第 15 卷 第 4 期
1998 年 7 月
计 算 物 理
CHINESE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS
Vol. 15, No. 4
Jul., 1998

涡重联过程中背景涡量增长的机制研究

王为国 (中国科学院力学研究所,北京 100080)
是长春 陈耀松 (北京大学力学与工程科学系,100871)

摘 要 采用拟谱方法求解 N-S 方程,直接模拟了两个反向平行涡管的重联过程,考察了各种扰动方式对涡重联的影响,发现了"弧形涡带"现象,着重分析了背景涡量增长的物理机制。

关键词 拟谱方法 涡重联 弧形涡带 背景涡量
中图分类号 V211

0 序 言

1970 年,Crow[1] 提出了机翼尾涡配对的稳定性理论。随后,Kambe 等人(1971)[2] 和 Schatzle(1987)[3] 通过实验先后研究了两个涡环碰撞后的重联现象。在涡重联的理论研究方面,Siggia 和 Pumir(1987)[4] 提出了奇性模型(Model of singularities)理论,他们认为涡管拉伸在有限的时间内导致奇性;比较新的模型是 Saffman(1990)[5] 建立的,用一组非线性常微分方程描述了两个涡的相互作用过程,称为 Saffman 模型。

在反向平行涡管重联的数值模拟方面,Pumir 和 Kerr(1987)[6]、Melander 和 Hussain(1990)[7] 用谱方法得到了很好的结果。Shelly 等人(1993)[8] 将谱方法的数值结果与 Saffman 模型进行了比较,认为二者之间出现差别的原因在于模型中应变和压力项的假设。Kida 和 Takaoka(1994)[9] 对涡重联研究的综述性文章指出了涡重联在定量表述上的困难,他们认为粘性流中的局部耗散和欧拉流中的奇性,究竟哪一个对重联发生更为重要,目前尚不清楚。

Shelly 等人(1993)[8] 还发现:在涡重联的过程中,有背景涡量放大的现象。王为国[10,11] 等人在考察扰动方式对涡重联的影响后发现:背影涡量的放大是以"弧形涡带"的方式存在的。所谓"弧形涡带"是指在涡管重联的过程中出现的,环绕在主涡管周围呈弧形带状的涡量集中分布形式,它们一般位于涡管隆起部的上方,与重联后期形成的"桥"平行,但与位于同一侧的"桥"的方向相反[10,11]。"弧形涡带"与扰动方式以及重联的过程密切相关。本文介绍了在不同扰动函数下两个反向平行涡管重联的直接数值模拟结果,着重分析了"弧形涡带"产生即背景涡量放大的物理机制。

1 初始条件和数值方法

在不可压缩粘性流体中,有两个靠得很近的反向旋转的涡管对于平面 $y=\pi$ 对称,涡管的截面则对于平面 $z=\pi$ 对称。涡量在涡管内对于涡管的中心线呈轴对称分布,而且只有 z 方向的分量[8]。即

收稿日期:1997-03-19;修回日期:1998-03-13
王为国 男 34 副研究员,博士 中国石化咨询公司全国压力容器标准化技术委员会

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\omega' = (0, 0, \overleftarrow{\omega}(r)) \tag{1}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$。

如果取

$$\omega(r) = \begin{cases} -20[1 - f(3r/2)] & r < 0.6667R(z) \\ 0 & r \geq 0.6667R(z) \end{cases} \tag{2}$$

的影

而

言

$$f(\eta) = \exp\left\{-\frac{K}{\eta}\exp\left[\frac{1}{\eta - 1}\right]\right\}$$ 化技

其中，$K = 0.5\exp(2)\ln(2)$。于是，叠加了小扰动的虚拟涡量场由下式决定

$$\omega' = [\overleftarrow{\omega}(r - r_+(z)) - \overleftarrow{\omega}(r - r_-(z))]k \tag{4}$$

而

$$\begin{cases} r_+ = [\pi - \varepsilon(1 - g(z))\sin(\alpha)]i + [\pi + b - \varepsilon(1 - g(z))\cos(\alpha)]j \\ r_- = [\pi - \varepsilon(1 - g(z))\sin(\alpha)]i + [\pi - b + \varepsilon(1 - g(z))\cos(\alpha)]j \end{cases} \tag{5}$$

