中 国 科 学 (A 辑)
第 28 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1998 年 1 月

再论二相流基本方程 *
——关于固相碰撞应力的讨论

刘大有
(中国科学院力学研究所,中国科学院化工冶金研究所多相反应开放实验室,北京 100080)

摘要 论述了:(1) 相界面上有两种彼此独立的相互作用:相间相互作用和碰撞相互作用,相界面上的间断关系可作相应的分解;(2) 颗粒中的应力可分解为本底应力和碰撞应力,它们分别对应于相界面上的相间作用和碰撞作用;(3) 通过相界面,碰撞应力没有间断,因此,对于它,导数的平均值等于平均值的导数;(4) 基本方程中的固相应力应包含碰撞应力,而相间力表达式中的固相应力只含本底应力. 通过这些论述,将 Drew 和 Ishii 等发展起来的一种相当严谨的推导二相流基本方程的方法,推广到浓密的二相流,得到了包括碰撞应力效应的二相流平均运动方程组.

关键词 二相流 基本方程 碰撞应力

在二相流发展的早期,人们研究二相流所用的方程组是以流体力学方程为基础、引入某些修正而得到的. 在这些修正中体现了二相流不同于单相流的特点. 由于二相流远比单相流复杂,这类修正往往不全面,顾此失彼. 各人按自己的理解进行修正,结果各不相同.

Drew[1], Ishii[2], Boure 和 Delhaye[3], Drew 和 Lahey[4]和刘大有等[5,6]发展了一套从基本守恒原理出发推导二相流基本方程的方法,在逻辑上相当严密. 由于用统一方法处理相界面上的间断,使它可适用于包括气-固流,液-固流和气-液流等各种类型的二相流,也包括有相变和表面张力等现象的二相流. 在文献[5]和[6]中,刘大有引入了相界面速度 v_i,相界面上的应力张量$(-P_i)$和能流通量 q_i,使相界面上的间断关系(守恒关系)和各种相间作用的表达式大为简化,物理意义更加简明. 但是,文献[1～6]的推导都未计入固相的碰撞应力(含碰撞压强,下同),因此,只适用于稀疏气-固流和液-固流. Anderson 和 Jackson[7]等给出的二相流方程中虽已包含了碰撞应力,但没有严谨的推导过程,是一种半经验的分析结果.

流体力学方法假设整个流场是连续的,或只有个别几个间断面(激波或自由面等). 二相流处理具有大量运动间断面的介质的运动问题,Drew-Ishii 方法的特点正是它成功地将这种具有大量间断的问题纳入到连续介质力学范畴来研究,而不失它的严谨性.

但是,Drew 和 Ishii 等[1～6]关于相界面两边的守恒关系的处理有一定的局限性. 施于颗粒表面的各种作用中,他们只计入了来自流体的作用,相应地,颗粒内部的应力也只有本文所

1997-04-10 收稿,1997-08-18 收修改稿
*国家自然科学基金资助项目(批准号:19672065)

称的本底应力部分，相界面两边的守恒关系也就只是这种本底应力(和其他本底量)之间的关系式．事实上，施于颗粒表面的还有来自其他颗粒的作用——碰撞作用，而颗粒内部的碰撞应力正是这种表面作用引起的．由于颗粒-颗粒的碰撞相互作用，对于控制体内的固相分系统来说是一种内部作用，对该分系统的守恒性质没有贡献．可能是这个原因，这种碰撞相互作用在过去的研究[1~6]中一直被忽略．但其结果是：颗粒内部应力中的碰撞应力部分丢失了．

涉及到碰撞应力，有两类研究方法：一是像气体分子动理学所采用的那样，分子在进出控制体时总是一个整体，不可分割，用分子中心位置确定它在某瞬时 t 是整体属于体系还是整体属于外界．在二相流中也有用这样方法研究的，Anderson 和 Jackson[7] 推导二相流基本方程所用的方法就属于这一种．在这种方法中，一个体系外的分子(或颗粒)与一个体系内的分子(或颗粒) P 碰撞时，它传递给分子(或颗粒) P 的动量也就是体系在这次碰撞中从外界获得的动量，不需要涉及分子(或颗粒)内部的应力．

