

# 有初挠度简支矩形板的后屈曲特性<sup>\*</sup>

## POSTBUCKLING BEHAVIOR OF SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR PLATE WITH INITIAL DEFLECTION

曾晓辉\*\* 柳春图 冯 玮

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

ZENG Xiaohui LIU Chuntu FENG Wei

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**摘要** 船体外壳基本上是由加筋板构成的,这种结构可能由于受面内压力作用而屈曲。为充分利用板的承载能力,减轻结构重量,有时将板设计得比较薄,使其工作于后屈曲状态。对大量的加筋板进行非线性有限元计算是一件非常费时的工作,在船体的初步设计阶段这样做很不经济。为此需先分析板的后屈曲特性,然后把板按某一折减宽度计入到加筋的剖面中去,再对加筋板进行整体屈曲分析。这就需要得到对任意边长比和初挠度均适用的应力和应变之间的显式关系,而目前尚缺乏这方面的研究。

有鉴于此,应用 von Kármán 大挠度薄板方程,对承受单向面内压力、四边简支的有初挠度矩形板进行后屈曲特性分析(其中挠曲函数取为双傅氏级数展开式的前三项)。首先对边长比小于等于  $\sqrt{2}$  的板进行分析(初挠度根据已有的大量实测结果取为双傅氏级数的一项)。将有关变量化为无量纲量,以无量纲载荷作为小参数,用参数摄动法求解非线性代数方程组,得到受压边最大应力与平均压应力之间、平均压应力与平均应变之间的显式函数式。分析了不同边长比和初挠度对矩形板后屈曲特性的影响,结果表明初挠度的存在会明显降低板的面内刚度。继而将这些结论推广应用到边长比大于  $\sqrt{2}$  的情况。

**关键词** 有初挠度矩形板 后屈曲 von Kármán 方程 参数摄动法

**中图分类号** O343.9 U661.4

**Abstract** The outer shell of ship hull is basically made up of stiffened plates. Such type of structure may buckle due to in-plane compression. For the sake of utilizing the carrying capacity of plates to the utmost and lightening the structure, engineers want the thickness of plate to be as small as possible. Therefore, the plate may be in the state of postbuckling. It is a time consuming work to carry through nonlinear finite element method analysis for a large number of stiffened plates. It is costly for primary design. In order to solve this problem, the postbuckling behavior of plate should be analyzed first. Afterwards, the width of buckled plate can be reduced accordingly. Whereafter, buckled plates can be taken for attached flange of the stiffener, then overall buckling of stiffened plate can be analyzed by linear finite element method. Therefore, the explicit expressions for edge stress, average strain and stiffness of rectangular plate with arbitrary aspect ratio and initial deflection have to be derived. However, such research is scarce up to now.

Wherefore, in this paper, the postbuckling behavior of a simply supported rectangular plate with initial deflection loaded along two opposite straight edges is analyzed using von Kármán equations. Firstly, the rectangular plate with the aspect ratio smaller than  $\sqrt{2}$  is analyzed. The first three terms of the double Fourier series are taken as the deflection function. The first term of the double Fourier series is taken as the initial deflection function based on the Kmiecik's data acquired by measuring a great deal of ship plates in shipyard. Whereafter, the relative variables are transformed to non-dimensional variables. Then the non-dimensional load is taken as perturbation parameter. Afterward, the non-linear algebraic equations generated are solved approximately using a perturbation technique, which facilitates the development of explicit expressions for edge stress, average strain and stiffness of rectangular plate with arbitrary aspect ratio. The effect of initial deflection and aspect ratio on the postbuckling behavior is also studied. It is evinced that initial deflection can reduce the in-plane stiffness of the plate distinctly. With the concept of "equivalent rectangular plate" and "deflection method" proposed by Ueda, all the results acquired above can be easily spread to the plate with aspect ratio larger than  $\sqrt{2}$ .

**Key words** Rectangular plate; Postbuckling; von Kármán equations; Perturbation method

Correspondent: ZENG Xiaohui, E-mail: zeng-xiaohui@263.net, Fax: +86-10-62561284

Manuscript received 20000103, in revised form 20000321.

\* \*20000103 收到初稿, 20000321 收到修改稿。

\*\* 曾晓辉,男,1972年4月生,湖南新化人,汉族。中科院力学所博士后。主要研究方向为结构的屈曲及后屈曲、船体极限承载能力和海洋管道的强度分析。目前已发表学术论文 10 篇,录用待发表 2 篇。

## 1 引言

船舶结构基本上是由大量的板和加强筋组成的。船体在总纵弯曲时,船体板和加强筋可能由于受面内压力作用而屈曲(既可能是二者的局部屈曲,又可能是作为整体的加筋板的屈曲)。由于板屈曲后尚可以继续承载,因此为充分利用板的承载能力,减轻结构重量,有时将船体板设计得比较薄,使其工作于后屈曲状态。对大量的板(及其上的加强筋)进行有限元计算是一件非常费时的工作,在船体的初步设计阶段,进行这样的分析计算是非常不经济的。在造船界,一般是先分析板的后屈曲特性,然后把板按某一折减宽度计入到加筋的剖面中去,再对加筋板进行整体屈曲分析。

