porous Media [M]. Dordrecht, Netherlands: Martinus Nijihoff Publisher, 1999, 123～198
15 Quintard M, Whitaker S. Transport in ordered and disordered porous media: the cellular average and the use of weighting functions[J]. Transport in Porous Media, 1994, 14: 163～177
16 Du Plessis J P. Analytical quantification of coefficients in the ergun equation for fluid friction in a packed bed[J]. Transport in Porous Media, 1994, 16: 189～207
17 Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous Fluid I: theoretical developing[J]. Int. J. Heat and Mass Trans, 1995, 38: 2635～1646
18 Whitaker S. Comments and corrections concerning: the volume averaged temperature and its spatial deviation[J]. Chem. Engr. Commun., 1988, 70: 15～18

THE MICRO-MACROSCOPIC MODELING FOR FLUID FLOW IN POROUS MEDIA

Zhang Gende, Liu Yuewu
(*Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080 *China*)

Abstract It is illustrated how the method of volume averaging can be used to derive the Forchhermer equation and the convective-dispersion equation with nonlinear absorption. These two equations have number of applications in the analysis of transport in porous media. In the analysis of Navier-Stokes equations, it is found that the no-slip condition does not play an important role in the averaging procedure, but the absorption boundary condition makes an important contribution to the volume averaged transport equation. So, one must pay careful attention to the averaging procedure and the boundary conditions in the development of multiphase transport equations

Keywords porous media, multiphase flow, volume averaging

工程界首次论证
海底隧道穿越琼州海峡的可行性

据去年 7 月 8 日《科学时报》报道: 近日, 来自中国工程院、铁道部、总参、北方交通大学等单位的几十名知名工程界专家汇聚北京, 专门就中国工程院院士王梦恕、钱七虎前不久提出的“铁路穿越琼州海峡”项目进行论证。

先前也曾有作者(如铁四院的周心培先生)投稿本刊, 提出修建琼州海峡隧道的建议和初步设计方案(见本刊 1999 年增刊)。他们指出: 凡事都由“想”开始, 经幻想、梦想、理想, 插上智慧和财富的双翅而飞达现实的彼岸。英国人、法国人想了一个多世纪, 建成了英吉利海峡隧道; 日本人想了 60 多年, 建成了津轻海峡隧道。中国人想它二、三十年, 还不怕建不成琼州海峡隧道?! 可以想见, 下个世纪中国人不但会建成长江、钱塘江、渤海等水底隧道, 甚至还可能修建台湾海峡隧道(200 km 长)。到那时, 祖国统一, 台海“四通”, 中国将以全新的姿态跻身于世界隧道工程技术超级强国之林。

(王可钧供稿)