二是 Drew-Ishii 采用的方法，他们不认为颗粒是整体地进出控制体的，控制体边界上的颗粒，被边界分割为分别属于体系和外界的两部分．正是这种处理方法，使 Drew-Ishii 方法在研究二相流时具有一系列突出的优点．本文在 Drew-Ishii 模式下研究碰撞应力，就不得不涉及颗粒内部的应力．在一次(体系)边界上的颗粒 P 与体系外颗粒 B 的碰撞中，颗粒 B 传递给颗粒 P 的动量中，只有一部分属于体系在这次碰撞中从外界获得的动量，因为颗粒 P 只有一部分属于体系．

本文将沿用 Drew 和 Ishii 的方法并加以发展，推导出包括碰撞应力和碰撞热流在内的二相流基本方程，以便应用到像流化床等装置内遇到的稠密二相流．同时，还证明了：作为固相应力的一部分，碰撞应力会出现在固相的平衡方程中，但是，在用固相应力表示的相间力(和相间能量交换率)中，只涉及本底应力，不含碰撞应力．

1　瞬时、局部的相守恒方程和相界面上的间断关系

本文主要针对气-固流和液-固流研究，不计表面张力效应，下标 p 代表固相，下标 f 代表流体相．如果忽略所有的碰撞项(带下标 col)，则得到的方程组对于相 f 和相 p 是对称的，也近似适用于气-液流．

设 V 是由静止封闭曲面 A 所围的控制体，其中含有相 f 和相 p 两种运动介质，而 $A_i(t)$ 是 V 内两相之间的分界面，它把 V 划分为 $V_f(t)$ 和 $V_p(t)$ 两部分(见图 1)．$\mathbf{n}_f(t)$ 和 $\mathbf{n}_p(t)$ 都是相界面 $A_i(t)$ 上的单位矢量，分别是相 f 和相 p 的外法线单位矢量，因此

$$\mathbf{n}_f(t) = -\mathbf{n}_p(t).$$

设 δA 是控制体边界 A 上的面元，$\mathbf{n}$ 是它的外法线上的单位矢量．在某瞬时 t，A 中有一部分——记为 $A_f(t)$——在相 f 中通过，另一部分 $A_p(t)$ 在相 p 中通过．$A_f(t)$ 和 $A_i(t)$ 构成相 f 所占的体积 $V_f(t)$ 的全部边界，$A_p(t)$ 和 $A_i(t)$ 构成相 p 所占的体积 $V_p(t)$ 的全部边界．控制体 V 中的质量、动量、总能

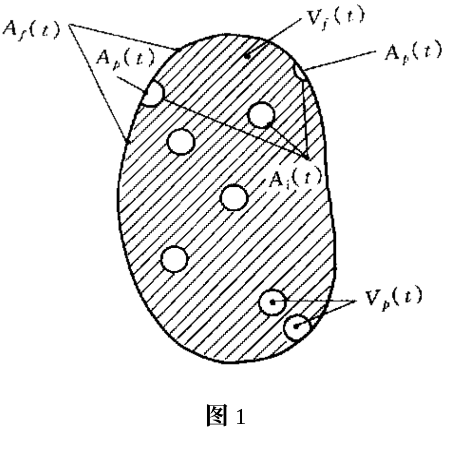

图 1

量和熵的平衡方程,可近似地统一表示为[1~6]:

$$\delta\left[\sum_{k=f,p}\int_k \rho_k\psi_k \mathrm{d}V\right] \approx \delta t\left[-\sum_{k=f,p}\int_k \rho_k(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_k)\psi_k \mathrm{d}A + \sum_{k=f,p}\int_k \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_k \mathrm{d}A + \sum_{k=f,p}\int_k \rho_k\zeta_k \mathrm{d}V + \int_i \zeta_i \mathrm{d}A\right], \tag{1}$$

当 δt 很小时,上式几乎成了等式.