分析矩形板后屈曲特性的文献有不少,但这些工作基本上只是给出某些特定边长比和初挠度下的荷载—挠度曲线(或应力分布示意图)<sup>[1,2]</sup>。这些结果并不能反映矩形板的全部后屈曲特性,若欲全面了解板屈曲后的强度和刚度特性,还需要得到对任意边长比与初挠度均适用的<sub>c</sub>和<sub>a</sub>之间、<sub>a</sub>和<sub>a</sub>之间、d<sub>a</sub>/d<sub>a</sub>和<sub>a</sub>之间的函数关系。这些关系不仅能够更全面地反映出屈曲后板的基本特性,而且也是进行加筋板整体屈曲分析时不可缺少的关系式。Walker<sup>[3]</sup>给出了正方形板的上述显式关系,但对于具有任意边长比的矩形板,并未见到类似地解答。

## 2 von-Kármán 方程和边界条件

有初挠度矩形薄板的 von-Kármán 大挠度方程为<sup>[1]</sup>

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} L(W + W_0, W - W_0) \quad (1)$$

$$D \nabla^4 (W - W_0) = p_z + tL(W, F) \quad (2)$$

上两式中,L 是微分算子

$$L(\cdot, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

p<sub>z</sub> 是法向压力,本文中 p<sub>z</sub> 为 0。

矩形板的几何形状和受力情况如图 1 所示。

四边简支板的边界条件为

$$1) W \Big|_{\substack{X=\pm a \\ Y=\pm b}} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \Big|_{\substack{X=\pm a \\ Y=\pm b}} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \Big|_{\substack{Y=\pm b}} = 0.$$

2) 在板的受压边(X = ±a)上, P = t  $\int_{-b}^b dY = 2bt_a$ 。

$$3) \text{在板的支持边}(Y = \pm b) \text{上}, \int_{-a}^a dX = 0.$$

4) 板的四边保持直线。

5) 板的四边剪应力为零。

## 3 von-Kármán 方程的解

可以将初挠度、总挠度、应力函数分别表示为

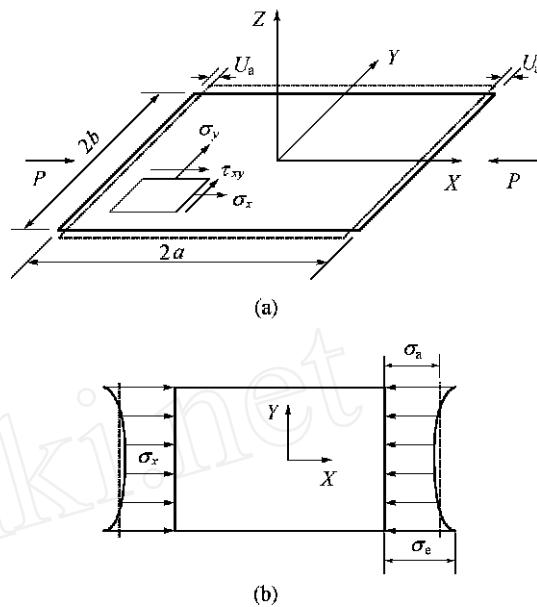


图 1 矩形的几何形状和受力情况  
Fig. 1 The geometry and load case of a rectangular plate

$$W_0 = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{0(mn)} \cos \frac{m\pi X}{2a} \cos \frac{n\pi Y}{2b} \quad (3)$$

$$W = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} \cos \frac{m\pi X}{2a} \cos \frac{n\pi Y}{2b} \quad (4)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{p=0,2,\dots} \sum_{q=0,2,\dots} (b_{pq} - b_{0(pq)}) \cos \frac{p\pi X}{2a} \cos \frac{q\pi Y}{2b} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\text{将式(3)、(4)、(5)代入方程(1)、(2),可得到}^{[1]} \\ &D \left[ \left( \frac{r}{2a} \right)^2 + \left( \frac{s}{2b} \right)^2 \right] [W_{ns} - W_{0(ns)}] + a t \left( \frac{r}{2a} \right)^2 W_{ns} - \\ &\frac{t^4}{64a^2b^2} \sum_{n=1}^9 [A_n - A_{0(n)}] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 r, s = 1, 3, 5, ..., ; A<sub>n</sub>, A<sub>0(n)</sub> 是 W<sub>mn</sub>, W<sub>0(mn)</sub>, b<sub>pq</sub>, b<sub>0(pq)</sub> 的函数。解非线性方程组(6)可得到板的后屈曲解。

先以边长比 a/b =  $\sqrt{2}$  矩形板为研究对象,用参数摄动法解方程组(6),进而给出上述显式关系。后面的分析表明,此类矩形板的结果可推广到 a/b >  $\sqrt{2}$  的矩形板。

由文献[4,5]的实际测量结果知,a/b =  $\sqrt{2}$  的船用钢板的初挠度可用下式表达

$$W_0 = W_{0(11)} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} \quad (7)$$

船体板中的  $\epsilon_c / \epsilon_{cr}$  很少超过 3<sup>[6]</sup>。由文献[1]可知,此时挠度函数表达式(4)可以只取含 W<sub>11</sub>、W<sub>13</sub>、W<sub>31</sub> 的前三项而保证足够精度。因此本文将总挠度取为如下形式

$$W = W_{11} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} + W_{13} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{3Y}{2b} + W_{31} \cos \frac{3X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} \quad (8)$$

