

# 迎风紧致格式与热流计算<sup>\*1)</sup>

朱庆勇

(中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275)

余怀忠 马延文

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

陶 亮

(中山大学物理系)

## AN UPWIND COMPACT SCHEME AND THE NUMERICAL SOLUTION OF HEAT TRANSFER PROBLEMS

Zhu Qingyong

(Faculty of Mathematics and Computing Sciences,  
Zhongshan University, Guangzhou, 510275 )

Yu Huaizhong Ma Yanwen

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Tao Liang

(Department of Physics, Zhongshan University)

### Abstract

The difference scheme for Navier-Stokes equations based on a third order upwind compact scheme<sup>[1]</sup> is considered. To investigate this scheme, the viscous Burgers' equation is used. For the inviscid portion of the Navier-Stokes equations the flux vectors are split by using Steger-Warming's flux vectors splitting technique<sup>[2]</sup>. The flux vectors are approximated by using upwind compact scheme. Second order accurate difference approximation is used for the viscous portion. Obtained difference scheme is used to solve the heat transfer problems.

**Key words:** upwind compact scheme, NS equations

### § 1. 引 言

众所周知, TVD 格式是能够高质量地捕捉激波的方法, 但在计算粘性绕流时许多 TVD 格式数值耗散太大, 不能正确模拟粘性流动, 因而无法正确计算热流值. 文献 [3] 指出, 采

\* 2000 年 3 月 27 日收到.

1) 中山大学青年教师基金资助.

用高精度格式可适当放松对网格雷诺数的要求, 因此发展三阶或三阶以上的格式是需要的. 文献 [4] 研究了迎风紧致速度控制格式 (UCGVC 格式) 在 Euler 方程中的应用, 提高了对激波的分辨率, 优于通常二阶精度 TVD 格式. 本文在文献 [4] 的基础上给出了利用迎风紧致格式求解 NS 方程. 它是 UCGVC 格式在粘性流计算中的推广. 对于方程中的无粘部分利用 Steger-Warming 的通量分裂技术将流通向量分裂成两部分, 在此基础上据风向构造逼近于无粘项的三阶迎风紧致格式. 对方程中的粘性部分采用通常的二阶中心差分格式. 本文利用对 Burgers 方程的特征分析, 研究了为正确模拟边界层内的流动特征对网格雷诺数的限制条件. 通过对超声速粘性球头绕流的数值模拟表明: 迎风紧致格式能在较大的网格雷诺数的条件下计算热流值, 结果是令人满意的.

## §2. 单个方程情形

考虑如下 Burgers 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

这里  $a = \text{const.} > 0$ ,  $\mu = \text{const.} > 0$ . 考虑定常情形,  $\partial u / \partial t = 0$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 0$ . 上述问题的理论解是

$$u(x) = (e^{Kx} - e^K) / (1 - e^K). \quad (2)$$

随着  $K = \frac{a}{\mu}$  的增加, 一个边界层在  $x = 1$  的附近发展起来. 将区间  $[0, 1]$   $N$  等分, 空间步长为  $h = 1/N$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ . 记  $v_j = v(x_j)$ , 定义如下差分算子:

$$\begin{aligned} \delta_x^0 v_j &:= (v_{j+1} - v_{j-1})/2, & \delta_x^2 v_j &:= v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}, \\ \delta_x^c v_j &:= \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon \delta_x^2}{I - 2\varepsilon \delta_x^0 + \frac{1}{6} \delta_x^2} v_j, \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $\delta_x^c$  是迎风紧致差分算子. 迎风紧致差分算子要求当  $a > 0$  时,  $\varepsilon > 0$ , 当  $a < 0$  时,  $\varepsilon < 0$ . Taylor 展开后不难发现当  $\varepsilon \neq 0$  时, 截断误差 T.E. =  $O(h^3)$ , 当  $\varepsilon = 0$  时, 截断误差 T.E. =  $O(h^4)$ . 对 (1) 式中的一阶导数项采用紧致差分算子  $\delta_x^c$  逼近, 二阶导数项采用通常的二阶逼近. 这样处理是为了在复杂流场模拟中简化计算, 另外这样做也是完全合理的, 因为通常的 TVD 格式之所以对边界层分辨率不高, 主要就是对无粘项的逼近时带入了较大的数值粘性, 从而掩盖了其真实的物理粘性, 因此, 要提高对边界层的分辨率, 主要是提高无粘项的逼近精度. 现在来讨论对应于 (1) 式定常情形的差分解, 相应的差分逼近式为