(1)式的左边是控制体 V 内 ψ 总量在 δt 时间内的增长量,它由以下 4 部分组成:右边括弧中的第 1 项是 δt 内通过对流从外界进入控制体的 ψ 总量;第 2 项和第 3 项分别是通过面作用和体作用,外界对控制体内量 ψ 的贡献,第 3 项中还包括各相内部不可逆过程产生的 ψ 量;第 4 项是 δt 时间内由相界面上的不可逆过程自发生成的 ψ 量和在碰撞过程中从另一相界面元传入的 ψ 量. 式 $\int_{A_i}\cdots\mathrm{d}A$ 的积分域是控制体 V 内的所有相界面 A_i.

在不同的平衡方程中,量 ψ, $\mathbf{J}$, ζ 和 ζ_i 的具体表达式示于表 1,其中 ρ_k, $\mathbf{v}_k$, e_k, s_k, T_k, $(-\mathbf{P}_k)$, $\mathbf{q}_k$, $\mathbf{b}_k$, q_k 和 Δ_k 分别是相 $k(k=f,p)$ 的质量密度、速度、比内能、比熵、温度、应力张量、热流通量、彻体力、体加热率和熵增率. Δ_i 由 $\Delta_{i,N}$ 和 $\Delta_{i,\mathrm{col}}$ 两部分组成, $\mathbf{B}_{\mathrm{col}}$, $(\mathbf{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathbf{v}_i+Q_{\mathrm{col}})$ 和 $\Delta_{i,\mathrm{col}}$ 分别是由于颗粒-颗粒碰撞而造成的相界面的动量、总能量和熵的生成率, $\Delta_{i,N}$ 是由于相间作用造成的相界面的熵增率. 根据动量和能量守恒原理和热力学第二定律,显然有

$$\delta t\int_i \mathbf{B}_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A = 0,\quad \delta t\int_i(\mathbf{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathbf{v}_i + Q_{\mathrm{col}})\mathrm{d}A = 0. \tag{2}$$

$$\delta t\int_i(\Delta_{i,N}+\Delta_{i,\mathrm{col}})\mathrm{d}A \geq 0.$$

由于相间相互作用与碰撞相互作用基本上是独立进行的,几乎完全不耦合,所以

$$\delta t\int_i \Delta_{i,\mathrm{col}}\mathrm{d}A \geq 0,\quad \delta t\int_i \Delta_{i,N}\mathrm{d}A \geq 0. \tag{3}$$

表 1

	ψ_k	$\mathbf{J}_k$	ζ_k	$\zeta_i=\zeta_{i,N}+\zeta_{i,\mathrm{col}}$		I_k
				$\zeta_{i,N}$	$\zeta_{i,\mathrm{col}}$	
质量方程	1	0	0	0	0	Γ_k
动量方程	$\mathbf{v}_k$	$-\mathbf{P}_k$	$\mathbf{b}_k$	0	$\mathbf{B}_{\mathrm{col}}$	$\mathbf{M}_k$
总能量方程	$e_k+\frac{1}{2}v_k^2$	$-\mathbf{P}_k\cdot\mathbf{v}_k-\mathbf{q}_k$	$\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{v}_k+q_k$	0	$\mathbf{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathbf{v}_i+Q_{\mathrm{col}}$	E_k
熵方程	s_k	$-\mathbf{q}_k/T_k$	$\Delta_k/\rho_k+q_k/T_k$	$\Delta_{i,N}$	$\Delta_{i,\mathrm{col}}$	

对于动量方程和总能量方程,(1)式右边第 4 项,虽然就控制体整体来说是零(参见(2)式),正是这个原因,在以前的研究[1~6]中此项一直被忽略,但是,对于每一个相界面面元来说,这些量(即(2)式中的被积函数)不一定是零,因此,在本文中保留了这些量,而且成为本文推导的关键点之一.

