

# 离散坐标 $SRAP_N$ 法及其与 $T_N$ 法的比较

李本文

魏小林

(浙江大学热能工程研究所, 杭州 310027) (中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘 要** 提出了一种新的坐标离散方法—球带等差数列微元等分法。并经双动量理论检验,与较精确的区域法数值解进行了比较计算。

**关键词** 辐射换热 离散坐标法 数值计算

**中图分类号** TK121

## 0 引 言

十多年来,关于离散坐标法<sup>[1]</sup>的研究主要集中在以下几个方面: 从一维到多维、方腔式到圆筒式的应用; 介质从单一吸收—发射到非灰或各向异性散射; 对有遮蔽效应等复杂几何系统的应用; 差分格式的构造及对计算精度的影响; 射线效应和假散射的分析; 优化离散坐标系列及新的坐标离散方法的研究; 离散坐标法在曲线坐标中的应用。

本文提出了一种新的  $SRAP_N$  (successive spherical rings arithmetic progression) 坐标离散方法—球带等差数列微元等分法。经双动量 (Double Moments) 理论检验以及典型算例的辐射换热计算表明,球带等差数列微元等分法具有精度高、易于实施等优点。

## 1 球带等差数列微元等分离散坐标法

球带等差数列微元等分法的基本思想是将单位球体表面划分成许多面积相等的球面微元,然后确定各表面所对应立体角的重心。连结单位球体的中心与各立体角之重心,形成一个离散坐标系列。由于离散坐标的反射对称性,其构造可以在单位球体的一个卦限内进行。

首先,将单位球体的半球从上到下划分成许多球带(最顶端为球冠,图 1 中只画出一个卦限),然后从球顶端开始,各球带等分为更多的球面微元。各球带上的微元数目从上到下按等差数列分布。根据作者的数值实验,第一个球带(实为球冠)分成 2 等份,以下球带按 3, 4, 5 ... 等差数列划分为宜。

离散坐标方向的计算属于纯几何问题。求出每一个球面微元所对应立体角的重心。坐标原点与各重心的连线即为对应的离散坐标方向。

各离散坐标的权值即为对应的球面微元面积。例如,若将球面从上到下分成  $N = 5$  个球带,则一个卦限的微元总数为  $(2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 20$ ,那么这 20 个离散坐标具有相同的权值  $(\pi/2)/20$ 。

收稿日期:1997-10-05;修回日期:1998-04-21

李本文 男 33 副教授 博士

## 2 离散坐标的双动量检验及与 $T_N$ 法的比较

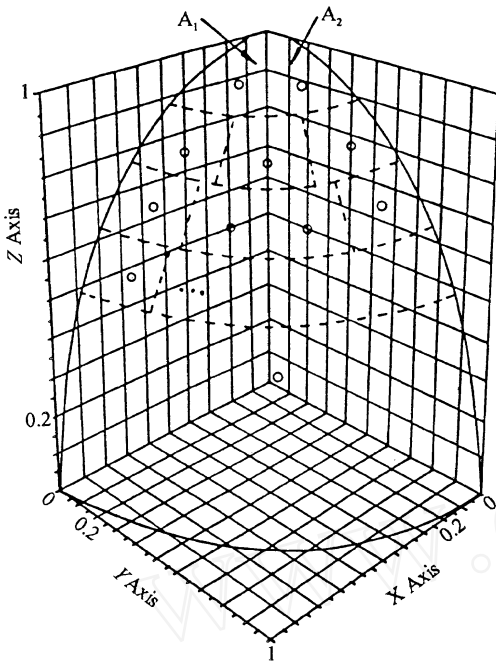


图1 球带等差数列微元等分法示意图

Fig. 1 Schematic of successive spherical rings arithmetic progression dividing

用较多的离散坐标,还可望减少射线效应和假散射<sup>[3]</sup>。

## 3 辐射换热数值计算

### 3.1 方程离散化

离散坐标方程由辐射传递方程离散化而得<sup>[1,4~7]</sup>。为简便起见,此处不再推导,直接给出三维系统中含吸收—发射—散射介质的离散坐标方程

$$\mu_m \frac{\partial I_m}{\partial x} + m \frac{\partial I_m}{\partial y} + m \frac{\partial I_m}{\partial z} = - (K_a + K_s) I_m + K_a I_b + \frac{K_s}{4} \sum_m \phi_{m,m} I_m \quad (1)$$