$$K \cdot \delta_x^c v_j / h = \delta_x^2 v_j / h^2, \quad j = 0, \dots, N, \quad (4)$$

这里  $v_j \approx u(x_j)$ . 由 (3), (4) 两式不难推出

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) v_{j+2} + \left[\frac{1}{3} + 2\varepsilon - \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) hK\right] v_{j+1} \\ & - (1 + 4\varepsilon hK) v_j + \left[\frac{1}{3} - 2\varepsilon + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right) hK\right] v_{j-1} + \left(\frac{1}{6} + \varepsilon\right) v_{j-2} = 0, \quad hK > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

上式的特征方程给出四个根:  $\lambda = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  满足的方程为

$$\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right)\lambda^3 + \left[\frac{1}{2}+\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)hK\right]\lambda^2 - \left[\frac{1}{2}-\varepsilon + \left(\frac{1}{2}+2\varepsilon\right)hK\right]\lambda - \left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right) = 0, \quad hK > 0. \quad (6)$$

当  $\varepsilon = 0$  时, (6) 式可写为

$$\frac{1}{6}\lambda^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}hK\right)\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}hK\right)\lambda - \frac{1}{6} = 0, \quad hK > 0. \quad (7)$$

这是一阶导数项取四阶中心紧致差分逼近时的特征方程, 相应的差分格式的数值解为

$$v_j = A + B\lambda_1^j + C\lambda_2^j + D\lambda_3^j, \quad (8)$$

这里  $A, B, C$  和  $D$  是常数.

**定理 1.** 方程 (7) 的三根是实根, 并且一根小于  $-1$ , 一根在  $(-1, 0)$  之间, 一根大于  $0$ .

**证明.** 令  $\lambda = 6\left(\mu - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}L\right)$ , 这里  $L = hK = \frac{ah}{\mu} > 0$  是网格雷诺数. 这样 (7) 式可改写为

$$\mu^3 + 3H\mu + G = 0, \quad (9)$$

这里

$$H = -\frac{1}{36}L^2 + \frac{1}{36}L - \frac{1}{18}, \quad G = -\frac{1}{108}L^3 + \frac{1}{72}L^2 - \frac{1}{36}L + \frac{1}{54}. \quad (10)$$

据 Tartaglia 条件<sup>[5]</sup>, 当  $G^2 + 4H^3 < 0$  时, 方程 (9) 的三根是实根. 由 (10) 式得  $G^2 + 4H^3 = -\frac{1}{216^2}(3L^4 + 12L^2 + 16) < 0$  恒成立. 这就是说, 无论  $L$  为何值, 方程 (9) 都有三个实根, 那么方程 (7) 也有三个实根. 不妨设三次实系数多项式  $f(\eta) = \frac{1}{6}\eta^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}L\right)\eta^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right)\eta - \frac{1}{6}$  的三个实根为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 并且  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ .

由  $f'(\eta) = 0$  得

$$\eta^2 + 2(1-L)\eta - (1+L) = 0. \quad (11)$$

两根为  $\eta_1 = -1 + L + \sqrt{2-L+L^2}$ ,  $\eta_2 = -1 + L - \sqrt{2-L+L^2}$ . 很明显  $\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$ , 由于存在关系  $\lambda_1 \leq \eta_2 \leq \lambda_2 \leq \eta_1 \leq \lambda_3$ , 这就是说存在一根  $\lambda_3 > 0$ .

