应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2000)02-0147-07

二阶动态亚格子尺度应力模型*

龚洪瑞[1], 陈十一[2], 何国威[3], 曹念铮[2]

(1. 美国自适应系统应用中心,新墨西哥州 洛塞勒摩斯,87544;
2. 美国洛塞勒摩斯国家实验室 非线性研究中心,新墨西哥州 洛塞勒摩斯,87545;
3. 中国科学院 力学研究所 非线性力学开放实验室,北京 100080)

(李家春推荐)

摘要: 提出了一个基于亚格子尺度应力与速度梯度张量之间关系的二阶动态模型·然后利用在高雷诺数的流场直接数值解的结果对此二阶模型进行检验·直接数值解的流场包括均匀各向同性强迫湍流,衰减湍流以及均匀旋转湍流·数值检验结果发现与一阶动态模型相比,二阶模型的相关系数提高·

关 键 词: 湍流; 动态模型; 亚格子尺度; Smagorinsky 模型
中图分类号: O357.5;O302 **文献标识码**: A

引 言

在大涡模拟方法中,流场中的大尺度量是直接计算得到的,而亚格子尺度则需要进行模拟·与直接数值模拟相比,大涡模拟耗机时少,模型简单且比标准的雷诺应力模型更为通用,它已成为一个非常重要的湍流计算方法·大涡模拟的目标是模拟亚格子尺度应力对大尺度的影响·人们对利用可解大尺度量的信息来模拟亚格子尺度应力作了很大的努力·大部分亚格子尺度应力模型是基于涡粘度假设,其中应用最广泛的是 Smagorinsky 模型·通过假设能量的产生和耗散相互平衡,Smagorinsky 提出了亚格子应力与涡粘度之间的关系:

$$\tau_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_t\bar{S}_{ij}, \tag{1}$$

$$\nu_t = (c_s\bar{\Delta})^2|\bar{S}|, \tag{2}$$

其中

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

是可解的应变率张量,$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ 是应变率张量的模,c_s 是 Smagorinsky 常数,其值在 0.1 ~ 0.27 之间·$\bar{\Delta}$ 是格子滤波的长度量纲·

尽管 Smagorinsky 模型在湍流的大涡模拟中非常成功,但是它有一些明显的缺点,比如它需要一个取决于流动的经验常数·为了正确预测靠近固壁或层流的特性,它需要一个带有随

* 收稿日期: 1998-08-10
基金项目: 美国能源部洛塞勒摩斯国家实验室资助项目
作者简介: 龚洪瑞(1963~),男,江西南昌人,博士,E-mail:hg@lacasa.com.
何国威:corresponding auther

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

机性的阻尼常数,此外,它不能处理能量的逆向传递——大涡模拟应有的特点(Leith[1])· Germano 等[2]和 Lilly[3]提出的动态亚格子尺度涡粘度模型对 Smagorinsky 模型进行了显著的改进· 在他们的动力模型中使用了二层滤波,模型的常数也是通过把在二层滤波上的亚格子应力与可解的相对亚格子应力联系起来而动态计算得到· 这个模型能给出在固壁上正确的渐近关系,还能预测能量的逆向传递· 动态模型的这些优点引起了越来越多的关注并被广泛地接受· Yang 和 Ferziger[4]把这个模型用在障碍流动的模拟上,Zang 等[5]用于回旋流动,Piomelli[6]用于高雷诺数的渠道流动,Moin 等[7]把它扩充到可压流的计算上· 不过动态模型的一个缺点是,当模型系数变成负数的时候,有时会出现数值不稳定·

应该指出的是 Smagorinsky 模型和动态模型都是涡粘度型的模型· 亚格子尺度应力只是正比于应变率张量· 可以设想的是如果一个模型除包括应变率张量之外,还包括其他的信息,这个模型将会更准确· Lund 和 Novikov[8]建议包括旋转率张量· 一般认为涡的伸展是湍流能量由大尺度传递到小尺度最主要的机制· 他们把亚格子尺度应力表达成一应变和旋转率张量的函数关系,这个关系表现为应变与旋转率张量乘积的积数·