把式(7)、(8)代入式(6),可得如下三个方程

$$\frac{(1+\mu^2)^2}{12(1-\mu^2)}(w_{11}-\dots) + \frac{2}{2}w_{11} = C_{11}w_{11}(w_{11}^2 - \dots) + \\ C_{12}w_{13}(w_{11}^2 - \dots) + C_{13}w_{31}(w_{11}^2 - \dots) + \\ C_{14}w_{11}^2w_{13} + C_{15}w_{11}^2w_{31} + C_{16}w_{11}w_{31}^2 + \\ C_{17}w_{11}w_{31}^2 + C_{18}w_{11}w_{13}w_{31} + C_{19}w_{13}^2w_{31} + \\ C_{110}w_{13}w_{31}^2 \quad (9)$$

$$\left[ \frac{(1+9\mu^2)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{2}{2} \right] w_{13} = C_{21}w_{11}(w_{11}^2 - \dots) + \\ C_{22}w_{13}(w_{11}^2 - \dots) + C_{23}w_{11}^2w_{13} + C_{24}w_{11}^2w_{31} + \\ C_{25}w_{11}w_{31}^2 + C_{26}w_{11}w_{13}w_{31} + C_{27}w_{13}w_{31}^2 + \\ C_{28}w_{13}^3 \quad (10)$$

$$\left[ \frac{(9+\mu^2)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{9}{2} \right] w_{31} = C_{31}w_{11}(w_{11}^2 - \dots) + \\ C_{32}w_{31}(w_{11}^2 - \dots) + C_{33}w_{31}w_{11}^2 + C_{34}w_{11}^2w_{13} + \\ C_{35}w_{11}w_{13}^2 + C_{36}w_{11}w_{13}w_{31} + C_{37}w_{13}w_{31}^2 + \\ C_{38}w_{31}^3 \quad (11)$$

式中  $\mu = 2bP/Et^3$ ,  $a = a/b$ ,  $w_{mn} = W_{mn}/t$ ,  $c = W_{0(11)}/t$ ,  $C_{11} \sim C_{110}$ ,  $C_{21} \sim C_{28}$ ,  $C_{31} \sim C_{38}$  均是边长比  $\mu$  的函数。令  $\mu^2 = (\mu_x - \mu_c)/\mu_c$ ,  $\mu_c$  为某一选定的参考点, 以  $\mu_c$  为摄动参数, 把  $w_{11}$ 、 $w_{13}$  和  $w_{31}$  展开成  $\mu$  的幂级数

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= w_c + k_1 + k_2^2 + k_3^3 + k_4^4 \\ w_{13} &= w_{c2} + k_{21} + k_{22}^2 + k_{23}^3 + k_{24}^4 \\ w_{31} &= w_{c3} + k_{31} + k_{32}^2 + k_{33}^3 + k_{34}^4 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(12)代入式(9)~(11), 令方程左右两边关于  $\mu$  的同阶幂的系数分别相等, 可获得关于式(12)中各未知系数的方程组, 解这些方程组就能够得到  $w_{c_i}$ 、 $k_i$ 、 $k_{2i}$ 、 $k_{3i}$  等各系数的值。在附录中给出各系数的计算式。

本文计算了  $\mu = 1$ 、 $\mu = 0.1$  时  $w_{11}$ 、 $w_{13}$  和  $w_{31}$  的值, 并与 Yamaki<sup>[2]</sup> 给出的解做比较, 见表 1。由该表可见, 只要把  $\mu_c$  选在  $\mu_x$  附近, 即  $(\mu_x - \mu_c)/\mu_c$  不太大 (小于 0.4), 摄动展开式就是足够精确的 (误差最大为 5%)。实际上, 式(12)反映了当外压力  $\mu_x$  增大时, 矩形板挠曲函数随之而变的规律。通过式(12)可由  $\mu_x$  直接算得此时的挠度系数  $w_{11}$ 、 $w_{13}$  和  $w_{31}$ , 而不必象文献 [1, 2] 那样对每个不同的  $\mu_x$  均要解非线性方程组(6)。式(12)也就是外力和挠度系数间的显式表达式。

表 1  $\mu = 1$ ,  $\mu = 0.1$  时的  $w_{mn}$   
Tab. 1 The value of  $w_{mn}$  with  $\mu = 1$ ,  $\mu = 0.1$

无量纲载荷	无量纲挠度系数 $w_{11}$ Yamaki <sup>[2]</sup> 式(12)	无量纲挠度系数 $w_{13}$ Yamaki <sup>[2]</sup> 式(12)	无量纲挠度系数 $w_{31}$ Yamaki <sup>[2]</sup> 式(12)
- $\mu_x$ - $\mu_c$			
0.282 0.213	0.35	$0.349 \times 10^{-4}$	$-2.4 \times 10^{-4}$
0.356 0.282	0.60	$0.612 \times 10^{-3}$	$-1.38 \times 10^{-3}$
0.375 0.356	0.68	$0.677 \times 10^{-3}$	$-1.97 \times 10^{-3}$
0.418 0.375	0.85	$0.847 \times 10^{-3}$	$-3.78 \times 10^{-3}$
0.487 0.418	1.10	$1.098 \times 10^{-3}$	$-7.82 \times 10^{-3}$
0.654 0.487	1.60	$1.597 \times 10^{-2}$	$-2.11 \times 10^{-2}$
0.865 0.654	2.10	$2.079 \times 10^{-2}$	$-4.14 \times 10^{-2}$
			$-3.96 \times 10^{-2}$

#### 4 平均应力 $\sigma_a$ 与板边应力 $\sigma_e$ 之间的显式函数关系式

获得如式(12)所示的挠度系数关于载荷参数  $\mu$  的展开式后, 就可以推导出平均应力  $\sigma_a$  与板边应力  $\sigma_e$  之间的显式关系, 以下说明具体过程。

板边应力  $\sigma_e$  为

$$\sigma_e = \left. x \left| \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right. \right|_{\substack{Y=\pm a \\ Y=\pm b}}$$