假设表面边界为灰体,且为漫发射、漫反射性的,则方程(1)的边界条件为

$$\text{当 } x = 0, \quad I_m = I_b + \frac{(1 - \epsilon)}{\mu_i} I_i, \quad \mu_i < 0, \quad \mu_m > 0 \quad (2a)$$

$$\text{当 } x = X, \quad I_m = I_b + \frac{(1 - \epsilon)}{\mu_i} I_i, \quad \mu_i > 0, \quad \mu_m < 0 \quad (2b)$$

对  $y$  轴和  $z$  轴,可以给出类似的方程。

对气体介质,可以根据能量守恒写出体积热流密度为

$$q = 4 K_a I_b - K_a \sum_i I_i \quad (3)$$

最近 Thurgood 等<sup>[2]</sup>提出了一种比传统方法更加优秀的  $T_N$  离散坐标法。为了与文[2]提出的  $T_N$  法进行比较,本文采用了与其相同的双动量检验公式  $\mu^a b^c d$ ,取不同的  $(a, b, c)$  动量,分别计算了  $T_N$  法及  $SRAP_N$  法的相对误差,百分误差精确到小数点后三位。同时为了与以往文献的各种方法有直观比较,文[2]中表1的其它数据一并列出(原数据精确到小数点后两位)。另外,同  $T_N$  法一样, $SRAP_N$  法在  $(a, b, c)$  取  $(0, 0, 0)$  和  $(2, 0, 0)$  时完全满足。

由表1的检验计算可知, $SRAP_N$  法总体相对误差低于以往的各种坐标离散方法,与  $T_N$  法相近。另外,从  $SRAP_N$  法的构思到实施过程可知,该方法的离散坐标系列及相应权值的计算最简单。更重要的是该方法与  $T_N$  法一样,离散坐标数可以取得很多,这样就克服了传统方法中当  $N > 12$  时出现负权值的缺点<sup>[2]</sup>。用新方法计算有强烈散射的辐射问题时,可以采用更多的离散坐标,以避免计算发散或结果误差太大,同时采

表 1 不同坐标离散方法经  $\mu^a b^c d$  检验的相对误差(%)

Table 1 Percent relative error in estimating  $\mu^a b^c d$  for a variety of quadrature sets(%)