当 δt 在宏观意义上趋于零时[1)],(1)式趋近于

1) 确切地说是 $\delta t\to\varepsilon$,其中 $\varepsilon\ll T^*$, T^*是宏观量变化的特征时间

$$\sum_{k=f,p}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_k \rho_k\psi_k \mathrm{d}V + \int_k \rho_k(\mathrm{n}\cdot\mathrm{v}_k)\psi_k \mathrm{d}A - \int_k \mathrm{n}\cdot\mathrm{J}_k \mathrm{d}A - \int_k \rho_k\zeta_k \mathrm{d}V\right] - \int_i \zeta_i \mathrm{d}A = 0,$$

利用 Leibniz 法则和 Gauss 定理[4,6],上式可简化为

$$\sum_{k=f,p}\int_k\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k\psi_k) + \nabla\cdot(\rho_k \mathrm{v}_k\psi_k) - \nabla\cdot\mathrm{J}_k - \rho_k\zeta_k\right]\mathrm{d}V -$$

$$\int_i\left[\sum_{k=f,p}(\dot{m}_k\psi_{ki} - \mathrm{n}_k\cdot\mathrm{J}_{ki}) + \zeta_i\right]\mathrm{d}A = 0, \tag{4}$$

其中 $\dot{m}_k$ 是在单位时间、单位相界面面积内,相 k 由于相变流失的质量,它定义为

$$\dot{m}_k = \mathrm{n}_k\cdot\rho_{ki}(\mathrm{v}_{ki} - \mathrm{v}_i),\ k = f, p, \tag{5}$$

v_i 是相界面运动的速度矢,下标 ki 表示相界面附近相 k 的值.

由于控制体 V 是任意选取的,对于任何这样的控制体(4)式均成立,这说明该式的 3 个被积函数均为零,即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k\psi_k) + \nabla\cdot(\rho_k\mathrm{v}_k\psi_k) - \nabla\cdot\mathrm{J}_k - \rho_k\zeta_k = 0,\quad k = f, p, \tag{6}$$

$$\sum_{k=f,p}(\dot{m}_k\psi_{ki} - \mathrm{n}_k\cdot\mathrm{J}_{ki}) + \zeta_i = 0. \tag{7}$$

(6)式是相 $k\ (k = f, p)$ 的瞬时、局部的质量($\psi_k = 1$)、动量($\psi_k = \mathrm{v}_k$)和能量($\psi_k = e_k + 0.5v_k^2$)守恒方程和熵方程($\psi_k = s_k$),它对相 k 内部的任一微元体均适用. (7)式是相界面上的间断关系,对任一相界面面元均适用.

由于切向速度通过相界面没有间断(见后面的(27)式),由(5)式可得[1~6]

$$\mathrm{v}_{ki} - \mathrm{v}_i = \frac{\dot{m}_k}{\rho_{ki}}\mathrm{n}_k,\ k = f, p. \tag{8}$$

如果没有相变,那么 $\mathrm{v}_{fi} = \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_{pi}$,一般情况下这三者不相等.

2　颗粒-颗粒碰撞过程的分析

(1) 对于某颗粒 P 上的某面元 ΔA_P 来说,当它正与另一颗粒 B 发生碰撞时,它与流体相就没有接触,所以一定不会有相变,必定有

$$(\mathrm{v}_{pi})_{\Delta A_P} = (\mathrm{v}_i)_{\Delta A_P}. \tag{9}$$

(2) 设在时刻 t,面元 ΔA_P 位于控制体 V 内,在当时若有其他颗粒 B 的某面元 ΔA_B 与之发生碰撞,那么面元 ΔA_B 也必定位于控制体 V 内.