考虑到式(5)则有

$$\sigma_e = \left. a - \frac{2}{4b^2} [4(b_{0(02)} - b_{02}) + 16b_{04} - 36b_{06} + 4b_{22} - 16b_{24} - 4b_{42} + 16b_{44}] \right. \quad (13)$$

式中  $b_{0(pq)}$  和  $b_{pq}$  ( $p = 0, 2, \dots; q = 0, 2, \dots$ ) 均是  $w_{0(11)}$ 、 $w_{11}$ 、 $w_{13}$  和  $w_{31}$  的函数。用挠度系数  $w_{0(11)}$ 、 $w_{mn}$  替换式(13)中的应力函数系数  $b_{0(pq)}$ 、 $b_{pq}$ , 得到下式

$$\sigma_e = \left. a - \frac{2}{4b^2} [D_1(w_{11}^2 + w_{13}^2 + 9w_{31}^2 - \dots) + D_2w_{11}w_{13} + D_3w_{11}w_{31} + D_4w_{13}w_{31}] \right. \quad (14)$$

令  $\sigma_e = \sigma_a + w_c$ , 将式(12)代入式(14)有

$$\sigma_e = \left. a - \frac{2}{4b^2} (E_0 + E_2^2 + E_4^4 + E_6^6 + E_8^8) \right. \quad (15)$$

其中

$$E_0 = D_1(\mu_c^2 - \dots + w_{c2}^2 + 9w_{c3}^2) + D_2w_{c2} + D_3w_{c3} + D_4w_{c2}w_{c3}$$

$$E_2 = 2D_1(k_{21} - \dots + w_{c2}k_{22} + 9w_{c3}k_{32}) + D_2(k_{22} - \dots + k_{21}w_{c2}) +$$

$$D_3(k_{32} - \dots + k_{21}w_{c3}) + D_4(w_{c2}k_{32} + k_{22}w_{c3})$$

$$E_4 = D_1(k_{21}^2 + 2k_{22} - \dots + k_{22}^2 + 2w_{c2}k_{24} + 9k_{32}^2 +$$

$$18w_{c3}k_{34}) + D_2(k_{22}k_{24} + k_{21}k_{22} + k_{24}w_{c2}) +$$

$$D_3(k_{34} - \dots + k_{21}k_{32} + k_{24}w_{c3}) + D_4(w_{c2}k_{34} + k_{22}k_{32} + k_{24}w_{c3})$$

$$E_6 = 2D_1(k_{21}k_{24} + k_{22}k_{24} + 9k_{32}k_{34}) + D_2(k_{22}k_{24} +$$

$$k_{24}k_{22}) + D_3(k_{21}k_{34} + k_{24}k_{32}) + D_4(k_{22}k_{34} + k_{24}k_{32})$$

$$E_8 = D_1(k_{21}^2 + k_{24}^2 + 9k_{34}^2) + D_2k_{24} + D_3k_{4}k_{34} +$$

$$D_4k_{24}k_{34}$$

式中  $D_1 \sim D_4$  是边长比  $\mu$  的函数。

由于  $\mu = 2bP/Et^3$ ,  $a = P/2bt$ , 所以

$\mu^2 = a^2/4b^2/Et^2$ 。而  $\mu^2 = (\mu_x - \mu_c)/\mu_c$ , 于是有

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{4b^2}{Et^2} a - 1 \quad (16)$$

把式(16)代入式(15)可得

$$\sigma_e = a - G(a) \quad (17)$$

式(17)就是希望获得的  $\sigma_e$  与  $a$  之间的显式函数关系。

## 5 矩形板后屈曲刚度、 $\alpha_a$ 与 $\alpha_a$ 之间的显式函数关系式

如图 1 所示,  $U_a$  为板受压边沿 X 方向的位移, 平均应变为  $\epsilon_a = U_a/a$ 。在无初挠度的理想平板发生屈曲以前, 平均应变与平均应力之间符合虎克定律。而对有初挠度的矩形板来说, 这一关系从刚刚受力开始就是不成立的。在这种情况下  $\alpha_a$  与  $\alpha_a$  之间是一个非线性关系, 而矩形板的刚度特性可由  $d_{aa}/d_{aa}$  反映出来, 它是随  $\alpha_a$  变化的。下面推导  $\alpha_a$  与  $\alpha_a$ 、 $\alpha_a$  与  $d_{aa}/d_{aa}$  之间的关系式。

$$U_a = \int_0^a \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_0}{\partial X} \right)^2 \right] \Big|_{Y=\pm b} dx$$

把式(3)、(4)、(5)代入上式

$$U_a = \frac{a}{E} \alpha_a - \frac{t^2}{32a} (w_{11}^2 - w_{22}^2 + w_{13}^2 + 9w_{31}^2)$$

把式(12)代入上式, 并考虑到关系式  $\alpha_a = U_a/a$  及式(16), 可得

$$\alpha_a = \frac{a}{E} - \frac{t^2}{32a^2} H(\alpha_a) \quad (18)$$

对式(18)左右两边求关于  $\alpha_a$  的导数, 有

$$d_{aa}/d_{aa} = E \cdot S(\alpha_a) \quad (19)$$

至此, 矩形板的刚度特性也已得到。本文用式(18)和(19)计算了几种情况下的矩形板后屈曲特性曲线(如

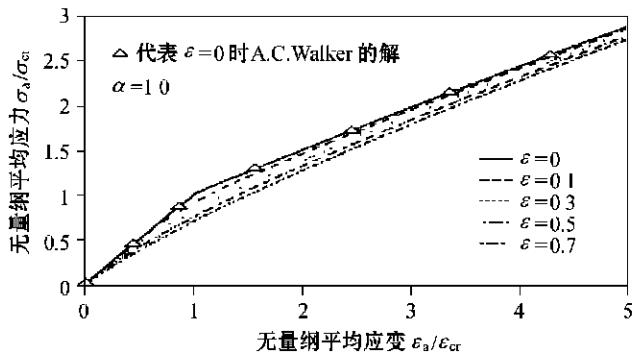


图 2 正方形板的  $\alpha_a/\alpha_{cr}$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  曲线