这样的涡量场不满足无散度条件，为此进行如下交换

$$V(x, y, z, t = 0) = \nabla \times (\nabla^2)^{-1}\omega' \tag{6}$$

则真实的涡量场为

$$\tilde{\omega}(x, y, z, t = 0) = \nabla \times V(x, y, z, t = 0) \tag{7}$$

(6) 式满足不可压缩条件，而 (7) 可也满足无散度条件。

一般地，$g(z)$ 是涡管中心线的扰动函数，取为 $g(z) = \cos(z)$[7,8]，(2) 式中的 $R(z) \equiv 1$。而 α 是中心线对于 yz 平面的倾斜角，一般取为 $\pi/3$，(5) 式中的 ε 为扰动振幅。

取新的扰动函数为

数下

$$g(z) = \begin{cases} 2\exp\left\{-\sigma\tan\left[\frac{\pi}{2}h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} - 1 & |z| < \pi \\ -1 & |z| = \pi \end{cases} \tag{8}$$

直接了

1

其中

$$g(z + 2m\pi) = g(z) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$h(\zeta) = 3.7\zeta^6 - 6.4\zeta^4 + 3.7\zeta^2$$

设涡管的一半为单位长度，而 $0 < x_1 < x_2 < 1$，要将弯曲域限制在区间 $[x_1, x_2]$ 内，参数 $\sigma(>0)$ 和正整数 n 由下式确定

$$n = \mathrm{int}\left(-6.13/\ln\left\{\frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}h(x_1)\right]}{\left[\frac{\pi}{2}h(x_2)\right]}\right\}\right), \qquad \sigma = \frac{4.61}{\tan^n\left[\frac{\pi}{2}h(x_i)\right]} =$$

该函数的可以使弯曲域限制在任意的子区间内，有无穷阶导数，并具有周期性和对称性。

鉴于流动的周期性，计算只需在立方体 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 中进行。采用拟谱方法直接求解 Navier-Stokes 方程而不附加任何物理模型。Fourier 变换后得到关于时间的常微分方程，求解的差分格式对非线性项用 Leap-frog 格式，耗散项用 Crank-Nicholson 格式。取均匀的配置点分布，网格点数为 32 ×64 ×64，并使用双精度。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有关参数为:雷诺数 $Re = \Gamma/\upsilon = 1000$;初始涡管中心线之间的最远距离为 $2b = 1.73$;时间步长 $\Delta t = 0.005$。其中,Γ 是单个涡管截面环量的绝对值,υ 为运动学粘性系数。