(3) 由于碰撞时互相接触的两个相界面面元总是成对地位于控制体 V 内,而在其他相界面上,(2)式和(3)$_1$式的被积函数均为零(见下面的(29)、(21)和(26)式),所以,(2)式和(3)$_1$式,可简化为

$$\sum_{(b)}\sum_{(a)}(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A) = 0,\quad \sum_{(b)}\sum_{(a)}[(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_i + Q_{\mathrm{col}})\mathrm{d}A] = 0,\quad \sum_{(b)}\sum_{(a)}(\Delta_{i,\mathrm{col}}\mathrm{d}A) \geq 0,$$

其中 $\sum_{(a)}$ 是对碰撞的两个面元求和, $\sum_{(b)}$ 是对控制体内、在 δt 间隔内发生碰撞的所有面元对

求和. 由于以上各式对于任意选取的控制体 V 均成立,所以

$$\sum_{(\alpha)}(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A) = 0, \quad \sum_{(\alpha)}[(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i + Q_{\mathrm{col}})\mathrm{d}A] = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{(\alpha)}(\Delta_{i,\mathrm{col}}\mathrm{d}A) \geq 0, \tag{11}$$

以上各式正是碰撞过程中动量守恒原理、能量守恒原理和熵增原理的反映. 但是,机械能 $\sum_{(\alpha)}(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A)$ 在碰撞中不一定守恒.

(4) 下面分析 $\left[\int_{A_i}\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A\right]$ 和 $\left[\int_{A_i}Q_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A\right]$ 的符号.

设 $(\mathrm{v}_i)_P$ 和 $(\mathrm{v}_i)_B$ 是互相碰撞的两面元 ΔA_P 和 ΔA_B 的速度,不难证明,它们的法向分量在碰撞过程中必定相等;对于完全粗糙球碰撞模型,则它们的切向分量也相等,于是 $(\mathrm{v}_i)_B = (\mathrm{v}_i)_P$. 根据 (10) 式$_1$,对于这种模型有

$$\sum_{(\alpha)}(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A) = 0, \quad \delta t\int_{A_i}\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A = 0. \tag{12}$$

对于完全光滑球模型,由于一对碰撞面元之间没有切向的动量交换(即 $\mathrm{B}_{\mathrm{col}}$ 的切向分量等于零),因此,(12) 式也成立. 由 (12)、(10)$_2$ 和 (2)$_2$ 式又可得到

$$\sum_{(\alpha)}(Q_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A) = 0, \quad \delta t\int_{A_i}Q_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A = 0.$$

不论碰撞是不是完全弹性的,对于完全粗糙表面和完全光滑表面的碰撞模型,在碰撞表面都没有摩擦生热的过程. 如果碰撞不是完全弹性的,则碰撞过程是有机械能损失的,但这种损失不是发生在碰撞表面,而是在颗粒内部.

对于一般的碰撞模型,即 $\mathrm{B}_{\mathrm{col}}$ 的切向分量不为零、而且一对碰撞面元之间又有切向速度差的碰撞,由于机械能在表面上部分地转换为热,所以

$$\sum_{(\alpha)}(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A) < 0, \quad \delta t\int_{A_i}\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot \mathrm{v}_i\mathrm{d}A < 0, \tag{13}$$

$$\sum_{(\alpha)}(Q_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A) > 0, \quad \delta t\int_{A_i}Q_{\mathrm{col}}\mathrm{d}A > 0. \tag{14}$$

(5) 即使没有碰撞,颗粒内部也存在应力和热流,这是响应周围流体作用于颗粒表面的应力和热流而出现的,本文称之为本底应力和本底热流. 当发生碰撞时,碰撞表面上的作用力将以应力波的形式在颗粒中传播和反射,一种额外的应力(本文称之为碰撞应力)叠加在本底应力上. 因此,固相应力可表示为本底应力 $(-\mathrm{n}\cdot \mathrm{P}_{p,N})$ 和碰撞应力 $(-\mathrm{n}\cdot \mathrm{P}_{p,\mathrm{col}})$ 之和,即