在本文中,我们提出了一个基于 Lund 和 Novikov 模型的二阶动态模型,并利用直接数值解的数据对此模型进行了检验· 用于模型检验的湍流场包括有:均匀各向同性强迫湍流和衰减湍流,以及均匀旋转湍流· 下一节将讨论二阶动态模型的基本特征和数值检验方法· 检验结果在第 2 节中给出· 结论将在第 3 节中作出·

1 方 法

在动态涡粘模型中,定义两个滤波算子获得大尺度量· 一个是格子滤波 $\bar{G}$,另一个是检验滤波 $\tilde{G}$,$\tilde{G}$ 的尺度大于 $\bar{G}$· 大尺度量通过以下方程求出:

$$\bar{f}(x_i) = \int f(x_i)\,\bar{G}(x_i - x_i')\,\mathrm{d}x_i', \tag{3}$$

$$\tilde{f}(x_i) = \int f(x_i)\,\tilde{G}(x_i - x_i')\,\mathrm{d}x_i'\cdot \tag{4}$$

设 $\tilde{\bar{G}} = \bar{G}\tilde{G}$,把 $\bar{G}$ 和 $\tilde{\bar{G}}$ 作用于不可压的 NS 方程得到两组过滤后的方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{6}$$

其中

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i\bar{u}_j, \tag{7}$$

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i\bar{u}_j \tag{8}$$

是亚格子尺度应力和亚检验尺度应力· 定义可解应力为:

$$\mathbf{L}_{ij} = \bar{u}_i\bar{u}_j - \bar{u}_i\bar{u}_j\cdot \tag{9}$$

根据 Germano[2], T_{ij}、τ_{ij}、$\mathbf{L}_{ij}$ 具有以下关系:

$$\mathbf{L}_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}\cdot \tag{10}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1.1 二阶动态模型

假设亚格子应力是应变和旋转率张量的函数,亚格子应力模型可以表达为一通用关系(Lund 和 Novikov[8]):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2c_1\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} + c_2\bar{\Delta}^2(\bar{S}_{ik}\bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik}\bar{S}_{kj}) + c_3\bar{\Delta}^2(\bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj})^* + c_4\bar{\Delta}^2(\bar{R}_{ik}\bar{R}_{kj})^* + c_5\bar{\Delta}^2\frac{1}{|\bar{S}|}(\bar{S}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{S}_{lj}), \tag{11}$$

其中 $\bar{R}_{ij}$ 是可解的旋转张量;$(\ )^*$ 表示无迹分量·

方程右端第一项是与应变张量有关的 Smagorinsky 项,其余项都与旋转张量有关且阶数高于第一项·Lund 和 Novikov 利用均匀各向同性湍流直接解的数据计算直接解应力和模型之间的相关系数,并以此相关系数来检验这一关系·他们发现如果假设模型的各项系数为常数并且只用方程右端的任意一项,第一项具有最佳的相关系数,为 0.24·如果项数增加,相关系数无明显改善,既使右端各项全部包括,相关系数也只有 0.26·如果让模型系数为变量,则第一项仍为最佳项并且相关系数较模型系数为常数时更高·但是第一项不再是绝对重要项·项数越多,相关系数越好·这个结果说明具有可变系数的模型优于具有常数系数的模型,并且对于系数可变的模型,项数愈多,精度愈好·但同时考虑模型的精确度和复杂度,模型中以包括两项为佳·从 Lund 的结果中可知,方程(11)中右端前两项为最佳项,在此我们以这两项作为我们二阶动态模型的基础:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2c_1\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} + c_2\bar{\Delta}^2(\bar{S}_{ik}\bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik}\bar{S}_{kj})\cdot \tag{12}$$

由于模型与滤波过程无关,亚检验应力可表示为

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} = -2c_1\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij} + c_2\tilde{\bar{\Delta}}^2(\tilde{\bar{S}}_{ik}\tilde{\bar{R}}_{kj} - \tilde{\bar{R}}_{ik}\tilde{\bar{S}}_{kj})\cdot \tag{13}$$

把方程(12)和(13)代入代数关系式(10),得到:

$$\mathbf{L}_{ij}^* = c_1M_{ij} + c_2N_{ij}, \tag{14}$$

$\mathbf{L}_{ij}^*$ 是 $\mathbf{L}_{ij}$ 的无迹分量·

$$M_{ij} = -2(\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij} - \bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}), \tag{15}$$

$$N_{ij} = \tilde{\bar{\Delta}}^2(\tilde{\bar{S}}_{ik}\tilde{\bar{R}}_{kj} - \tilde{\bar{R}}_{ik}\tilde{\bar{S}}_{kj}) - \bar{\Delta}^2(\bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj} - \bar{R}_{ik}\bar{S}_{kj})\cdot \tag{16}$$

