

用子波变换研究壁湍流 Lipschitz 奇异性指数*

姜楠 王振东 舒玮

(蔡树棠推荐,1997 年 1 月 31 日收到,1998 年 3 月 6 日收到修改稿)

摘 要

本文用子波变换研究了描述壁湍流脉动速度局部奇异性行为的 Lipschitz 奇异性指数,发现在湍流边界层中,猝发和扫掠发生时脉动速度信号的 Lipschitz 局部奇异性指数为负值.

关键词 子波变换 相干结构 Lipschitz 局部奇异性指数

中图分类号 O357

§1. 引 言

湍流边界层中近壁相干结构一直是许多研究的热点问题.毫无疑问,相干结构已经成为壁剪切湍流中的主要结构.它们在湍能的产生、耗散和输运中起重要作用.目前研究的困难之一就是如何从物理或数值实验中定量地测量相干结构,目的是提取出相干结构,研究相干结构在近壁湍流中的动力学特征.

子波变换^[1]是依据群论和平方可积理论新近发展起来的一种数学方法,通过信号与一个被称为子波的解析函数进行卷积,将信号在时域空间与频域空间同时分解开来.其中子波函数是由子波母函数经过平移和伸缩得到,它是具有有限支集的时间窗函数,这说明信号在距离时间窗中心较远处的行为不起作用,因而对信号的分析在时间域的局部进行.而傅立叶分析由于三角函数在时域空间是无限延伸的,因而是先天地非局域化的.另一方面,由于子波函数的时间窗宽度可以膨胀和缩小,使得子波变换对信号进行频率分析相当于一个相对分辨率为常数的滤波器.因而在频域空间也是一种局部化方法.因此,子波变换是一种时频双局部化方法.

子波变换能够作为一种新的工具辨识平板湍流边界层中出现的相干结构,代替通常所用的条件采样方法.姜楠(1997)^[2]用子波变换的方法对用热膜测速仪得到的湍流边界层流向脉动速度信号在时域空间和频域空间同时进行分解,根据子波系数研究了湍流边界层脉动能随尺度的分布,提出了确定湍流边界层相干结构的时间尺度的能量最大准则,提取了平板湍

* 国家自然科学基金资助项目(19672040)

天津大学力学系,天津 300072;中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室,北京 100080

流边界层相干结构的速度信号波形,发现相干结构的内尺度无量纲平均猝发周期约为 $t^+ = 1138$, $t^+ = tu^2/\nu$, 与实验测量结果符合得较好.

本文将用子波变换得到的壁湍流信号 Lipschitz 奇异性指数^[3]作为定量研究相干结构强度的一个物理量,发现当相干结构发生喷射和扫掠时,湍流边界层近壁区域脉动速度信号的 Lipschitz 奇异性指数为负值,这与 Kolmogorov 的理论^[4]相矛盾.根据 Kolmogorov 的理论^[4],湍流脉动速度信号的 Lipschitz 局部指数为 $1/3$, $v(t, t) = v(t + \tau) - v(t) \sim \tau^{1/3}$,从而得到了著名的 $-5/3$ 理论 $E(k) \sim k^{-5/3}$. 而负的指数以前是未曾见诸报道的,它对应着具有强局部梯度的动力学事件.在平板湍流边界层的近壁区域中,这种事件是相干结构间歇地经过探针附近的区域,这说明在相干结构发生喷射和扫掠的时刻,脉动速度信号具有局部强脉冲现象,它们对壁湍流的动量输运具有重要作用.

§2. 子波变换和 Lipschitz 局部奇异性指数

2.1 子波变换和湍流中的湍涡

子波变换是一种最近发展起来的新的数学方法,它将信号分解为称为子波的基本结构.通过信号与一个被称为子波的解析函数进行卷积将信号分解开来.对于一维情形,将信号在时域空间与频域空间进行二维展开.子波函数由子波母函数经过平移和伸缩得到.

定义 1 如果 $W(t) \in L^2(R)$ 满足容许性条件:

$$C_W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|W(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.1)$$

其中 $W(\omega)$ 是 $W(t) \in L^2(R)$ 的傅立叶变换.那么 $W(t) \in L^2(R)$ 被称为基本子波.