$$\mathrm{P}_p = \mathrm{P}_{p,N} + \mathrm{P}_{p,\mathrm{col}}, \tag{15}$$

类似地,由于碰撞产生的表面传热率 Q_{col} 在颗粒内部引起额外的热流,因此,固相热流也可表示为本底热流 $(\mathrm{n}\cdot \mathrm{q}_{p,N})$ 和碰撞热流 $(\mathrm{n}\cdot \mathrm{q}_{p,\mathrm{col}})$ 之和,即

$$\mathrm{q}_p = \mathrm{q}_{p,N} + \mathrm{q}_{p,\mathrm{col}}. \tag{16}$$

一般说来,碰撞的力效应比热效应大得多, $\mathrm{P}_{p,\mathrm{col}}$ 比 $\mathrm{q}_{p,\mathrm{col}}$ 重要得多.

即使没有碰撞,如果相间作用存在某种不可逆性,那么相界面上也有一定的熵增率;当发生碰撞时,在颗粒表面上又可能有新的不可逆机理,因此,相界面上的熵增率 Δ_i 可表示为本底熵增率 $\Delta_{i,N}$ 和碰撞熵增率 $\Delta_{i,\mathrm{col}}$ 之和,即

$$\Delta_i = \Delta_{i,N} + \Delta_{i,\mathrm{col}}. \tag{17}$$

(6) 由于相间作用与碰撞作用彼此独立进行,因此,间断关系(7) 可分解为以下两式:

$$\dot{m}_f \psi_{fi} - \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{J}_{fi} + \dot{m}_p \psi_{pi} - \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{J}_{pi,N} + \zeta_{i,N} = 0, \tag{18}$$

$$- \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{J}_{pi,\mathrm{col}} + \zeta_{i,\mathrm{col}} = 0, \tag{19}$$

当 $\psi = \mathbf{v}, \left(e + \frac{1}{2}v^2\right)$ 和 s 时,这些间断关系分别为((20) 和(22) 式的第 2 个等式,是作为相界面上的应力张量 $\mathbf{P}_i$ 和能流通量 $\mathbf{q}_i$ 的定义引入的):

$$-(\dot{m}_p \mathbf{v}_{pi} + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,N}) = (\dot{m}_f \mathbf{v}_{fi} + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{P}_{fi}) = \dot{m}_f \mathbf{v}_i + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{P}_i, \tag{20}$$

$$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,\mathrm{col}} = - \mathbf{B}_{\mathrm{col}}. \tag{21}$$

$$-\left[\dot{m}_p\left(e_{pi} + \frac{1}{2}v_{pi}^2\right) + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,N} \cdot \mathbf{v}_{pi} + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,N}\right] =$$

$$\left[\dot{m}_f\left(e_{fi} + \frac{1}{2}v_{fi}^2\right) + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{P}_{fi} \cdot \mathbf{v}_{fi} + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{q}_{fi}\right] = \frac{1}{2}v_i^2 \dot{m}_f + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{q}_i, \tag{22}$$

$$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,\mathrm{col}} \cdot \mathbf{v}_{pi} + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,\mathrm{col}} = - \mathbf{B}_{\mathrm{col}} \cdot \mathbf{v}_i - Q_{\mathrm{col}}, \tag{23}$$

$$-\left[\dot{m}_f s_{fi} + \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{q}_{fi}/T_{fi} + \dot{m}_p s_{pi} + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,N}/T_{pi}\right] = \Delta_{i,N} \geq 0, \tag{24}$$

$$-\frac{\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,\mathrm{col}}}{T_{pi}} = \Delta_{i,\mathrm{col}}, \tag{25}$$

间断关系按相间相互作用和碰撞相互作用分解,是本文推导的另一关键点.