方程(14)代表具有两个未知量的 5 个独立方程·通过优化空间点上的误差,利用最小二乘法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_l}\sum_i\sum_j(\mathbf{L}_{ij}^* - c_1M_{ij} - c_2N_{ij})^2 = 0, \qquad l = 1,2\cdot \tag{17}$$

从中推出函数 c_1 和 c_2:

$$c_1 = \frac{(\mathbf{L}^*\mathrm{M} + \mathrm{M}\mathbf{L}^*)(2\mathrm{NN}) - (\mathbf{L}^*\mathrm{N} + \mathrm{N}\mathbf{L}^*)(\mathrm{MN} + \mathrm{NM})}{(2\mathrm{MM})(2\mathrm{NN}) - (\mathrm{MN} + \mathrm{NM})^2}, \tag{18}$$

$$c_2 = \frac{(\mathbf{L}^*\mathrm{N} + \mathrm{N}\mathbf{L}^*)(2\mathrm{MM}) - (\mathbf{L}^*\mathrm{M} + \mathrm{M}\mathbf{L}^*)(\mathrm{MN} + \mathrm{NM})}{(2\mathrm{MM})(2\mathrm{NN}) - (\mathrm{MN} + \mathrm{NM})^2}, \tag{19}$$

其中 $\mathbf{L}^*\mathrm{M} = \mathbf{L}_{ij}^*M_{ij}$,相同的规则用于其余各项·

把 c_1, c_2 代入方程(12),就得到二阶动态应力模型·

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1.2 模型的检验

用于模型检验的三维湍流数据是从 NS 方程的谱方法直接数值解得到的 · 直接解的流场包括:均匀各向同性强迫湍流, $R_\lambda = 102, 151$ 和 216;衰减湍流,初始 $R_\lambda = 113$;旋转湍流, $R_\lambda = 190$ 和 $R_0 = u'/2\pi\Omega = 0.2$; u' 是速度均方差, Ω 是转动率 · 图 1 给出的是在不同的雷诺数下的强迫湍流能量谱 · 衰减和旋转湍流的能量谱显示在图 2 中 ·

在直接解中,密网格上的速度值已知,格子滤波层的大尺度量 $\bar{u}_i$、τ_{ij}、$\bar{S}_{ij}$ 和 $\bar{R}_{ij}$ 则可由方程(3)计算得到 · 然后再检验滤波层的量 T_{ij}, $\mathbf{L}_{ij}$, $\tilde{\bar{S}}_{ij}$ 和 $\tilde{\bar{R}}_{ij}$ 从方程(4)中求出 · 在本文中,格子滤波和检验滤波都采用物理空间上的盒子滤波 · 格子滤波的宽度取为 $\bar{\Delta} = 8\Delta$, Δ 是密网格的空间尺度 · 检验滤波的宽度 $\tilde{\bar{\Delta}}$ 由 $\alpha = \tilde{\bar{\Delta}}/\bar{\Delta}$ 求出 · α 通常取值为 2 ·

一个模型的精度是通过计算这个模拟量 M 与它所代表的准确值 X 之间的相关系数来检验的,

$$C(M, X) = \frac{\langle MX \rangle}{\sqrt{\langle M^2 \rangle \langle X^2 \rangle}}, \tag{20}$$