对于每一个基本子波 $W(t) \in L^2(R)$,子波函数族 $W_{ab}(t)$ 是由 $W(t) \in L^2(R)$ 经过平移(参数 b)和伸缩(参数 a)变换而来:

$$W_{ab}(t) = \frac{1}{a} W\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{me} \quad (2.2)$$

其中 $a, b \in R, a > 0$.

一维信号 $s(t) \in L^2(R)$ 在子波函数 $W_{ab}(t)$ 下的子波变换 $W_s(a, b)$ 定义为:

$$W_s(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{W_{ab}(t)} dt \quad (2.3)$$

注意:如果 $W(t) \in L^2(R)$ 和 $W(\omega)$ 满足

$$tW(t) \in L^2(R), \quad W(\omega) \in L^2(R)$$

则基本子波 $W(t) \in L^2(R)$ 是有限时间窗函数, $W(\omega)$ 是连续函数, C_W 有限表明:

$$W(0) = 0 \quad (2.4)$$

或者,等价地:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t) dt = 0 \quad (2.5)$$

这表明子波函数的平均值为零.又称子波函数具有零阶消失矩.子波函数必须至少具有零阶消失矩,一个子波函数被称为具有 n 阶消失矩,当且仅当对于非负整数 $0 \leq k < n$, $W(t) \in L^2(R)$ 满足

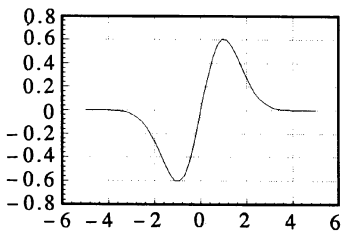
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k W(t) dt = 0 \quad (2.6)$$

(2.6) 亦称子波具有 n 阶消去性 .

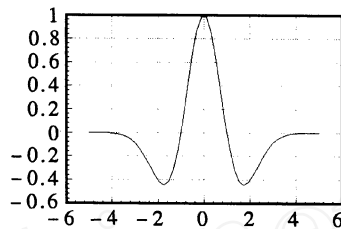
$W_{ab}(t)$ 也是零均值的 . 这说明如果 $s(t) \in L^2(R)$ 在确定的位置 b 附近尺度 a 的范围内没有变化 (也就是说, 在 $W_{ab}(t)$ 的有限支集内, $s(t)$ 近似于常数) 其子波系数 $W_s(a, b)$ 为零 . 反之, 如果 $s(t)$ 在确定的位置 b 附近尺度 a 的范围内显著变化, 相应的子波系数 $W_s(a, b)$ 很大 . 因此子波变换被称为数学显微镜, 其焦点位置为 b , 放大倍数为 a , 其光学性质取决于对基本子波 $W(t)$ 的选择 . 图 1 是 Gauss 基本子波和 Marr 基本子波的图形 . 其解析表达式分别为 :

$$W(t) = te^{-t^2/2} \tag{2.7a}$$

$$W(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2} \tag{2.7b}$$



(a) Gauss 基本子波函数



(b) Marr 基本子波函数

图 1

等式(2.3)表明子波系数 $W_s(a, b)$ 正比于 $s(t)$ 和 $W_{ab}(t)$ 的互相关 . 对于湍流来说, 子波函数 $W_{ab}(t)$ 具有特定的物理意义 . 湍涡是构成湍流的最基本单元, 而子波分解恰好将湍流分解为湍涡这样的基本结构 . 可以说, 湍涡就是湍流中的特定子波 . 湍涡在谱空间具有一定的带宽, 在物理空间具有局部的贡献 . 将一个信号 $s(t)$ 进行子波分析就相当于将该信号与子波 $W(t/a)$ 在位置 b 处进行局部互相关分析, 大的子波系数 $W_s(a, b)$ 表示信号 $s(t)$ 和 $W_{ab}(t)$ 具有很强的相关, 说明在位置 $t = b$ 有一个尺度为 a 的湍涡结构经过测量探头 . 通过 (a, b) 平面上的子波系数, 将湍流分解为一个一个在不同位置具有不同尺度的湍涡结构 .

相干结构是壁湍流中重要的大尺度湍涡结构, 它在空间和时间上都是局部化的, 这种强烈的间歇性和非均匀性使得子波变换能够代替傅立叶变换对湍流信号进行分解 .