由(9) 、(21) 、(23) 和(25) 式可得

$$- \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,\mathrm{col}} = Q_{\mathrm{col}}, \quad \frac{Q_{\mathrm{col}}}{T_{pi}} = \Delta_{i,\mathrm{col}}. \tag{26}$$

个别面元上的$\Delta_{i,\mathrm{col}}$可正也可负,但是,根据(11) 式,一对碰撞表面的两个$\Delta_{i,\mathrm{col}}$之和必定不小于零. 如果$(T_{pi})_{\Delta A_P} = (T_{pi})_{\Delta A_B}$,并且$(Q_{\mathrm{col}})_{\Delta A_P} + (Q_{\mathrm{col}})_{\Delta A_B} = 0$(这意味着碰撞表面是完全光滑的或完全粗糙的) ,则(11) 式取等号,否则就应取大于号.

(7) 如果相界面上的相间作用过程是可逆的,即$\Delta_{i,N} = 0$,则由(24) 、(20) 和(22) 式可推导出(参见文献[2 ,6]) :

$$\mathbf{v}_{pi,t} = \mathbf{v}_{fi,t} = \mathbf{v}_{i,t}, \tag{27}$$

$$T_{pi} = T_{fi} = T_i, \quad g_{pi} \approx g_{fi}, \tag{28}$$

其中 $\mathbf{v}_{,t}$是速度的切向分量, T_i 是相界面的温度, g 是 Gibbs 函数.

(8) 当颗粒 P 与另一颗粒 B 发生碰撞时,只有很小的面元(称为碰撞表面,记为 A_C) 与颗粒 B 接触. 颗粒 P 的其余表面称为自由表面,记为 A_F. 当碰撞结束后,原来的碰撞表面也变成了自由表面. 可以证明,在所有的自由表面上,碰撞应力的 3 个分量必定都为零,碰撞热流也是零,即

$$(\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,\mathrm{col}})_{A_F} = 0, \quad (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,\mathrm{col}})_{A_F} = 0, \tag{29}$$

因此,碰撞应力(即动量流) 和碰撞热流通过自由表面是连续的,由它们组合得到的碰撞能流$(\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_{pi,\mathrm{col}} \cdot \mathbf{v}_{pi} + \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{q}_{pi,\mathrm{col}})_{A_F}$也是连续的.

对于碰撞表面上的面元$\Delta A_P (\Delta A_P \in A_C)$,虽然碰撞应力和碰撞能流不为零,但对于发生

碰撞的一对碰撞表面来说,由于(下式中利用了:$(\mathrm{n}_p)_{\Delta A_B} = -(\mathrm{n}_p)_{\Delta A_p}$)

$$(\mathrm{n}_p)_{\Delta A_p}\cdot\left[(\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_p} - (\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_B}\right] = (\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_p} + (\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_B} = -\left[(\mathrm{B}_{\mathrm{col}})_{\Delta A_p} + (\mathrm{B}_{\mathrm{col}})_{\Delta A_B}\right] = 0, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{n}_p)_{\Delta A_p}\cdot\left[(\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{q}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_p} - (\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{q}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_B}\right] &= \\ (\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{n}_p\cdot\mathrm{q}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_p} + (\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{n}_p\mathrm{q}_{pi,\mathrm{col}})_{\Delta A_B} &= \\ -\left[(\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_i + Q_{\mathrm{col}})_{\Delta A_p} + (\mathrm{B}_{\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_i + Q_{\mathrm{col}})_{\Delta A_B}\right] &= 0,\end{aligned} \tag{31}$$

所以,碰撞应力和碰撞能流通过碰撞表面时也是连续的.

颗粒表面上的碰撞应力和碰撞能流连续性的论证,是本文推导的又一关键点.