对方程 (7) 的另外两根可作如下估计: 考虑两种情形.

a.  $-1 \leq \eta_2 < 0$ , 由  $f(\eta_2) > 0, f(0) = -\frac{1}{6} < 0$  可知, 存在一根在  $(\eta_2, 0)$  之间, 也在  $(-1, 0)$  之间. 当  $\eta < -1 \leq \eta_2$  时,  $f'(\eta) > 0$ , 考虑到  $f(-1) = \frac{2}{3} > 0, f(-\infty) < 0$ , 这说明存在一根  $< -1$ .

b.  $\eta_2 < -1$ , 由  $f(-1) = \frac{2}{3} > 0, f(0) = -\frac{1}{6} < 0$  可知, 存在一根在  $(-1, 0)$  之间. 由关系  $\lambda_1 \leq \eta_2 \leq \lambda_2 \leq \eta_1 \leq \lambda_3$  可知存在一根  $\lambda_1 < -1$ .

由此可见, 在方程 (7) 的三个实根中, 一根小于  $-1$ , 一根在  $(-1, 0)$  之间, 一根大于  $0$ . 证毕.

从定理 1 可以看出, 在一阶导数项取四阶中心紧致差分逼近的情形下, 当  $j$  逐渐向边界层接近时, 误差的幅值振荡地增大, 说明在边界层附近数值解存在振荡现象. 为了克服数值振荡, 采用迎风紧致差分格式逼近一阶导数项是必要的.

**定理 2.** 当  $\varepsilon = 1/6$  时, 在一阶导数项取三阶迎风紧致差分逼近的情形下, 网格雷诺数需小于 4.

证明. 这时的特征方程为

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}hK\right)\lambda^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}hK\right)\lambda - \frac{1}{3} = 0. \quad (12)$$

当  $hK = 4$  时,  $\lambda = -\frac{1}{11}$ , 数值解不符合要求. 当  $hK \neq 4$  时, 不难得到它的两根分别为

$$\lambda_1 = \frac{2 + 5hK + \sqrt{25(hK)^2 + 12hK + 36}}{2(4 - hK)}, \quad (13)$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + 5hK - \sqrt{25(hK)^2 + 12hK + 36}}{2(4 - hK)}. \quad (14)$$

考虑两种情况: 1.  $hK > 4$ . 2.  $0 < hK < 4$ . 对于第一种情况,  $\lambda_1, \lambda_2$  均小于 0, 数值解也是不符合要求的. 对于第二种情况, 由于  $-1 < \lambda_2 < 0, 0 < hK < 4$ , 当  $j$  逐渐向边界层接近时, 误差的幅值振荡地减小, 在边界  $x = 0$  处误差为 0 的情形下, 它对边界层附近数值解没有影响, 另外  $\lambda_1 > 1$ . 原定常 Burgers 问题数值解为

$$v_j = \frac{\lambda_1^N}{\lambda_1^N - 1} - \frac{1}{\lambda_1^N - 1} \lambda_1^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N,$$

原定常 Burgers 方程准确解是

$$u(x) = \frac{e^K}{e^K - 1} - \frac{1}{e^K - 1} e^{Kx}.$$

根据  $\lambda_1(hK)$  与  $\exp(hK)$  的逼近程度可大致估计  $hK$  的范围, 如果要求

$$\frac{|\lambda_1(hK) - \exp(hK)|}{\exp(hK)} \leq 0.185,$$

这时  $hK$  应大致  $\leq 3.36$ . 若降低要求, 可进一步放松对网格雷诺数  $hK$  的限制, 但  $hK$  需满足  $0 < hK < 4$ . 证毕.

需要指出的是, 以上分析是在线性化假设的前提下进行的, 对 NS 方程中的网格雷诺数的确定需在此基础上通过数值试验来得到.