Fig. 2 The  $\alpha_a/\alpha_{cr}$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  curve of square plate

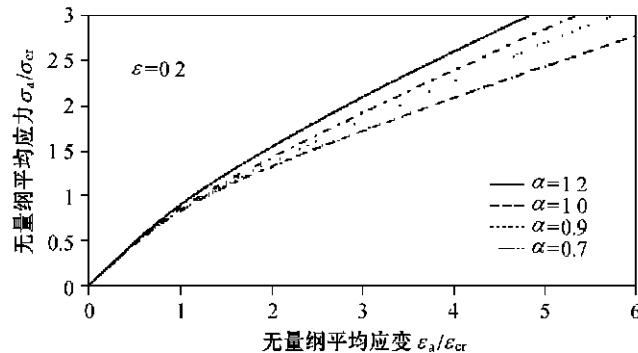


图 4 初挠度  $\varepsilon=0.2$  时几种矩形板的  $\alpha_a/\alpha_{cr}$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  曲线

Fig. 4 The  $\alpha_a/\alpha_{cr}$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  curve of rectangular plates with  $\varepsilon=0.2$

图 2~图 5 所示), 并与 Walker<sup>[3]</sup> 在特定情况下的相应解(正方形板)做了比较。显而易见, 本文式(18)和(19)给出的解与 Walker 的解非常吻合。

从图 3 中可看出, 当  $\alpha_a$  在板临界应力  $\sigma_{cr}$  附近时, 初挠度的存在会大幅度降低矩形板的刚度。当  $\alpha_a < \sigma_{cr}$  时初挠度的幅值越大, 板的刚度也就降低越多; 当  $\alpha_a > \sigma_{cr}$  时这种关系不再存在, 甚至产生相反的效果。从图 5 中可看出, 随着边长比的降低, 板的刚度也随之降低。

以上工作是在边长比  $a/b < \sqrt{2}$  的情况下进行的。下面说明上述结果可推广应用到  $a/b > \sqrt{2}$  的矩形板。

## 6 边长比大于 $\sqrt{2}$ 的情况

$a/b > \sqrt{2}$  的长矩形板的初挠度通常由许多余弦形式的模态分量共同组成(式(3))。Ueda<sup>[4]</sup> 等人用有限元法对一些初挠度含许多模态分量的长矩形板进行后屈曲计算, 结果表明, (1) 超过临界应力后, 只有一种模态的初挠度会随应力增加而迅速增长, 成为主要挠曲形式, 其他模态分量均减小并趋于零。(2) 屈曲后板总挠度的稳定波形一般比对应的理想平板的屈曲波形高一至二阶。据此 Ueda 认为, 在进行有初挠度板的后屈曲分析时, 可只取某一特定的分量作为初挠度形式而忽略其他分量。这一分量形式可能是屈曲波形或比其高一至二阶的波形之中的一种。文献[4]按这一方法计算了某矩形板, 并与精确解(初挠度含许多模态分

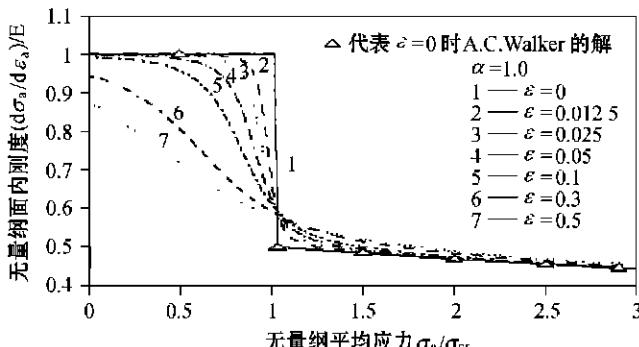


图 3 正方形板的  $(d_{aa}/d_{aa})/E$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  曲线

Fig. 3 The  $(d_{aa}/d_{aa})/E$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  curve of square plate

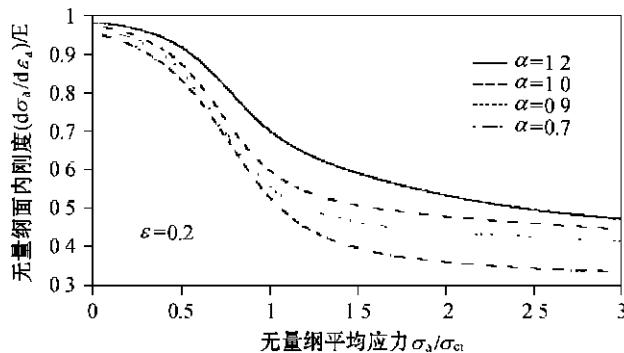


图 5 初挠度  $\varepsilon=0.2$  时几种矩形板的  $(d_{aa}/d_{aa})/E$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  曲线

Fig. 5 The  $(d_{aa}/d_{aa})/E$ — $\alpha_a/\alpha_{cr}$  curve of rectangular plates with  $\varepsilon=0.2$