坐标离散系列	方向数	动量 (a, b, c) 的相对误差								
		(1,0,0)	(3,0,0)	(1,2,0)	(4,0,0)	(2,2,0)	(5,0,0)	(3,2,0)	(1,4,0)	(1,2,2)
LSE <sub>8</sub>	80	1.70	-0.14	3.54	0	0	0.03	-0.47	5.52	5.61
LSO <sub>8</sub>	80	0	0	0	0	0	0.65	-1.29	-5.83	20.07
LSH <sub>8</sub>	80	0	0.22	-0.22	0	0	-0.19	1.02	-1.24	0.39
EWE <sub>8</sub>	80	1.49	-0.10	3.08	0	0	0.02	-0.35	4.68	5.17
EWO <sub>8</sub>	80	0	0	0	-0.19	0.28	0	0	-6.19	18.56
S <sub>8</sub>	80	2.07	-0.95	5.08	-1.82	2.73	-2.86	2.89	6.36	5.65
LSN <sub>8</sub>	80	0	0.82	-0.82	1.13	-1.70	1.07	0.33	2.01	-0.82
T <sub>3</sub>	72	0.102	1.618	-1.413	3.236	-4.854	4.411	-3.969	3.515	-11.082
SRAP <sub>3</sub>	72	1.606	-0.319	3.531	-0.309	0.010	-0.649	0.341	5.126	5.126
LSH <sub>10</sub>	120	0	0.17	-0.17	0.10	-0.15	0	0.52	0.21	-2.72
EWE <sub>10</sub>	120	1.02	-0.05	2.09	0	0	0.01	-0.16	3.17	3.36
EWO <sub>10</sub>	120	0	0	0	0.01	-0.01	0	0	-0.32	0.97
T <sub>4</sub>	128	0.131	0.470	-0.208	0.842	-1.264	1.159	-0.907	0.545	-1.067
SRAP <sub>4</sub>	112	1.000	0.058	1.937	0.223	-0.424	0.252	-0.329	3.070	3.070
LSE <sub>12</sub>	168	0.97	-0.04	1.99	0	0	0.05	-0.14	3.05	3.06
S <sub>12</sub>	168	1.44	-0.82	3.70	-1.71	2.57	-2.70	2.93	4.31	3.41
SRAP <sub>5</sub>	160	0.687	0.133	1.241	0.297	-0.430	0.398	-0.397	2.060	2.060
T <sub>5</sub>	200	0.080	0.320	-0.160	0.625	-0.937	0.907	-0.854	0.484	-0.707
SRAP <sub>6</sub>	216	0.504	0.139	0.870	0.279	-0.371	0.386	-0.356	1.483	1.483
S <sub>16</sub>	288	1.10	-0.65	2.84	-1.38	2.06	-2.16	2.37	3.30	2.43
T <sub>6</sub>	288	0.054	0.218	-0.109	0.424	-0.637	0.613	-0.570	0.334	-0.519
SRAP <sub>7</sub>	280	0.388	0.129	0.646	0.248	-0.312	0.347	-0.305	1.121	1.121
SRAP <sub>8</sub>	352	0.308	0.116	0.499	0.215	-0.263	0.302	-0.258	0.878	0.876
T <sub>7</sub>	392	0.040	0.158	-0.079	0.308	-0.463	0.445	-0.416	0.241	-0.367
SRAP <sub>9</sub>	432	0.250	0.102	0.397	0.186	-0.223	0.263	-0.220	0.707	0.703
T <sub>8</sub>	512	0.030	0.120	-0.060	0.234	-0.352	0.338	-0.317	0.183	-0.276
SRAP <sub>10</sub>	520	0.208	0.090	0.324	0.162	-0.191	0.229	-0.189	0.582	0.578
SRAP <sub>11</sub>	616	0.176	0.080	0.270	0.142	-0.165	0.201	-0.163	0.488	0.484
T <sub>9</sub>	648	0.024	0.095	-0.047	0.184	-0.277	0.267	-0.250	0.144	-0.216
SRAP <sub>12</sub>	720	0.150	0.071	0.229	0.125	0.144	0.177	-0.143	0.415	0.412
T <sub>10</sub>	800	0.018	0.075	-0.039	0.148	-0.224	0.214	-0.203	0.115	-0.174
Exact			/2	/4	2/3	2/15	/3	/12	/8	/24

而净热流为

$$q_x = \sum_i \mu_i I_i \quad (4)$$

数值求解过程采用 Jamaluddin 和 Smith 介绍的迭代求解方法<sup>[6]</sup>,控制容积边界与中心辐射强度的联系采用加权菱形差分格式。假设介质的散射是各向同性的,故  $\mu = 1$ 。最后,当所有辐射强度值前后两次迭代满足下式时<sup>[8]</sup>,认为结果收敛。

$$\left| I_{m,p} - I_{m,p}^* \right| / I_{m,p} \leq 10^{-6} \quad (5)$$

### 3.2 算例及计算结果比较

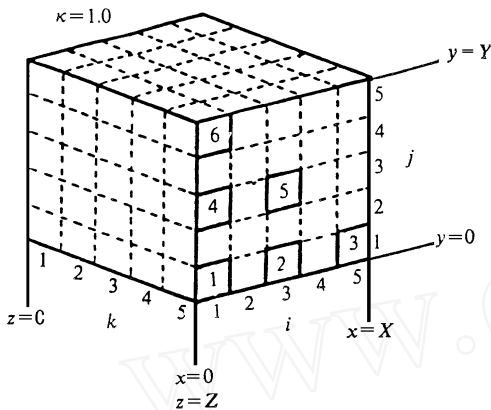


图2 每个方向五等分的黑壁单位立方体  
Fig.2 Black-walled cube with five zones in each direction

数值计算中检验新方法可靠性及其精度的最佳手段是与精确解进行比较。在无法获得精确解的情况下,辐射换热是在典型的算例中用区域法的解作为检验模型精度的基准解。如在文[4~6,9]中,均采用了区域法的解作为比较对象。