### §3. 可压缩 NS 方程的数值方法

#### 3.1. 控制方程

在柱坐标  $(x, r, \theta)$  下, 完全气体轴对称流动的无量纲化方程可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r} + G = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial r} + G_v \right), \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned}
 U &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T, & E &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho u H)^T \\
 F &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho v H)^T, & G &= \frac{1}{r}(\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho v H)^T \\
 E_v &= \left(0, \tau_{xx}, \tau_{xr}, \tau_{xx}u + \tau_{xr}v + \frac{k}{\text{Pr}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial x}\right)^T \\
 F_v &= \left(0, \tau_{xr}, \tau_{rr}, \tau_{xr}u + \tau_{rr}v + \frac{k}{\text{Pr}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial r}\right)^T \\
 G_v &= \frac{1}{r}(0, \tau_{xr}, \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}, \hat{T}_4)^T
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
 e &= \rho \left[ \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right], & H &= \frac{e}{\rho} + \frac{p}{\rho}, \\
 \tau_{xx} &= -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{rr} &= -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r}, \\
 \tau_{xr} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right), \\
 \hat{T}_4 &= \tau_{xr}u + \tau_{rr}v + \frac{k}{\text{Pr}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial r}, & \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}, \\
 Re &= \frac{\rho_\infty U_\infty R_N}{\mu_\infty}, & Pr &= \frac{\mu C_p}{k}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

以上无量纲化参数意义:  $t$  是时间,  $\rho$  为密度,  $p$  为压力,  $u, v$  为对应于坐标  $x, r$  的速度分量. 这里  $\rho$  相对于来流密度  $\rho_\infty$ ,  $u, v$  相对于来流速度  $U_\infty$ , 坐标  $x, r$  相对于头部半径  $R_N$ , 时间  $t$  相对于  $\frac{R_N}{U_\infty}$ , 粘性系数  $\mu$  和传热系数  $k$  相对于各自的来流值,  $p, e$  相对于  $\rho_\infty U_\infty^2, T$  相对于  $\frac{U_\infty^2}{R_\infty}$ ,  $R_\infty$  是来流气体常数. 这样完全气体状态方程为  $p = \rho T$ . 动力粘性系数  $\mu$  用 Sutherland 公式给出  $\mu = (\gamma M_\infty^2 T)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1 + C}{\gamma M_\infty^2 T + C} \right)$ , 其中, 对于空气,  $C = 110.4/T_\infty^*$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $\gamma = 1.4$ . 在一般的坐标系  $(\xi, \eta)$  中, 有

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \tilde{G} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \eta} + \tilde{G}_v \right), \tag{18}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \tilde{U} &= JU, & \tilde{E} &= J(\xi_t U + \xi_x E + \xi_r F), & \tilde{F} &= J(\eta_t U + \eta_x E + \eta_r F), \\
 \tilde{G} &= JG, & \tilde{E}_v &= J(\xi_x E_v + \xi_r F_v), & \tilde{F}_v &= J(\eta_x E_v + \eta_r F_v), & \tilde{G}_v &= JG_v.
 \end{aligned} \tag{19}$$

网格变换导数为

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\partial(x, r)}{\partial(\xi, \eta)}, & \xi_x &= \frac{1}{J} \frac{\partial r}{\partial \eta}, & \xi_r &= -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \\
 \eta_x &= -\frac{1}{J} \frac{\partial r}{\partial \xi}, & \eta_r &= \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \xi_t &= \frac{1}{J}(x_\eta r_\tau - r_\eta x_\tau), & \eta_t &= \frac{1}{J}(x_\tau r_\xi - r_\tau x_\xi).
 \end{aligned} \tag{20}$$

### 3.2. 差分格式

对 NS 方程采用隐式差分格式, 令  $\Delta\tilde{U} = \tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n, \tilde{A} = \frac{\partial\tilde{E}}{\partial\tilde{U}}, \tilde{B} = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{U}}$ , 有

$$\left[ I + \frac{\Delta\tau}{2}(\partial_\xi\tilde{A} + \partial_\eta\tilde{B}) \right] \Delta\tilde{U} = RHS. \quad (21)$$