2　结果和讨论

下面介绍三组模拟结果

(A)　$x_1 = 0.05, x_2 = 0.85 \Rightarrow \sigma = 2.1, n = 1, \varepsilon = 0.5$

(B)　$x_1 = 0.3, x_2 = 0.6 \Rightarrow \sigma = 0.253, n = 5, \varepsilon = 0.5$

(C)　$g(z) = 2\tanh[(z - \pi)^2] - 1.0, \varepsilon = 0.5$

每一组的扰动振幅相同但扰动函数各不相同。图 1(a) 给出了两组扰动函数曲线的示意图,图中不同情形依靠 x_1 和 x_2 的值区分。

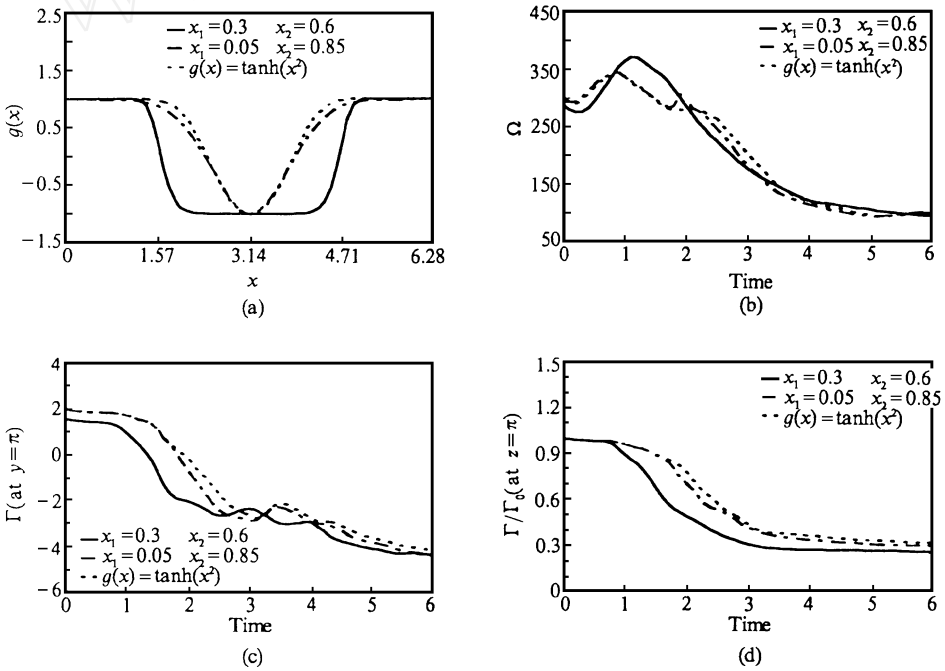

图 1　(a) $g(z)$, (b) Ω, (c) Γ_y 和 (d) Γ_z/Γ_0 随时间的变化曲线。

以情形(A)为例,图 2 给出了涡管重联的典型过程,从 $t = 0.5$ 到 $t = 2.0$ 时刻,在涡管隆起的上方,出现了两条垂直于主涡管的涡带,其方向与位于同一侧下方的"桥"的方向相反。在图 4 的涡量 ω_y 的峰值曲线中,正值和负值分别代表了"弧形涡带"和"桥"。到 $t = 4.0$ 时,重联已基本完成,出现了典型的"线条"结构。传统的揭示涡重联过程的方法一般是:在涡管的对称截面 $z = \pi$ 上,观察环量 Γ_z 的变化规律(图 1(d))。事实上,在涡管的对称截面 $y = \pi$ 上,观察环量 Γ_y 的变化也同样能揭示涡重联的物理过程(图 1(c)),Γ_y 的变化代表了该截面上"桥"的形成过程,其变化规律与 Γ_z 的变化规律基本相同。

正如 Kida 和 Takaoka[9] 在其综述中所说,涡量等值面的表现方式对涡重联而言有其内在的困难,它不能区别涡矢量的方向,因而难以区分"弧形涡带"和"桥"。除了图 4 给出的涡量

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

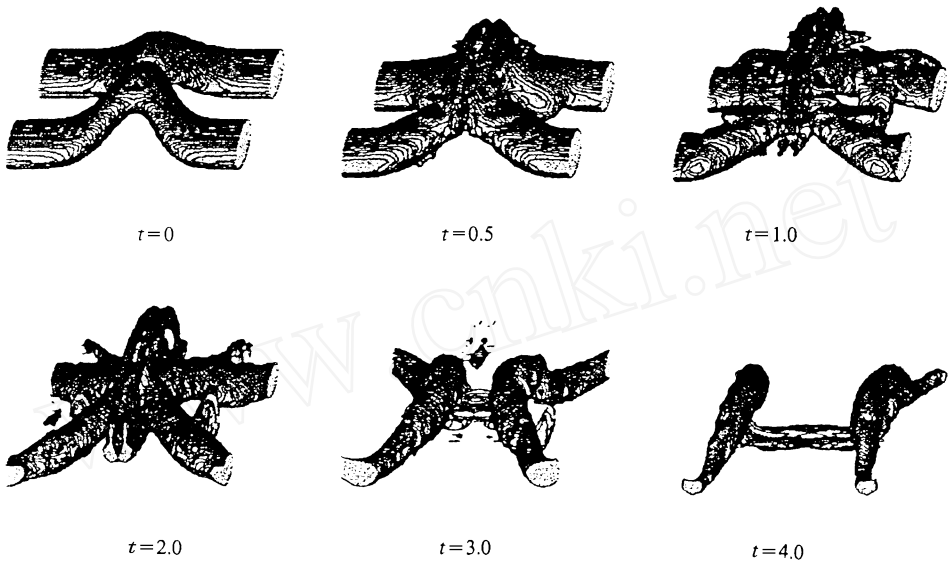

图 2 情形(A)的涡量等值面图$|\omega| = 30\%|\omega(0)|_{max} = 6.0$

ω_y 的峰值曲线可以帮助区分二者以外,作者还采用了考察涡量在涡管对称面上分布等方法作为补充。图 3 是两个典型时刻涡量 ω_y 在对称面 $y = \pi$ 上的分布曲面和相应的等值线。显然,当 $t = 1.0$ 时,只有代表"弧形涡带"的正的集中涡量;而当 $t = 2.0$ 时,正负集中涡量的峰值都很大。正的"弧形涡带"与负的"桥"共存。