量)作了比较。结果表明,两者之间的误差很小,可以忽略不计。

以此为基础,Ueda 提出“等效矩形板”(equivalent rectangular plate)的概念和“挠度方法”(deflection method)来计算矩形板的后屈曲强度,取等效矩形板的宽、厚与原矩形板的相等,长度分别取为原矩形板屈曲时的半波长,或比屈曲波形高一至二阶波形的半波长。取初挠度波形的半波长与等效矩形板的板长相等。对这三种板长的等效板进行后屈曲强度分析,承载能力最低的等效板的后屈曲特性就代表了原矩形板的后屈曲特性。

根据 Ueda 的这一方法,可以采用这样的步骤分析  $a/b > \sqrt{2}$  的长矩形板,先取出它的三种等效矩形板。

按本文前面提到的方法对三种等效板进行后屈曲分析(可以证明,这三种等效板的边长比都小于  $\sqrt{2}$ )。

在这三种等效板中,当板边应力  $\sigma_e = \sigma_s$  ( $\sigma_s$  为材料屈服极限)时,对应的平均应力  $\sigma_a$  最小的板就是承载能力最小的板,它的后屈曲特性反映了原矩形板( $a/b > \sqrt{2}$ )的后屈曲特性。

## 7 结论

1)应用 von Kármán 大挠度薄板方程,对四边简支的有初挠度矩形板在承受单向面内压力情况下的后屈曲特性进行了较全面的分析。其中挠曲函数取为双傅氏级数展开式的前三项。

2)采用参数摄动法求解非线性代数方程组(9)~(11),得到板边应力  $\sigma_e$  与平均应力  $\sigma_a$  之间、平均应变  $\epsilon_a$  与  $\sigma_a$  之间、刚度  $d_{aa}/d_{aa}$  与  $\sigma_a$  之间的显式函数表达式(17)、(18)、(19)。

3)应用得到的各个显式表达式计算了若干种受压板,分析了边长比和初挠度对矩形板后屈曲特性的影响。

## References

- Coan J M. Large deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression. *J of Applied Mechanics*, 1951, 18:143~151.
- Yamaki N. Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression. *J. of Applied Mechanics*, 1959, 26:407~414.
- Walker A C. The postbuckling behaviour of simply-supported square plates. *The Aeronautical Quarterly*, 1969, 20:203~222.
- Ueda Y, Yao T. The influence of complex initial deflection mode on the behavior and ultimate strength of rectangular plates in compression. *J. of Construct. Steel Research*, 1985, 5:265~302.
- Kniewic M, Jastrzebski T, Kuzniar J. Statistic of ship plating distortions. *Marine Structures*, 1995, 8:119~132.
- Bleich F. Buckling strength of metal structures. New York: McGraw Hill, 1952.

## 附录 $w_{c_i}, k_i, k_{2i}, k_{3i}$ 等各系数的计算式

$k_1, k_{2i}, k_{3i}$  ( $i=1, 3$ ) 的值为 0, 下面给出其他系数

的计算公式。

$$w_c = \sqrt{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$$

其中

$$p = -\frac{2}{c} - (A_1 + \frac{c}{2}) / C_{11}$$

$$q = [A_1 + (-1) \frac{c}{2}] / C_{11}$$

$$A_1 = (1 + \frac{c^2}{4})^2 / [12(1 - \mu^2)]$$

$$w_{c2} = (B_2 B_6 - B_3 B_4) / (B_1 B_4 - B_2 B_5)$$

$$w_{c3} = (B_1 B_6 - B_3 B_5) / (B_2 B_5 - B_1 B_4)$$

式中

$$B_1 = C_{22} w_c^2 + 2 C_{22} w_c + C_{23} \frac{c^2}{2} - A_2 - \frac{2}{c} / C_{11}$$

$$B_2 = C_{24} \frac{c^2}{2}, c = +w_c$$

$$B_3 = C_{21} w_c^3 + 3 C_{21} w_c^2 + 2 C_{21} \frac{c^2}{2} w_c$$

$$B_4 = C_{32} w_c^2 + 2 C_{32} w_c + C_{33} \frac{c^2}{2} - A_3 - 9 \frac{2}{c} / C_{11}$$

$$B_5 = C_{34} \frac{c^2}{2}, B_6 = C_{31} w_c^3 + 3 C_{31} w_c^2 + 2 C_{31} \frac{c^2}{2} w_c$$

$$A_2 = (1 + 9 \frac{c^2}{4})^2 / [12(1 - \mu^2)]$$

$$A_3 = (9 + \frac{c^2}{4})^2 / [12(1 - \mu^2)]$$

$$t_1 = Q_{23} / R_{23}, t_2 = Q_{23} / S_{23}$$

$$t_3 = (Q_{22} - R_{22} t_1) / (Q_{22} - S_{22} t_2)$$

$$k_2 = \frac{Q_{24} (t_3 - 1) + R_{24} t_1 - S_{24} t_2 t_3}{Q_{21} (1 - t_3) - R_{21} t_1 - S_{21} t_2 t_3}$$

$$k_{22} = [-Q_{24} + R_{24} t_1 - (Q_{21} - R_{21} t_1) k_2] / (Q_{22} - R_{22} t_1)$$

$$k_{32} = (-Q_{24} - Q_{21} k_2 - Q_{22} k_{22}) / Q_{23}$$

$$k_4 = \frac{Q_{44} (t_3 - 1) + R_{44} t_1 - S_{44} t_2 t_3}{Q_{41} (1 - t_3) - R_{41} t_1 - S_{41} t_2 t_3}$$