差分格式 (21) 中左端隐式部分采用特殊矩阵分裂法构造差分格式<sup>[6]</sup>. 对  $\tilde{A}, \tilde{B}$  作如下分裂:

$$\begin{cases} \lambda(\tilde{A}^-) = V_\xi - a_\xi, \tilde{A}^- = \lambda(\tilde{A}^-)I, \tilde{A}^+ = \tilde{A} - \tilde{A}^-, \\ \lambda(\tilde{B}^-) = V_\eta - a_\eta, \tilde{B}^- = \lambda(\tilde{B}^-)I, \tilde{B}^+ = \tilde{B} - \tilde{B}^-, \\ \lambda(\tilde{A}^-) = 0, \text{ if } (V_\xi - a_\xi) > 0. \end{cases} \quad (22)$$

对正特征值矩阵项采用向后差分, 负特征值矩阵项采用向前差分. 利用近似因式分解得到差分格式为

$$\begin{cases} (I + f\delta_\xi^+\tilde{A}^- + g\delta_\eta^+\tilde{B}^-)\delta\tilde{U}^{n+\frac{1}{2}} = RHS, \\ (I + f\delta_\xi^-\tilde{A}^+ + g\delta_\eta^-\tilde{B}^+)\delta\tilde{U}^{n+1} = \delta\tilde{Q}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (23)$$

其中  $f = \Delta\tau/2\Delta\xi, g = \Delta\tau/2\Delta\eta$ ,  $\delta_\xi^+$  是  $\xi$  方向的前差算子,  $\delta_\xi^-$  是  $\xi$  方向的后差算子.  $\delta_\eta^+, \delta_\eta^-$  与之类似. 差分格式 (23) 的右端项为

$$\begin{aligned} RHS = & \frac{\delta_\xi^c\tilde{E}_{ij}^{+n}}{\Delta\xi} + \frac{\delta_\xi^c\tilde{E}_{ij}^{-n}}{\Delta\xi} + \frac{\delta_\eta^c\tilde{F}_{ij}^{+n}}{\Delta\eta} + \frac{\delta_\eta^c\tilde{F}_{ij}^{-n}}{\Delta\eta} + \tilde{G}_{ij}^n - \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{2\Delta\xi} [(\tilde{E}_v)_{i+1,j} - (\tilde{E}_v)_{i-1,j}] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta\eta} [(\tilde{F}_v)_{i,j+1} - (\tilde{F}_v)_{i,j-1}] + (\tilde{G}_v)_{ij} \right\}^n + GVC^n, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $GVC^n$  是  $n$  时间层的群速度控制项, 以克服流场中激波附近伪振荡, 详见文 [4].

采用三阶迎风紧致格式逼近右端无粘通量:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\delta_\xi^c\tilde{E}_{i,j}^+ + \frac{1}{3}\delta_\xi^c\tilde{E}_{i-1,j}^+ = \frac{1}{6}\tilde{E}_{i+1,j}^+ + \frac{2}{3}\tilde{E}_{i,j}^+ - \frac{5}{6}\tilde{E}_{i-1,j}^+, \\ \frac{1}{3}\delta_\xi^c\tilde{E}_{i+1,j}^- + \frac{2}{3}\delta_\xi^c\tilde{E}_{i,j}^- = \frac{5}{6}\tilde{E}_{i+1,j}^- - \frac{2}{3}\tilde{E}_{i,j}^- - \frac{1}{6}\tilde{E}_{i-1,j}^-, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\delta_\eta^c\tilde{F}_{i,j}^+ + \frac{1}{3}\delta_\eta^c\tilde{F}_{i,j-1}^+ = \frac{1}{6}\tilde{F}_{i,j+1}^+ + \frac{2}{3}\tilde{F}_{i,j}^+ - \frac{5}{6}\tilde{F}_{i,j-1}^+, \\ \frac{1}{3}\delta_\eta^c\tilde{F}_{i,j+1}^- + \frac{2}{3}\delta_\eta^c\tilde{F}_{i,j}^- = \frac{5}{6}\tilde{F}_{i,j+1}^- - \frac{2}{3}\tilde{F}_{i,j}^- - \frac{1}{6}\tilde{F}_{i,j-1}^-, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, J-1. \quad (26)$$

