相对论力学中普遍定律的实用判别法和协变集的实用构造法

朱如曾
(中国科学院力学研究所，非线性力学国家重点实验室 (LNM)，北京 100080)

摘要 给出相对论力学中普遍定律的实用判别法和协变集的实用构造法，还给出实现非普遍定律的“可导出性”的一种实用方法.

关键词 洛仑兹变换，普遍定律，非普遍定律，协变

钱学森指出，力学应包括相对论. 相对论的基础之一是“相对性原理”. 笔者的文 [1] 提出了普遍定律和非普遍定律的严格定义，证明了相对性原理 (自然界定律对于所有对应的参考系 * 都是相同的 [2]) 要求自然界普遍定律关于对应的参考系变换是协变的，非普遍定律是不协变，但可导出的 (即对于一个参考系中的一个给定的非普遍定律，总可以从该参考系中合适的定律出发推导出另一个参考系中同样的非普遍定律)，这一要求构成了相对性原理的协变性表述，从而解决了“协变性疑难”. 这里，按文 [1] 的定义，普遍定律指假设条件集是协变的定律; 协变假设条件集 (或协变综结集) 指与不同惯性系中形式相同假设条件集 (或综结集) 强等价的假设条件集 (或综结集)；协变定律集指这样的定律集，其中所有定律的假设条件集全同且协变，并且由定律集中所有定律的综结所构成的综结集也是协变的. 协变定律集中的每一个定律称为与其它定律联立协变的，也简称协变的; 如果协变集是单元素集，则称此元素为单独协变的，也简称为协变的. 上面用到的强等价的概念又是怎么定义的呢？用 a 或 b 表示一个对象 (集)，如一个物理量 (集)、一个概念 (集)、一个关系式 (集) 或一个定律 (集). a 强导出 b 用“$a \Rightarrow b$”表示，指只利用逻辑学、数学定律或物理量的参考系变换关系，而不利用其它自然定律的“a 可导出 b”; 并且当 a 和 b 都是定律集 (或单一的定律) 时，还附加地要求：(1) a 中各定律的假设条件相同 (或互相强导出)，b 中各定律的假设条件也相同 (或互相强导出)，即 a 和 b 都是条件全同定律集，(2) a 的假设 $\Rightarrow b$ 的假设，a 的综结 $\Rightarrow b$ 的综结 (不借助于 a 的假设). a 强等价于 b 则指 $a \Rightarrow b$ 且 $b \Rightarrow a$，用“$a \Leftrightarrow b$”表示. 所以协变定律集就是与不同惯性系中形式相同定律集强等价的定律集.

对于一条定律，如何判别它是否普遍定律呢？对于一条普遍定律，如何构造包含它的协变集呢？对于一条给定的非普遍定律，怎么实现相对性原理的协变性表述中的“可导出”呢？文 [1] 在狭义相对性原理的协变性表述 (表述 III) 的证明中，已给出了有关的协变集的构造方法，不过那只是一种在概念上强有力的构造方法，适合于协变集的存在性证明，并不适合于实际操作. 本文将给出借助于参考系变换关系的具体形式 (洛仑兹变换和广义相对论的参考系变换) 的普遍定律的实用判别法和协变集的实用构造法. 文 [1] 在狭义相对性原理 (表述 II) 的证明中，已给出了用“逆变换法”实现“可导出”的办法，本文将给出另一种更为方便的“协变法”.

1 普遍定律情况

1.1 狭义相对论情况

1.1.1 普遍定律判别法

判别一个自然界定律是否普遍定律，就是判别它的假设条件集是否协变. 对于假设条件集中的定性部分，利用物理量的变换关系容易判别是否协变. 例如高斯定律，“对于电磁场，$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$”，其中定性概念“电磁场”变换后仍是电磁场，故是协变假设条件，所以高斯定律是普遍定律. 但是静电场的库仑定律则是非普遍定律，因为“静电场”不协变. 对于假设条件集中的定量关系部分，由于洛仑兹变换式是四维复欧时空空间的幺正基的转动和平移变换或其组合，因此在四维复欧空间中考虑问题较为方便. 此时，物理量均可组合并强等价变换为四维张量. 假设条件中的定量关系部分如果能联立并强等价地变换为四维张量式，则一定是协变的. 这是因为，熟知的“张量公式形式不变性定理”保证，对惯性系 S 中已强等价地化为张量形式的假设条件集，可立即强等价地化为相对“转动和平移”了的惯性系 S' 中带撇的相同形式，进而可强等价地恢复为带撇的非张量的相同形式.

1.1.2 协变集构造法

本文于 2001-11-07 收到.

* “对应的参考系”指惯性系 (在狭义相对论和经典力学情况下) 或任意的参考系 (在广义相对论情况下). 在下文中，当不致混淆时，我们将省略“对应”二字.