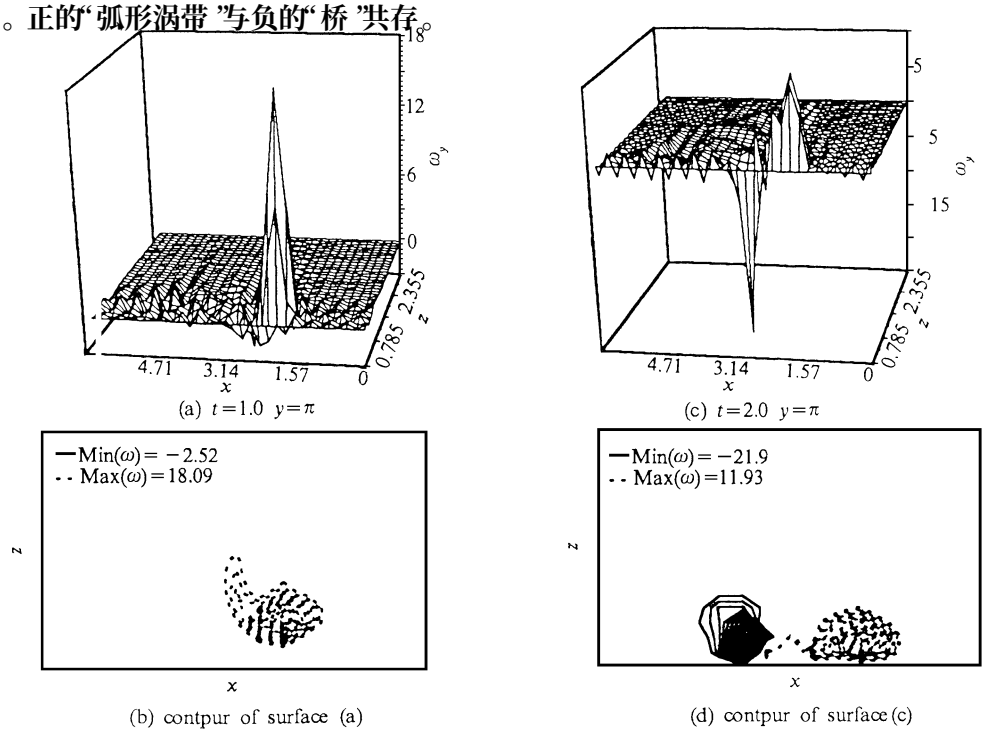

图 3 情形(A):涡量 ω_y 的分布曲面和相应的等值线

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

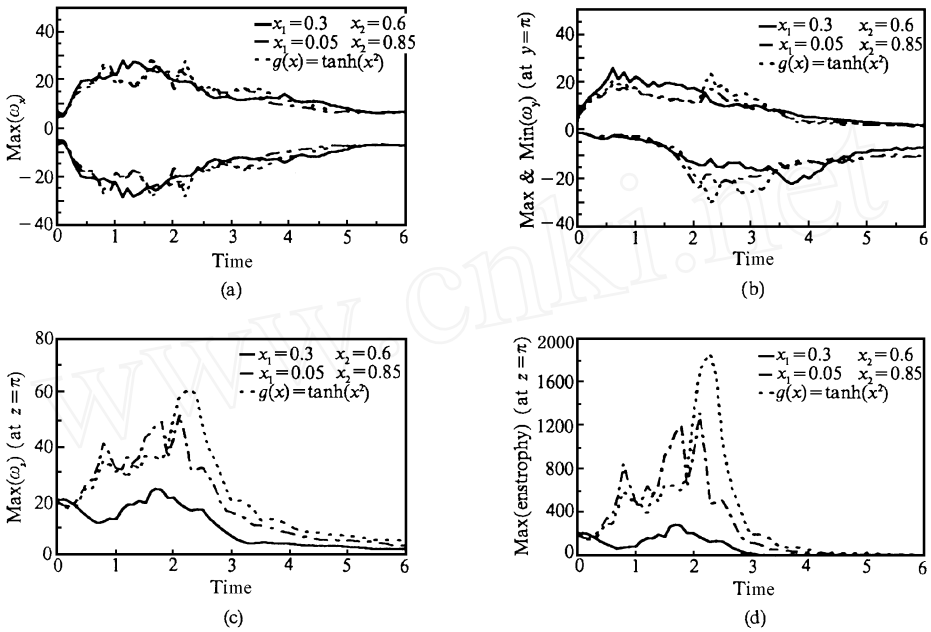

图 4　(a) ω_x, (b) ω_y, (c) ω_z 和 (d) 涡量拟能的峰值曲线

下面着重分析"弧形涡带"形成即背景涡量放大的物理机制。矢量形式的涡量动力学方程为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -(\mathrm{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \mathrm{v}\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{9}$$