计算中采用了 Steger-Warming 方法对无粘通量进行分裂.

$$\begin{aligned} \tilde{E}^\pm &= \tilde{A}^\pm\tilde{U}, \tilde{A}^\pm = R_\xi\Lambda_\xi^\pm R_\xi^{-1}, \\ \tilde{F}^\pm &= \tilde{B}^\pm\tilde{U}, \tilde{B}^\pm = R_\eta\Lambda_\eta^\pm R_\eta^{-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

这里  $\delta_\xi^c, \delta_\eta^c$  分别是  $\xi, \eta$  方向的迎风紧致算子. 通过正负两个方向扫描即可求得  $\delta_\xi^c\tilde{E}_{i,j}^\pm, \delta_\eta^c\tilde{F}_{i,j}^\pm$ . 对方程中的粘性部分采用通常的二阶中心差分格式. 边界上采用二阶偏斜格式.

### 3.3. 数值边界条件

轴线 ( $i = 0$ ) 上满足  $\frac{\partial q}{\partial r} = 0$  ( $q$  为  $p, u$  或  $\rho$ ) 的条件, 以二阶偏心格式离散后即可得  $3q|_{i=0} - 4q|_{i=1} + q|_{i=2} = 0$ , 因而  $q|_{i=0} = \frac{4}{3}q|_{i=1} - \frac{1}{3}q|_{i=2}$ , 这里  $v|_{i=0} = 0$ . 物面采用速度无滑移及恒温壁条件, 物面压力  $p$  由物面法向动量方程在物面上的蜕化形式求出  $\partial p / \partial n = 0$ . 外边界采用自由来流条件. 出口流场参数采用一阶外推.

### 3.4. 计算结果及分析

例 1. 这里分别计算了采用迎风紧致格式在不同网格雷诺数下的驻点热流值, 并与 Fay-Riddell 估算值<sup>[7]</sup>进行了比较, 证实了前面的结论. 在本文的球头绕流计算中, 计算条件为  $M_\infty = 7.0, Re_\infty = 1.48 \times 10^5, T_\infty = 67K, T_w = 300K$ , 网格点为  $19 \times 31$ . 其中  $Re_\infty, M_\infty$  为来流的雷诺数和马赫数,  $Q_0$  是驻点热流值. 表 1 给出了采用迎风紧致格式求解 NS 方程给出的球头驻点热流值与文献 [7] 中估算值的比较.

表 1

方法	网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$	计算值 $Q_0$	Fay-Riddell[7] $Q_0$
迎风紧致格式	9.56	$3.58 \times 10^{-3}$	$3.83 \times 10^{-3}$
迎风紧致格式	4.58	$3.80 \times 10^{-3}$	$3.83 \times 10^{-3}$
耗散比拟法	9.56	$2.20 \times 10^{-3}$	$3.83 \times 10^{-3}$
耗散比拟法	4.58	$3.15 \times 10^{-3}$	$3.83 \times 10^{-3}$

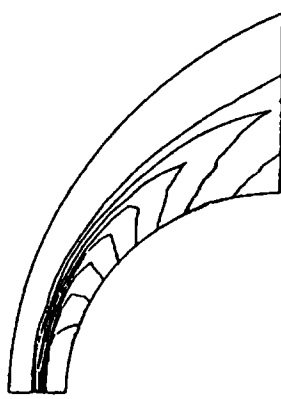
从表 1 可以明显看出采用迎风紧致格式能在较大的网格雷诺数下较好地计算驻点热流值, 这当然是迎风紧致格式的数值粘性较耗散比拟法小带来的改进.