对于一个已判定的普遍定律，寻找包含它的协变集，就是寻找假设条件与它的假设条件相同的若干普遍定律，构成包含它的定律集，使其中所有的综结联立协变. 为此，与对假设集的处理一样，需将所有的综结联立并进行强等价变换而使之变换为四维张量式. 如若不然，需重新寻找.

通常的电动力学教科书中介绍麦克斯韦方程组的协变性时，用的就是上述方法，其中构造了两个四维张量式，只是未明确提到检验其假设条件的协变性而已. 现再举一例：单质点动量守恒定律

$$(n=1,\boldsymbol{F}=0)\rightarrow \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t=0 \tag{1}$$

式中 $n,m,\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别为质点数、质点的质量、速度和所受的作用力. 假设条件中的 $n=1$ 是标量式，$\boldsymbol{F}=0$ 和它的推论 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=0$ 联立强等价于四维张量等式 $K_\mu=0$，这里，K_μ 为四维力的各分量 [3]. 故假设条件集协变，于是单质点动量守恒定律 (1) 是普遍定律，必定是协变的. 协变集由式 (1) 和单质点能量守恒定律

$$(n=1,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=0)\rightarrow \mathrm{d}W/\mathrm{d}t=0 \tag{2}$$

构成 (式中 W 为质点的能量)，与它们的终结集强等价的四维矢量式是

$$\mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}\tau=0 \tag{3}$$

式中，p_μ 为能量 - 动量四维矢量的分量，τ 为固有时.

1.2 广义相对论情况

在确当的黎曼空间用与洛仑兹变换情况中类似的构造张量的办法处理，即可判定一个定律是否普遍定律，并找到包含一普遍定律的协变集.

2 非普遍定律情况

对于任一非普遍定律，为了实现“可导出性”，可先取消它的非协变假设条件，从而找出涵盖它的普遍定律. 将这个普遍定律通过上述实用方法“协变”到另一带撇的惯性系中，然后再直接加上带撇的非协变条件，并进行简单的推导即可得到带撇的参考系中的相同形式. 此法可称为“协变法”. 例如，单质点能量守恒定律 (或更确切的，能量驻点定律)(2)，由于当 $\boldsymbol{f}\neq 0$ 时，其假设条件 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=0$ 不协变，故是非普遍定律. 为了从 S 系中的一些定律导出 S' 系中的单质点能量守恒定律，可以将 S 系中的单质点能量守恒定律 (2) 的非协变假设条件 (记为 P) 取消，于是得 S 系中的单质点能量定律

$$(n=1)\rightarrow \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\mathrm{d}W/\mathrm{d}t \tag{4}$$

再将式 (4)“协变”为 S' 系中带撇的单质点能量定律

$$(n'=1)\rightarrow \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}'=\mathrm{d}W'/\mathrm{d}t' \tag{4'}$$

对式 (4′) 加上带撇的非协变假设条件 P' 即得 S' 系中的单质点能量守恒定律

$$(n'=1,\ \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}'=0)\rightarrow \mathrm{d}W'/\mathrm{d}t'=0$$

参 考 文 献

1 朱如曾. 相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求. 大学物理. 2002. 21(4)

2 爱因斯坦 A. 相对论的意义. 北京：科学出版社，1961. 16

3 郭硕鸿. 电动力学. 北京：人民教育出版社，1979. 252~263

(上接第 80 页)

其中 $\boldsymbol{r}_{BA}$ 就是 B 车上的乘客所看到的 A 车的向径，把 $\boldsymbol{r}_{BA}$ 向动坐标系 Bx_By_B 投影有

$$\left.\begin{aligned} x&=(x_0-vt)\sin\omega t\\ y&=(x_0-vt)\cos\omega t-R\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在前面所给的参数下，可得方程 (2) 的轨迹为图 4.

可以发现：A 和 B 所看到的对方的相对运动方程和相对运动轨迹完全不同.

我们知道 $\boldsymbol{r}_{AB}=-\boldsymbol{r}_{BA}$，但为什么双方所看到的相对运动轨迹不同？这与矢量在不同坐标系中的分解有关. 在本问题中，如果时间再长一些，你能想象轨迹会如何变化吗？

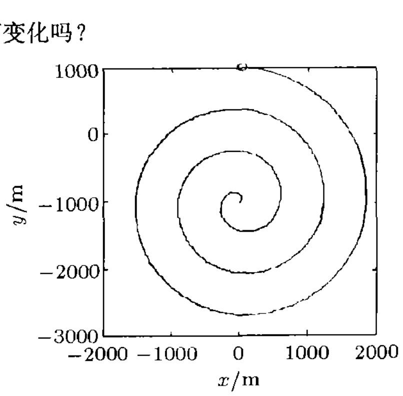

图 4