2.2 李普希兹局部奇异性指数

定义 2 设 n 为非负整数, $n < n + 1$, 称信号 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点具有 Lipschitz 指数 (t_0) , 当且仅当存在两个常数 C 及 $\epsilon > 0$, 使得当 $0 < |t - t_0| < \epsilon$ 时, 恒有

$$s(t) = s(t_0) + (t - t_0)s'(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^n s^{(n)}(t_0)}{n!} + C|t - t_0|^{(t_0)} + o(|t - t_0|^{(t_0)}) \tag{2.8}$$

称 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点是奇异的当且仅当 $(t_0) < 1$

$$s(t) = s(t_0) + C|t - t_0|^{(t_0)} + o(|t - t_0|^{(t_0)}) \tag{2.9}$$

根据定义 2, 如果信号 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点是连续可微的, 则其 Lipschitz 指数 $(t_0) = 1$; 如果 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点的导数有界但不连续, 仍有其 Lipschitz 指数 $(t_0) = 1$. Lipschitz 指数能够比导数更精确描述信号的光滑性 . 如果 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点具有 Lipschitz 指数 $n < n + 1$

1, 则 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点是 n 次可微的. 但是它的第 n 阶导数在这点是奇异的. $n < 1$, 而且刻画了这种奇异性.

具有零阶消失矩的子波能够检测 $(t_0) < 1$ 的 Lipschitz 局部奇异性指数. 可以证明, 如果信号 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点的 Lipschitz 指数 $(t_0) < 1$, 则当 $0 < \max(a, a) < \sqrt{(t^* + t)}$ 时, $s(t)$ 的子波变换满足

$$W_s(a, t_0) = (t_0) W_s(a, t_0) \tag{2.10}$$

因此, 信号 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点的李普希兹局部奇异性指数 (t_0) 满足:

$$(t_0) = \frac{\log |W_s(a, t_0)/W_s(a, t_0)|}{\log | | } \tag{2.11}$$

事实上,

$$\begin{aligned} W_s(a, t_0) &= \frac{1}{a} \int_{t=at_0}^{t=at_0+a} s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt \quad \text{特定} \\ &= \int_{x=0}^1 s(at_0+x) W(x) dx \\ &= \int_{x=0}^1 s(t_0) W(-x) dx = 0 \\ W_s(a, t_0) &= \int_{x=0}^1 [s(at_0+x) - s(t_0)] W(x) dx \\ &= \int_{x=0}^1 C |ax|^{(t_0)} W(x) dx \\ &= (t_0) \int_{x=0}^1 C |ax|^{(t_0)} W(x) dx \\ &= (t_0) \int_{x=0}^1 [s(at_0+x) - s(t_0)] W(x) dx \\ &= (t_0) \int_{x=0}^1 s(at_0+x) W(x) dx \\ &= (t_0) \int_{x=0}^1 s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) \frac{1}{a} dt \\ &= (t_0) W_s(a, t_0) \end{aligned}$$

如果 $s(t)$ 在 $t = t_0$ 点具有 Lipschitz 指数 (t_0) , 则其原函数具有 Lipschitz 指数 $(t_0) + 1$. 因此, 可以将 Lipschitz 指数推广到负数的情形. 如果 $s(t)$ 的原函数具有 Lipschitz 局部奇异性指数 $+1 < 1$, 那么 $s(t)$ 具有负的 Lipschitz 局部奇异性指数 < 0 . 例如, 在 $t = t_0$ 点连续的分段线性函数, 其一阶导数在 $t = t_0$ 点附近为阶梯函数, 在 $t = t_0$ 点间断; 其二阶导数为 Dirac 函数 $(t - t_0)$. 可以证明, Dirac 函数 $(t - t_0)$ 在 $t = t_0$ 点的 Lipschitz 指数 $(t_0) = -1$; 在 $t = t_0$ 点间断的阶梯函数在 $t = t_0$ 点的 Lipschitz 指数 $(t_0) = 0$.