为了检验 SRAP<sub>N</sub> 法的精度,本文采用了与文[10]相同的算例,分别用 SRAP<sub>N</sub> 离散坐标法和 T<sub>N</sub>离散坐标法计算了一单位立方体内的辐射换热(如图2)。算例的边界条件为:在  $z=0$ ,  $y=0$  及  $x=1$  的平面上的表面区域具有单位发射力,其他表面为冷表面;所有区域的热源项为0,所有表面区为黑体;气体介质为吸收—发射—各向同性散射性,且  $K_a = 0.5$ ,  $K_s = 0.5$ ,光学厚度

$= 1.0$ 。计算结果分别列于表2~3,表中括号内百分相对误差以文[10]的交换因子法(Exchange Factor Method)区域解为比较标准。

根据作者的数值计算,当  $N$  从2增加到4时,以上两种方法的计算精度有较大提高。但无论是 SRAP<sub>N</sub> 法还是 T<sub>N</sub> 法,当  $N=4$  时,精度不再明显增加,而计算时间却成倍增长。从表2~3还可以看出,当  $N$  从2增加到4时,总体上球带等差数列微元等分法的相对误差比 T<sub>N</sub> 法的下降稍快。

## 4 结论与讨论

对辐射换热的离散坐标法,本文构造了一种新的坐标离散方法—球带等差数列微元等分法。经双动量理论检验及典型算例的辐射换热计算表明,球带等差数列微元等分法比传统离散坐标法精度高,与最近见诸于文献的 T<sub>N</sub> 法精度相近。从 SRAP<sub>N</sub> 法及 T<sub>N</sub> 法的构造可知,T<sub>N</sub> 法中的各离散坐标方向并不通过其对应的球面微元立体角的重心,而且各离散坐标权值也不等。与此相反,SRAP<sub>N</sub> 法的各离散坐标方向严格通过其对应的球面微元立体角的重心,而且各离散坐标权值严格相等。SRAP<sub>N</sub> 法离散坐标方向余弦的计算也比 T<sub>N</sub> 法的简单。

表 2 球带等差数列微元等分离散坐标法计算结果(括号内为百分相对误差)

Table 2 Results of discrete ordinates method for SRAP<sub>N</sub> quadrature sets

(values in parentheses are percentage relative error)

k	j	发射能			#	壁面热流 q
		i = 1	i = 3	i = 5		
<i>N</i> = 2, 方向总数 <i>M</i> = 8 × (2 + 3) = 40						
5	5	0.095078 (- 9.45)	0.172702 (- 2.43)	0.365091 (- 0.79)	1	0.502781 (0.75)
5	3	0.169614 (- 4.17)	0.301111 (1.04)	0.501381 (0.28)	2	0.717206 (3.20)
5	1	0.365788 (- 0.60)	0.500934 (0.19)	0.634853 (0.45)	3	0.847327 (3.21)
					4	0.295642 (1.25)
3	5	0.169614 (- 4.17)	0.301111 (1.04)	0.501381 (0.28)	5	0.514846 (6.59)
3	3	0.293381 (- 1.55)	0.510398 (2.08)	0.711582 (1.36)	6	0.167631 (- 5.29)
3	1	0.500336 (0.07)	0.705400 (0.48)	0.830383 (0.90)		
1	5	0.365789 (- 0.60)	0.500934 (0.19)	0.634853 (0.45)		
1	3	0.500336 (0.07)	0.705400 (0.48)	0.830383 (0.90)		
1	1	0.635859 (0.61)	0.827396 (0.53)	0.904874 (1.10)		
<i>N</i> = 3, 方向总数 <i>M</i> = 8 × (2 + 3 + 4) = 72						
5	5	0.100173 (- 4.60)	0.177099 (0.06)	0.367549 (- 0.12)	1	0.502511 (0.70)
5	3	0.175434 (- 0.88)	0.302735 (1.59)	0.501313 (0.26)	2	0.709587 (2.10)
5	1	0.367156 (- 0.23)	0.500844 (0.17)	0.633565 (0.25)	3	0.834913 (1.69)
					4	0.296777 (1.64)
3	5	0.175434 (- 0.88)	0.302735 (1.59)	0.501313 (0.26)	5	0.506505 (4.87)
3	3	0.300269 (0.76)	0.508148 (1.63)	0.704167 (0.31)	6	0.172296 (- 2.66)
3	1	0.500367 (0.07)	0.702526 (0.07)	0.824553 (- 0.16)		
1	5	0.367156 (- 0.23)	0.500849 (0.17)	0.633565 (0.25)		
1	3	0.500367 (0.07)	0.702526 (0.07)	0.824553 (0.19)		
1	1	0.633209 (0.19)	0.822798 (- 0.02)	0.899571 (0.51)		
<i>N</i> = 4, 方向总数 <i>M</i> = 8 × (2 + 3 + 4 + 5) = 112						
5	5	0.103115 (- 1.80)	0.178836 (1.04)	0.368739 (0.20)	1	0.502871 (0.78)
5	3	0.178032 (0.58)	0.302950 (1.66)	0.501061 (0.21)	2	0.705629 (1.53)
5	1	0.368149 (0.04)	0.500839 (0.17)	0.632729 (0.12)	3	0.831028 (1.22)
					4	0.297499 (1.88)
3	5	0.178032 (0.58)	0.302950 (1.66)	0.501061 (0.21)	5	0.499955 (3.51)
3	3	0.302388 (1.47)	0.502498 (1.30)	0.701525 (- 0.07)	6	0.175686 (- 0.74)
3	1	0.500521 (0.10)	0.700918 (- 0.15)	0.821723 (- 0.16)		
1	5	0.368149 (0.04)	0.500839 (0.17)	0.632729 (0.12)		
1	3	0.500521 (0.10)	0.700917 (- 0.15)	0.821723 (- 0.16)		
1	1	0.632010 (0.00)	0.820831 (- 0.26)	0.896500 (0.17)		