在式中〈 〉代表在整个计算域上进行平均 ·

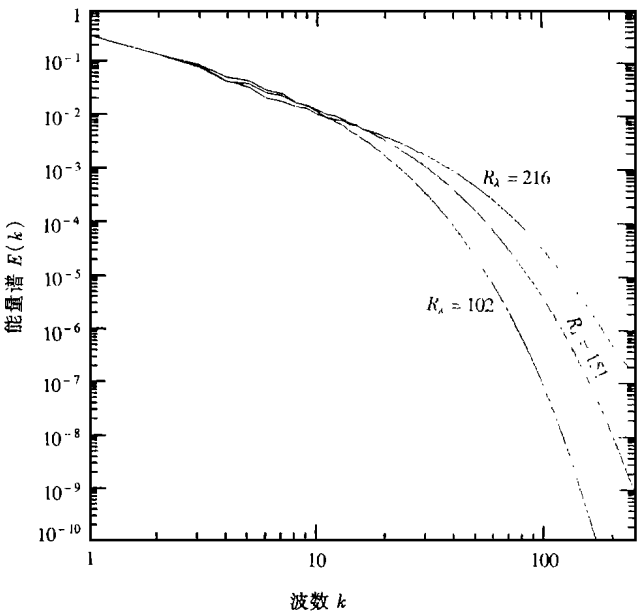

图 1 强迫湍流的能量谱

表 1 精确 SGS 应力与模型之间的相关系数

模 型	强迫湍流			衰减湍流		旋转湍流
	$R_\lambda = 102$	$R_\lambda = 151$	$R_\lambda = 216$	$t = 8$	$t = 13$	$R_\lambda = 190$
Smagorinsky	0.203	0.188	0.203	0.192	0.207	0.140
一阶	0.197	0.129	0.129	0.091	0.101	0.112
二阶	0.719	0.518	0.424	0.268	0.262	0.535

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 结果和讨论

对二阶动态模型检验的结果总结在表 1 和表 2 中· 为便于比较 ,Smagorinsky 模型和一阶动态模型的检验结果也列在表中· 从表中可看出 Smagorinsky 模型的相关系数对强迫湍流和衰减湍流约为 0.2 ,此值低于 Clark[9]得到的 0.27 ,McMillan[10]的 0.32 和 Lund[8]的 0.24· 模型系数为 0.07 ,与 Clark 得到的值相当· 对旋转流动 ,Smagorinsky 模型的相关系数为 0.14· 旋转湍流的低相关系数说明包含旋转因素的项应考虑包括在模型中·

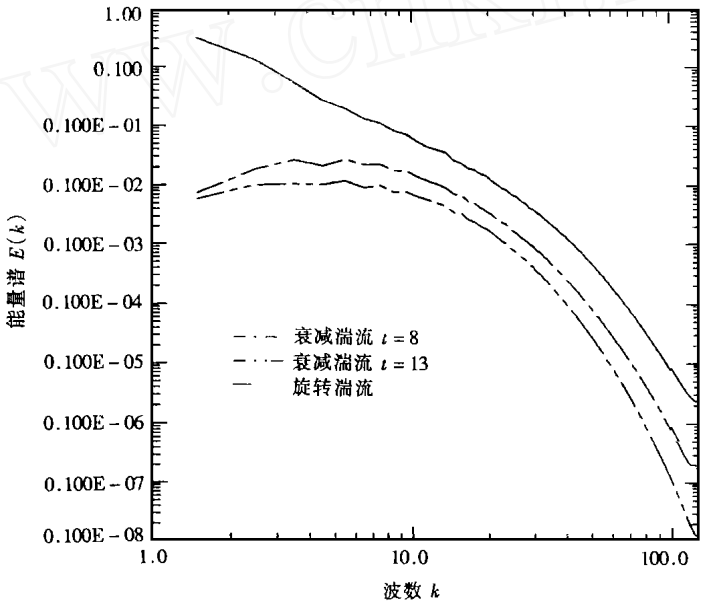

图 2 衰减湍流 (R_λ = 113) 和旋转湍流 (R_λ = 190 , R_0 = 0.2) 的能量谱

表 2 模型系数

模 型		强迫湍流			衰减湍流		旋转湍流
		R_λ = 102	R_λ = 151	R_λ = 216	t = 8	t = 13	R_λ = 190
Smagorinsky	c	0.053	0.064	0.075	0.083	0.084	0.072
一阶	$\bar{c}$	0.026	0.031	0.038	0.035	0.039	0.015
二阶	$\bar{c}_1$	0.024	0.030	0.038	0.038	0.044	0.014
	$\bar{c}_2$	- 0.19	- 0.18	- 0.18	- 0.14	- 0.13	- 0.17

一阶动态模型是基于 Smagorinsky 的模型但系数是动态确定的· 由于它具有可变系数的特点 ,一般认为它的相关系数应比 Smagorinsky 模型高 ,但我们发现 ,对我们所检验的湍流 ,一阶动态模型的相关系数只有 0.1～0.2·