事实上, 设阶梯函数

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ -1, & t \leq t_0 \end{cases}$$

那么, 对于 Gauss 基本子波有

$$\frac{1}{a} \int_{t_0}^{t_0+a} \left(\text{或} - \int_{t_0}^{t_0+a} W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt \right) + \int_{t_0}^{t_0} W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt = 0 \quad \text{和迭 C2}$$

从而有：

事

$$\begin{aligned}
 W_s(a, t_0) &= \frac{1}{a} \int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt \\
 &= \frac{1}{a} \left[\int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt + \int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{a} \left[\int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt + \int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{a} \int_{t_0}^+ s(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt = W_s(a, t_0) = 0 \\
 (t_0) &= 0
 \end{aligned}$$

从而 Dirac 函数 $\delta(t - t_0)$ 在 $t = t_0$ 点的 Lipschitz 指数 $\alpha(t_0) = -1$.

利用 Marr 基本子波, 根据 $W(0) = 1$, 可以直接证明 Dirac 函数 $\delta(t - t_0)$ 在 $t = t_0$ 点的 Lipschitz 指数 $\alpha(t_0) = -1$. Dirac 函数 $\delta(t - t_0)$ 满足

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^+ \delta(t) dt &= 1 \\
 \delta(t) &= \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ +\infty, & t = t_0 \end{cases} \\
 W(a, t_0) &= \frac{1}{a} \int_{t_0}^+ \delta(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt = \frac{1}{a} W\left(\frac{t_0-t_0}{a}\right) \\
 &= \frac{1}{a} W(0) = \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \int_{t_0}^+ \delta(t) W\left(\frac{t-t_0}{a}\right) dt = \frac{1}{a} W(a, t_0) \\
 (t_0) &= -1
 \end{aligned}$$

§3. 用子波变换检测壁湍流 Lipschitz 局部奇异性指数

信号中的瞬时现象或奇异结构往往包含着重要的信息, 在物理上, 研究这些奇异的结构对于理解未知的物理性质具有重要的作用. 这其中的一个重要例子就是壁湍流中的大尺度相干

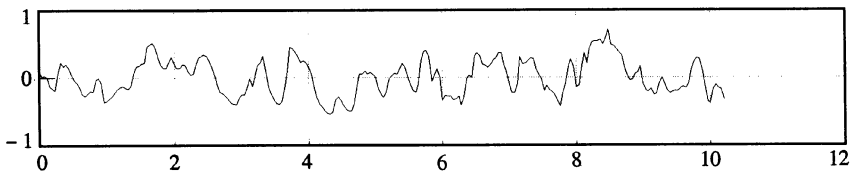


图2 壁湍流流向脉动速度信号 ($y^+ = 32$)

结构. 对于这种结构, 目前还不完全了解其物理机理, 这促使我们去从湍流脉动信号中检测和提取相干结构. 傅立叶变换可以从整体上描述信号的正则性, 但是它不能发现信号中局部的奇异点, 子波变换能够将信号在时域空间和频域空间进行局部化分解, 能够描述壁湍流中局部