表 3  $T_N$  离散坐标法计算结果(括号内为百分相对误差)Table 3 Results of discrete ordinates method for  $T_N$  quadrature sets

(values in parentheses are percentage relative error)

		发射能			壁面热流	
$k$	$j$	$i = 1$	$i = 3$	$i = 5$	#	$q$
$N = 2, \text{方向总数 } M = 8 \times 2^2 = 32$						
5	5	0.100459 (- 4.32)	0.176250 (- 0.42)	0.367166 (- 0.23)	1	0.504480(1.10)
5	3	0.176249 (- 0.42)	0.308165(3.41)	0.500954(0.19)	2	0.728356(4.80)
5	1	0.367166 (- 0.23)	0.500954(0.19)	0.633449(0.23)	3	0.837852(2.05)
					4	0.292660(0.23)
3	5	0.176249 (- 0.42)	0.308165(3.41)	0.500954(0.19)	5	0.534266(10.61)
3	3	0.308165(3.41)	0.510258(2.05)	0.698333 (- 0.52)	6	0.171061 (- 3.36)
3	1	0.500954(0.19)	0.698333 (- 0.52)	0.824129(0.14)		
1	5	0.367166 (- 0.23)	0.500954(0.19)	0.633449(0.23)		
1	3	0.500954(0.19)	0.698333 (- 0.52)	0.824129(0.14)		
1	1	0.633449(0.23)	0.824129(0.14)	0.899484(0.50)		
$N = 3, \text{方向总数 } M = 8 \times 3^2 = 72$						
5	5	0.105226(0.22)	0.182804(3.28)	0.369128(0.31)	1	0.500838(0.37)
5	3	0.182804(3.28)	0.307309(3.12)	0.500896(0.18)	2	0.698832(0.55)
5	1	0.369128(0.31)	0.500896(0.18)	0.631899 (- 0.02)	3	0.824950(0.48)
					4	0.304183(4.17)
3	5	0.182804(3.28)	0.307309(3.12)	0.500896(0.18)	5	0.501404(3.81)
3	3	0.307309(3.12)	0.508963(1.79)	0.697483 (- 0.64)	6	0.176437 (- 0.32)
3	1	0.500896(0.18)	0.697483 (- 0.64)	0.817091 (- 0.72)		
1	5	0.369128(0.31)	0.500896(0.18)	0.631899 (- 0.02)		
1	3	0.500896(0.18)	0.697483 (- 0.64)	0.817091 (- 0.72)		
1	1	0.631899 (- 0.02)	0.817090 (- 0.72)	0.894499 (- 0.06)		
$N = 4, \text{方向总数 } M = 8 \times 4^2 = 128$						
5	5	0.107373(2.26)	0.182111(2.89)	0.369848(0.50)	1	0.501592(0.52)
5	3	0.182111(2.89)	0.304689(2.24)	0.500700(0.14)	2	0.697457(0.35)
5	1	0.369848(0.50)	0.500700(0.14)	0.631104 (- 0.14)	3	0.822517(0.18)
					4	0.300596(2.94)
3	5	0.182111(2.89)	0.304689(2.24)	0.500700(0.14)	5	0.496037(2.70)
3	3	0.304689(2.24)	0.505544(1.11)	0.698531 (- 0.49)	6	0.180286(1.86)
3	1	0.500700(0.14)	0.698532 (- 0.49)	0.817482 (- 0.67)		
1	5	0.369848(0.50)	0.500700(0.14)	0.631104 (- 0.14)		
1	3	0.500700(0.14)	0.698531 (- 0.49)	0.817482 (- 0.67)		
1	1	0.631104 (- 0.14)	0.817482 (- 0.67)	0.892177 (- 0.32)		