二阶动态模型的相关系数对强迫湍流为 0.4～0.7 ,衰减湍流为 0.26 ,旋转湍流为 0.54 ,显然这些相关系数较一阶模型有显著提高· 可以认为二阶模型的改进是与模型中包含了旋转张量有直接关系 ,因为模型在旋转湍流的情况下 ,相关系数提高最大· 另外一个有趣的发现是二

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

阶模型中相应于 Smagorinsky 项的系数为 0.013～0.04,此值正好在 Smagorinsky 模型系数 0.01～0.06 之内·这说明即使动态模型的系数是动态确定的,它的平均值仍然反映了 Smagorinsky 的系数·二阶模型中的另一个系数 c_2 的平均值也非常稳定,约为 - 0.13～ - 0.18·上述结果表明,对于二阶模型其系数在空间稳定且与 Smagorinsky 模型一致·

3 结 论

一阶动态模型是基于 Smagorinsky 模型但克服了其缺点,其模型系数为变量具有改进精度的可能·我们通过计算模型与准确值之间的相关性来检验模型的精度·检验发现,Smagorinsky 模型的相关系数为 0.2,而一阶动态模型的精度较 Smagorinsky 模型为低,而在某些情况下显著降低·为了得到一个高精度的模型,我们提出了一个二阶动态模型·这一模型是建立在亚格子尺度应力与速度梯度张量(应变率张量和转动率张量)之间的普遍关系基础上的·检验结果显示,二阶模型的精度较一阶模型显著提高·

最后值得指出的是,本文中的检验结果,是从所考虑的强迫湍流、衰减湍流和旋转湍流中得出的·如未经进一步研究,本文的结论有可能不适合广泛用于其它不同的流动中·

致谢: 我们感谢 Garg D. Doolen 博士,在本文写作中与其所进行了有益的讨论·文中的数值计算是在 Los Alamos 国家实验室的计算中心完成的·

[参 考 文 献]

[1] Leith C E. Stochastic backscatter in a subgrid-scale model: plane shear mixing layer[J]. Phys Fluids,1990,**2**:297.

[2] Germano M, Piomelli U, Moin P, Cabot W H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model[J]. Phys Fluids A,1991,,**3**:1760.

[3] Lilly D K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method[J]. Phys Fluids A,1992,,**4**:633.

[4] Yang K, Ferziger J H. Large-eddy simulation of turbulent flow with a surface-mounted 2D obstacle [J]. Ann Res Briefs, CTR,1992,97.

[5] Zang Y, Street R L, Koseff J R. Application of a dynamic subgrid-scale model to turbulent recirculating flows[J]. Ann Res Briefs, CTR,1992,85.

[6] Piomelli U. High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model[J]. Phys Fluids A,1993,,**5**:1484.

[7] Moin P, Squires K, Cabot W, Lee S. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport[J]. Phys Fluids A,1991,,**3**:2746.

[8] Lund T S, Novikov E A. Parameterization of subgrid-scale stress by velocity gradient tensor[J]. Ann Res Briefs, CTR,1992,27.

[9] Clark R A, Ferziger J H, Reynolds W C. Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow[J]. J Fluid Mech,1979,**91**:1.

[10] McMillan O J, Ferziger J H. Direct testing of subgrid-scale models[J]. AIAA J,1979,,**17**:1340.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

A Second-Order Dynamic Subgrid-Scale Stress Model

Gong Hongrui[1], Chen Shiyi[2], He Guowei[3], Cao Nianzhen[2]

(1. Center for Adaptive Systems Application, Inc, 1911 Central, Los Alamos, NM 87544, U S A;
2. Center for Nonlinear Studies, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM87545, U S A;
3. Loboratory for Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China)

Abstract: A second-order dynamic model based on the general relation between the subgrid-scale stress and the velocity gradient tensors was proposed. A priori test of the second-order model was made using moderate resolution direct numerical simulation date at high Reynolds number (Taylor microscale Reynolds number $R_\lambda = 102 \sim 216$) for homogeneous, isotropic forced flow, decaying flow, and homogeneous rotating flow. Numerical testing shows that the second-order dynamic model significantly improves the correlation coefficient when compared to the first-oder dynamic models.

Key words: turbulent flow; dynamic model; subgrid-scale stress model; Smagorinsky model

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net