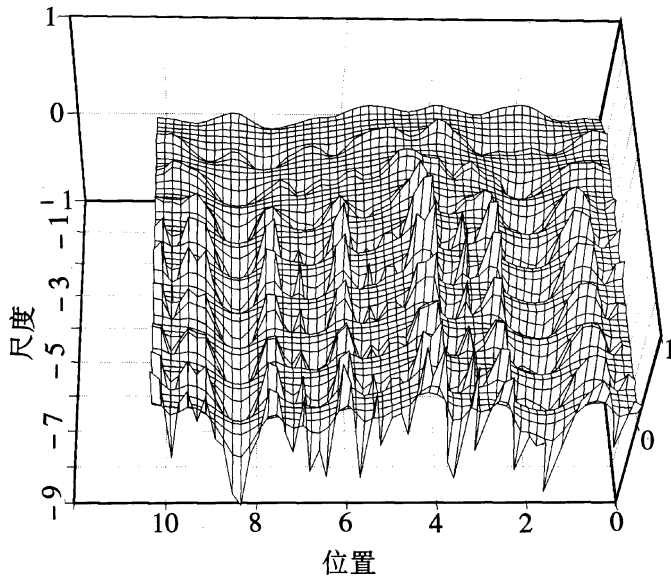


图3 脉动速度信号的子波变换

的奇异性相干结构。这使得我们能够通过湍流脉动信号的子波变换定义李普希兹局部奇异性指数来定量地研究相干结构的强度。

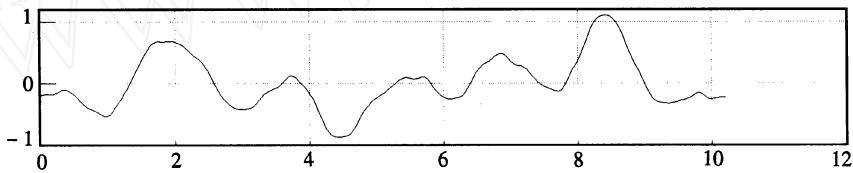


图4 相干结构流向速度信号波形

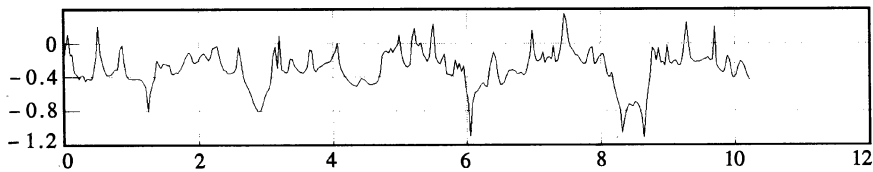


图5 壁湍流向脉动速度的Lipschitz局部奇异性指数

实验在矩形横截面的开口循环式水槽中进行,一块长1.3m,宽14cm的有机玻璃平板放置在水槽实验段底部来产生零压力梯度的平板湍流边界层。用TSI1051-2D型测速仪和1210-20W型热膜探针测量流向速度分量。图2为测量得到的流向脉动速度信号,对壁湍流向脉动速度信号 $u(t)$ 利用公式(2.3)进行子波变换,得到其子波系数 $W_u(a, b)$ 如图3所示。图4为子波变换的能量最大准则^[2]得到的相干结构对应的速度信号波形,图5为根据公式

(2. 10) 计算得到的信号在每一时刻的 Lipschitz 局部奇异性指数. 从图 4 和图 5 中可以看到, 在相干结构发生喷射和扫掠的时刻, (子波系数为正的峰值和负的峰值的时刻), 信号的 Lipschitz 局部奇异性指数为负值. 这说明在相干结构发生喷射和扫掠的时刻, 脉动速度信号发生强脉冲现象, 其幅值具有增长很快的趋势.

§4. 主要结论

湍流信号的 Lipschitz 指数是描述湍流结构特征的一个物理量. 对壁湍流流向脉动速度信号进行子波分析, 利用子波系数检测其局部标度指数表明, 发现湍流边界层与均匀各向同性湍流的结构具有本质的不同, 根据 Kolmogorov 的 $-5/3$ 理论, 均匀各向同性湍流脉动速度信号的 Lipschitz 指数为 $1/3$; 在具有高剪切特性而且各向异性的湍流边界层中, 在喷射和扫掠的发生时刻, 脉动速度信号的 Lipschitz 局部奇异性指数为负值, 这说明在相干结构发生喷射和扫掠的时刻, 脉动速度信号具有局部强脉冲现象, 在短时间内其幅值具有增长很快的趋势. 因此, Lipschitz 局部奇异性指数可以作为描述壁湍流相干结构的特征量之一.

参 考 文 献

- 1 M. Farge, Wavelet transforms and their applications to turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24** (1992), 395—457.
- 2 姜楠、舒玮、王振东, 子波分析辨识壁湍流猝发事件的能量最大准则, *力学学报*, **29**(3) (1997), 406—412.
- 3 S. Mallat and Wen Liang Hwang, Singularity detection and processing with wavelet, *IEEE Transaction on Information Theory*, **38**(2) (1992), 617—643.
- 4 E. Bacry, A. Arneodo, U. Frisch, Y. Gagne and E. Hopfinger, Wavelet analysis of fully developed turbulence data and measurement of scaling exponents, in *Turbulence and Coherent Structure*, Eds. by M. Lesieur and O. Metais, Kluwer Academic Publishers, New York (1990).

Using Wavelet Transform to Study the Lipschitz Local Singular Exponent in Wall Turbulence

Jiang Nan Wang Zhendong Shu Wei

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072; Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract

In this paper, wavelet transform is introduced to study the Lipschitz local singular exponent for characterizing the local singularity behavior of fluctuating velocity in wall turbulence. It is found that the local singular exponent is negative when the ejections and sweeps of coherent structures occur in a turbulent boundary layer.

Key words wavelet transform, coherent structure, Lipschitz local singular exponent