### 符号说明

英文符号:  $I$  为辐射强度  $W/(m^2 \cdot Sr)$ ;  $K_a$  为吸收系数  $m^{-1}$ ;  $K_s$  为散射系数  $m^{-1}$ ;  $M$  为离散方向总数;  $N$  为 T<sub>N</sub>法中基三角形每边的等分数,球带等差数列微元等分法中半球上的球带数;  $q$  为热流,对表面  $w/m^2$ ,对体积  $w/m^3$ ;  $x, y, z$  为直角坐标  $m$ 。

希腊符号:  $\mu, \mu_s$  为离散坐标方向余弦;  $\beta$  为边界黑度;  $\phi$  为散射相函数;  $\tau$  为光学厚度。

下角标:  $b$  为黑体;  $m$  为外辐射离散坐标方向;  $i$  为内辐射离散坐标方向。

上角标: \* 为上一次迭代计算值。

### 参考文献

- 1 Carlson B G and Lathrop K D. 1968, "Transport Theory- The Method of Discrete Ordinates", In: Computing Methods in Reactor Physics. Greenspan H, Kelber C N and Okrent D eds. Gordon and Breach, New York.
- 2 Thurgood C P, Pollard A and Becker H A. The T<sub>N</sub> Quadrature Set for the Discrete Ordinates Method. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1995, **117**:1068 ~ 1070.
- 3 Chai J C, Lee H S, Patankar S V. Ray Effect and False Scattering in the Discrete Ordinates Method. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 1993, **24**:373 ~ 389.
- 4 Fiveland W A. Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1984, **106**:699 ~ 706.
- 5 Truelove J S. Three-Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting-Scattering Media Using the Discrete-Ordinates Approximation. *J Quant Spectrosc Radiant Transfer*, 1988, **39**(1):27 ~ 31.
- 6 Jamaluddin A S, Smith P J. Predicting Radiative Transfer in Rectangular Enclosures Using the Discrete Ordinates Method. *Combust Sci Tech*, 1988, **59**:321 ~ 340.
- 7 Jamaluddin A S, Smith P J. Predicting Radiative Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures Using the Discrete Ordinates Method. *Combust Sci Tech*, 1988, **62**:173 ~ 181.
- 8 Chai J C, Lee H S and Patankar S V. Improved Treatment of Scattering Using the Discrete Ordinates Method. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1994, **116**:260 ~ 263.
- 9 Mohamad A A. Local analytical discrete ordinates method for the solution of the radiative transfer equation. *Int J Heat Mass Transfer*, 1996, **39**(9):1859 ~ 1864.
- 10 Larsen M E, Howell J R. The Exchange Factor Method: An Alternative Basis for Zonal Analysis of Radiating Enclosures. 1985, **107**:936 ~ 942.

## SRAP<sub>N</sub> ANGULAR QUADRATURE SET FOR DISCRETE ORDINATES METHOD AND ITS COMPARISON WITH T<sub>N</sub> SET

Li Benwen

(Institute for Thermal Power Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Wei Xiaolin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**ABSTRACT** A new angular quadrature set, SRAP<sub>N</sub>, the successive spherical rings arithmetic progression dividing method is presented for discrete ordinates method. Numerical test for double moments and evaluation against the more precise zonal solution are given and analysed.

**KEY WORDS** radiative heat transfer; discrete ordinates method; numerical simulation.