例 2. 考虑  $M_\infty = 8.03, T_\infty = 220^\circ R, T_w = 530^\circ R$ , 网格点为  $19 \times 31$ .

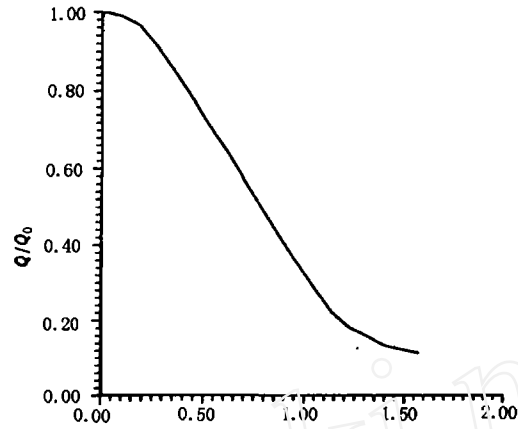
表 2

方法	网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$	热流值 $Q_0 Btu/ft^2 sec$	压力值 $p_0/p_\infty$
TVD[8]	49.6	18.34	83.44
TVD[8]	9.8	41.15	83.45
TVD[8]	1.63	61.42	83.43
迎风紧致格式	9.56	54.62	83.42
迎风紧致格式	4.58	60.29	83.56
实验值 [9]		61.7 - 63.5	83.52 - 84.44

从表 2 可以发现采用迎风紧致格式能在较大的网格雷诺数下较好地计算驻点热流值. 这与前面的分析结果是一致的. TVD 格式在较大网格雷诺数条件下不能较好地计算热流值, 这无疑是 TVD 格式数值耗散过大的原因造成的. 这里补充说明:  $Btu$  是英国热单位,  $1Btu = 252$  卡,  $^\circ R$  是列氏温标, 在标准状态下, 水的冰点是  $0^\circ R$ , 沸点是  $80^\circ R$ ,  $ft$  是英尺单位.



压力等值线



壁面热流分布

#### §4. 结 论

本文基于迎风紧致格式求解了球头粘性绕流. 数值实验表明, 该格式对流场中的边界层有较高的分辨率. 由于格式本身的数值耗散较二阶格式小, 在对热流的计算中, 结果是令人满意的.

#### 参 考 文 献

- [1] Fu Dexun, Ma Yanwen, A High Order Accurate Finite Difference Scheme for Complex Flow Fields. J. of Comput. Phys., 134(1997), 1-15.
- [2] J.L. Steger, R.F. Warming, Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods, J. of Comput. Phys., 40(1981), 263-293.
- [3] Fu Dexun, Ma Yanwen, Computational Fluid Dynamics Review, 1995, by Hefez M. And Oshima K.
- [4] 朱庆勇, 马延文, 求解双曲型守恒律方程的高精度迎风紧致群速度控制法, 计算物理, 15 :5 (1998), 531-536.
- [5] C.V. Durell, A. Robson, Advanced Algebra, Vol. II, III, Bell, London, (1937).
- [6] 郭文海, 马延文, 傅德薰, 一个求解 Euler 方程的特殊矩阵分裂格式, 计算数学, 15 :2(1993), 225-234.
- [7] Fay J.A., Riddell R.F., Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air, J. of Aeronautical Sciences, 25(1958), 73-85.
- [8] G.H. Klopfer, H.C. Yee, Viscous Hypersonic Shock-on-Shock Interaction on Blunt Cowl Lips, AIAA 88-0233.
- [9] Wieting, A.R. Holden, M.S., Experimental Study of Shock Wave Interference Heating on a Cylindrical Leading Edge at Mach 6 and 8. AIAA, Paper 87-1511(1987).