$$k_{24} = [-Q_{44} + R_{44} t_1 - (Q_{41} - R_{41} t_1) k_4] / (Q_{42} - R_{42} t_1)$$

$$k_{34} = (-Q_{44} - Q_{41} k_4 - Q_{42} k_{24}) / Q_{43}$$

上面几式中

$$Q_{21} = C_{11} (3 \frac{c^2}{2} - \frac{2}{c}) + 2 C_{12} w_{c2} \frac{c}{2} + 2 C_{13} w_{c3} \frac{c}{2} + 2 C_{14} w_{c2} \frac{c}{2} + 2 C_{15} w_{c3} \frac{c}{2} + C_{16} w_{c2}^2 + C_{17} w_{c3}^2 + C_{18} w_{c2} w_{c3} - A_1 - \frac{2}{c} / C_{11}$$

$$Q_{22} = C_{12} (\frac{c^2}{2} - \frac{2}{c}) + C_{14} \frac{c^2}{2} + 2 C_{16} \frac{c}{2} w_{c2} + C_{18} \frac{c}{2} w_{c3} + 2 C_{19} w_{c2} w_{c3} + C_{110} w_{c3}^2$$

$$Q_{23} = C_{13} (\frac{c^2}{2} - \frac{2}{c}) + C_{15} \frac{c^2}{2} + 2 C_{17} \frac{c}{2} w_{c3} + C_{18} \frac{c}{2} w_{c2} + C_{19} w_{c2}^2 + 2 C_{110} w_{c2} w_{c3}$$

$$Q_{24} = -\frac{2}{c} / C_{11}$$

$$Q_{41} = Q_{21}, Q_{42} = Q_{22}$$

$$Q_{44} = 3 C_{11} \frac{c}{2} k_2^2 + C_{12} (w_{c2} k_2^2 + 2 \frac{c}{2} k_{22} k_2) +$$

$$C_{13} (w_{c3} k_2^2 + 2 \frac{c}{2} k_{32} k_2) + C_{14} (w_{c2} k_2^2 + 2 \frac{c}{2} k_{22} k_2) +$$

$$C_{15} (w_{c3} k_2^2 + 2 \frac{c}{2} k_{32} k_2) + C_{16} (\frac{c}{2} k_{22}^2 + 2 w_{c2} k_{22} k_2) +$$

$$C_{17} (\frac{c}{2} k_{32}^2 + 2 w_{c3} k_{32} k_2) + C_{18} (w_{c3} k_2 k_{22} +$$

$$k_{32} \frac{c}{2} k_{22} + k_{32} w_{c2} k_2) + C_{19} (w_{c1} k_{22}^2 + 2 k_{32} w_{c2} k_{22}) +$$

$$C_{110} (w_{c2} k_{32}^2 + 2 k_{22} w_{c3} k_{32}) - \frac{2}{c} k_2 / C_{11}$$

(下转第 282 页 Continued on page 282)

看出,库所  $p_5$ 、 $p_7$  的标识值出现数值“2”,根据一致性检验命题,该规则集可能存在一致性问题,进行检验后,结果显示“该规则集存在从属规则: Rule3 从属于 Rule2”。

表 1 约束 Petri 网节点符号说明

Tab. 1 Description of all nodes in the bounded Petri net

库所名称	规则事实	事实描述	转移名称	规则名称
$p_0$	$b$	太阳帆板温度升高	$t_0$	Rule0
$p_1$	$c$	母线电压下降	$t_1$	Rule1
$p_2$	$d$	太阳电池阵输出功率下降	$t_2$	Rule2
$p_4$	$e$	损耗器指示电流 $I_{\text{dE}} = 0$	$t_3$	Rule3
$p_5$	$f$	固定分流控制失效	$t_4$	Rule4
$p_6$	$g$	蓄电池充电结束,充电电流为涓流		
$p_7$	$h$	固定损耗器故障		

## 4 结束语

1) 应用面向对象技术,利用 Visual C++ 的 MFC 框架编程方法,开发了一个 Petri 网建模工具,这不仅为命题方法的验证提供了条件,而且为 Petri 网方法在系统仿真、故障诊断中的理论研究提供了进行可行性、正确性检验的实现环境。

2) 提出了一致性检验方法的实现算法。在 Petri 网模型比较复杂、庞大时,得到的该 Petri 网的关联矩阵也将变得非常大,而每一次库所考察时进行的状态方程计算可能出现“爆炸”问题。从软件实现考虑,可

在库所类中增加成员数组  $m\_Farther[]$  和  $m\_Son[]$ , 将起始库所作为第一个父节点, 将对应的输出库所作为它的子节点, 同时该子节点又作为新的父节点, 如此可将 Petri 网分解成若干“父—子(父)—子(父)—…—子”的子网, 对于每一个被考察的库所, 都能得到这样的一个子网, 以子网的关联矩阵进行相关的计算。考虑到规则集不太可能出现茂密的树冠状或全封闭分布, 总可以得到子网的关联矩阵小于整网的矩阵。

### References

- Nguyen A T, Perkins W A. Checking a knowledge base for consistency and completeness. AI Magazine, 1987, 8(2):69~75.
- Murata T, Subrahmanian V S. A Petri net model for reasoning in the presence of inconsistency. IEEE Trans. On Knowledge and Data Engineering, 1991, 3(3):281~292.
- Derek L Nazareth. Investigating the applicability of Petri nets for rule-based system verification. IEEE Trans. On Knowledge and Data Engineering, 1993, 4(3):402~414.
- DING Caibong, HUANG Wenhui, JIANG Xingwei. Petri nets' application for consistency verification of the rule-based system. Journal of Mechanical Strength, 1999, 21(3):170~173 (In Chinese) (丁彩红, 黄文虎, 姜兴渭. Petri 网在基于规则系统一致性问题检查中的应用. 机械强度, 1999, 21(3):170~173).
- Tadao Murata. Petri nets: properties, analysis and applications. Proceeding of IEEE, 1989, 77(4):541~582.
- WANG Guoyin. Secrets of the Visual C++ Master. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (In Chinese) (王国印. Visual C++ 技术内幕. 北京: 清华大学出版社, 1996).