取对称平面: $r=\pi$,在该平面上有 $\frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{v}_y = \omega_z = 0$,于是方程(9)的第二式可简化为:

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \mathrm{v}_x\frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \mathrm{v}\nabla^2\omega_y \tag{10}$$

这里,ω_y 代表了对称面上的"弧形涡带"和"桥"。

如前所述,图 1 的(c)和(d)都是通过环量的台阶式变化揭示了涡重联的物理过程。不难发现:图 1(c)的第一个平台($t=0\sim t=0.7$)表明涡量 ω_y 的总量变化很小;但图 4(b)的曲线表明:代表"弧形涡带"的正涡量 ω_y 的峰值急剧增长,而代表"桥"的负涡量 ω_y 的峰值则变化很小。这说明该阶段涡管相互作用的主要特征是"弧形涡带"的形成,而形成的主要原因在于涡量的集中。方程(10)揭示了涡量集中的规律:该方程只有对流项和耗散项,由于总的环量变化很小,因此耗散项的作用不大;在对流项中,v_x 代表了因诱导作用产生的两个涡管并肩前进的速度,是个很大的量,"弧形涡带"的形成主要是该项的贡献。

综合图 1 和图 4 给出的有关物理量随时间的变化曲线和文献[10,11]中给出的其它扰动情形的模拟结果,作者认为扰动方式对涡重联的发生发展有重要影响。这主要表现为:对不同扰动振幅,如果扰动振幅越大,"弧形涡带"的涡量峰值就越大,"弧形涡带"持续的时间也越长,而涡重联的过程则越短;在同一扰动振幅的情况下,如果弯曲域越大,结果亦然。同一振幅不同弯曲方式对涡重联影响的差别,将随着振幅的增大而减弱。这些对控制涡重联的发生和发

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

展是非常重要的。

总之,涡量沿涡管轴向分布的不均匀性是涡重联发生的一个重要前提。这是因为,不均匀性使得诱导作用产生了速度分量,该分量使涡管在中部互相靠拢,在两端互相分开;不均匀性导致了速度梯度和涡量梯度的产生,从而使 N-S 方程的粘性项特别是非线性项发生作用。因此,不均匀性是涡重联发生的必要条件,它所导致的涡量分布的弱三维性在演化过程中呈非线性增长的趋势[10,11]。背景涡量的放大即"弧形涡带"的形成也是非线性项的产物,对我们加深对涡重联物理规律的认识有重要意义。

参考文献

1 Crow S C. *AIAA Journal*,1970. **8**:2172.

2 Kambe T & Takao T. *J Phys Soc Japan*,1971,**31**:591.

3 Schatzle P R. Phd thesis Calif Inst Technol 1987.

4 Siggia E D & Pumir A. *Phys Fluids* 1987, **30**:1606.

5 Saffman P G. *J F M*,1990,**212**:395.

6 Pumir A & Kerr R M. *Phys Rev Lett*,1987,**58**:1616.

7 Melander M V & Hussian F. Topological Fluid Mech,1993,613.

8 Shelly M J,Merion,D,I, & Orszag S A. *J F M*,1993,**246**:613.

9 Kida S & Takaoka M. *Annu Rev Fluid Mech.*,1994,**26**:169.

10 Wang Weiguo,Shi Changchun & Chen Yaosong. *ACTA MECHANICA SINICA*,August 1995,**11**(3):210～218.

11 王为国,北京航空航天大学博士学位论文,1995. 7.

THE STUDY OF MECHANISM FOR THE AMPLIFICATION OF BACKGROUND VORTICITY IN VORTEX RECONNECTION

Wang Weiguo

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080*)*

Shi Changchun Chen Yaosong

(Peking University, Department of Mechanics, Beijing 100871*)*

ABSTRACT By direct numerical simulation of Navier-Stokes equations the reconnection of two anti-parallel vortex tubes has been studied in terms of the pseudo-spectral method. The influence of different disturbances for initial vortex tubes on reconnection is observed. "Curved vortex belts" are found, and the physical mechanism for the amplification of background vorticity is also investigated.

KEY WORDS pseudo-spectral method; vortex reconnection; curved vortex belts; background vorticity.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net