(上接第 267 页 Continued from page 267)

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= C_{21} (3 \frac{w_{c_1}^2}{c} - \frac{w_{c_2}^2}{c}) + 2 C_{22} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} + 2 C_{23} w_{c_2} \frac{w_{c_3}}{c} + \\
 &\quad 2 C_{24} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{25} w_{c_3}^2 + C_{26} w_{c_2} w_{c_3} \\
 R_{22} &= C_{22} ( \frac{w_{c_1}^2}{c} - \frac{w_{c_2}^2}{c} ) + C_{23} \frac{w_{c_1}^2}{c} + C_{26} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{27} w_{c_3} \frac{w_{c_2}}{c} + \\
 &\quad 3 C_{28} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} - A_2 - \frac{w_{c_1}^2}{c} / 2 \\
 R_{23} &= C_{24} \frac{w_{c_1}^2}{c} + 2 C_{25} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{26} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} + 2 C_{27} w_{c_2} w_{c_3} \\
 R_{24} &= - \frac{w_{c_1}^2}{c} w_{c_2} / 2 \\
 R_{41} &= R_{21}, R_{42} = R_{22} \\
 R_{44} &= 3 C_{21} \frac{w_{c_1}^2}{c} k_2^2 + C_{22} ( w_{c_2} k_2^2 + 2 k_{22} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + \\
 &\quad C_{23} ( w_{c_2} k_2^2 + 2 k_{22} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + C_{24} ( w_{c_3} k_2^2 + 2 k_{32} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + \\
 &\quad C_{25} ( \frac{w_{c_1}^2}{c} k_{32}^2 + 2 k_2 w_{c_3} k_{32} ) + C_{26} ( k_2 k_{22} w_{c_3} + \\
 &\quad k_{22} \frac{w_{c_1}^2}{c} k_{32} + k_2 w_{c_2} k_{32} ) + C_{27} ( w_{c_2} k_{32}^2 + 2 k_{22} w_{c_3} k_{32} ) + \\
 &\quad 3 C_{28} w_{c_2} k_{22}^2 - \frac{w_{c_1}^2}{c} k_{22} / 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= C_{31} (3 \frac{w_{c_1}^2}{c} - \frac{w_{c_2}^2}{c}) + 2 C_{32} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} + 2 C_{33} w_{c_3} \frac{w_{c_2}}{c} + \\
 &\quad 2 C_{34} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{35} w_{c_2}^2 + C_{36} w_{c_2} w_{c_3} \\
 S_{22} &= C_{34} \frac{w_{c_1}^2}{c} + 2 C_{35} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{36} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} + 2 C_{37} w_{c_2} w_{c_3} \\
 S_{23} &= C_{32} ( \frac{w_{c_1}^2}{c} - \frac{w_{c_2}^2}{c} ) + C_{33} \frac{w_{c_1}^2}{c} + C_{36} w_{c_2} \frac{w_{c_1}}{c} + C_{37} w_{c_2} \frac{w_{c_3}}{c} + \\
 &\quad 3 C_{38} w_{c_3} \frac{w_{c_1}}{c} - A_3 - \frac{w_{c_1}^2}{c} / 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{24} &= - 9 \frac{w_{c_3}^2}{c} / 2 \\
 S_{41} &= S_{21} \\
 S_{44} &= 3 C_{31} \frac{w_{c_1}^2}{c} k_2^2 + C_{32} ( w_{c_3} k_2^2 + 2 k_{32} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + \\
 &\quad C_{33} ( w_{c_3} k_2^2 + 2 k_{32} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + C_{34} ( w_{c_2} k_2^2 + 2 k_{22} \frac{w_{c_1}}{c} k_2 ) + \\
 &\quad C_{35} ( \frac{w_{c_1}^2}{c} k_{32}^2 + 2 k_2 w_{c_3} k_{32} ) + C_{36} ( k_2 k_{22} w_{c_3} + \\
 &\quad k_{22} \frac{w_{c_1}^2}{c} k_{32} + k_2 w_{c_2} k_{32} ) + C_{37} ( w_{c_3} k_{32}^2 + 2 k_{22} w_{c_2} k_{32} ) + \\
 &\quad 3 C_{38} w_{c_3} k_{32}^2 - 9 \frac{w_{c_3}^2}{c} / 2
 \end{aligned}$$

### 符号

 $a, b$  ——矩形板的长和宽 $P$  ——作用在  $X$  方向的压力 $t$  ——板厚 $x, y, xy$  ——作用在中面的正应力和剪应力 $a$  ——平均应力 $e$  ——板支持边的应力 $c_r$  ——板的临界应力 $F$  ——应力函数, 满足关系:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial X}$$

 $E$  ——弹性模量 $W, W_0$  ——总挠度和初挠度 $D$  ——板的弯曲刚度