3 平均的二相流基本方程组

对于通过相界面时没有间断的那些量,如碰撞应力($\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}$)和碰撞能流($\mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{n}_p\cdot\mathrm{q}_{pi,\mathrm{col}}$),则导数的平均值等于平均值的导数,即

$$\overline{\nabla\cdot\mathrm{A}} = \nabla\cdot\overline{\mathrm{A}},\quad 其中:\mathrm{A} = \mathrm{P}_{p,\mathrm{col}}\ 或\ (\mathrm{P}_{p,\mathrm{col}}\cdot\mathrm{v}_p + \mathrm{q}_{p,\mathrm{col}}). \tag{32}$$

对于通过相界面时有间断的那些量,如质量密度,动量密度,本底应力和本底热流等,则有[1~6]

$$\frac{\partial\overline{F_k}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{F_k}}{\partial t} - \frac{1}{V}\int_{A_i}\mathrm{n}_k\cdot\mathrm{v}_i F_{ki}\,\mathrm{d}A,\qquad F_k = \boldsymbol{\rho}_k,(\boldsymbol{\rho}_k e_k),(\boldsymbol{\rho}_k s_k)\ 等, \tag{33}$$

$$\overline{\nabla\cdot\mathrm{A}_k} = \nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}_k + \frac{1}{V}\int_{A_i}\mathrm{n}_k\cdot\mathrm{A}_{ki}\,\mathrm{d}A,\quad \mathrm{A}_k = (\boldsymbol{\rho}_k\mathrm{v}_k),(\boldsymbol{\rho}_k\mathrm{v}_k\mathrm{v}_k),\mathrm{P}_f,\ \mathrm{P}_{p,N},\ \mathrm{q}_f,\mathrm{q}_{p,N}\ 等. \tag{34}$$

对(6)式两边取平均,并利用以上 3 式,整理后可得($k = f, p$)[6]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\hat{\mathrm{v}}_k) = \boldsymbol{\Gamma}_k, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\hat{\mathrm{v}}_k) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\hat{\mathrm{v}}_k\hat{\mathrm{v}}_k) = -\nabla\cdot(\boldsymbol{\alpha}_k\overline{\overline{\mathrm{P}}}_k + \mathrm{P}_k^f) + \boldsymbol{\alpha}_k\overline{\overline{P}}_k\mathrm{b}_k + \mathrm{M}_k, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\left(\hat{e}_k + e_k^f + \frac{1}{2}\hat{\mathrm{v}}_k^2\right)\right] + \nabla\cdot\left[\boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\hat{\mathrm{v}}_k\left(\hat{e}_k + e_k^f + \frac{1}{2}\hat{\mathrm{v}}_k^2\right)\right] &= \\ -\nabla\cdot(\boldsymbol{\alpha}_k\overline{\overline{\mathrm{P}}}_k\cdot\hat{\mathrm{v}}_k + \mathrm{P}_k^f\cdot\hat{\mathrm{v}}_k) - \nabla\cdot(\boldsymbol{\alpha}_k\overline{\overline{\mathrm{q}}}_k + \mathrm{q}_k^f) + \boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\mathrm{b}_k\cdot\hat{\mathrm{v}}_k + \boldsymbol{\alpha}_k\bar{\boldsymbol{\rho}}_k\tilde{q}_k + E_k&,\end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_f = -\frac{1}{V}\int_{A_i}\dot{m}_k\,\mathrm{d}A, \tag{38}$$

$$\mathrm{M}_f = -\frac{1}{V}\int_{A_i}(\dot{m}_f\mathrm{v}_i + \mathrm{n}_f\cdot\mathrm{P}_i)\,\mathrm{d}A = \frac{1}{V}\int_{A_i}(\dot{m}_p\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,N})\,\mathrm{d}A = -\mathrm{M}_p. \tag{39}$$

$$\begin{aligned}E_f = -\frac{1}{V}\int_{A_i}\left[\frac{1}{2}\dot{m}_f v_i^2 + \mathrm{n}_f\cdot\mathrm{P}_i\cdot\mathrm{v}_i + \mathrm{n}_f\cdot\mathrm{q}_i\right]\mathrm{d}A &= \\ \frac{1}{V}\int_{A_i}\left[\dot{m}_p\left(e_{pi} + \frac{1}{2}v_{pi}^2\right) + \mathrm{n}_p\cdot\mathrm{P}_{pi,N}\cdot\mathrm{v}_{pi} + \mathrm{n}_p\cdot\mathrm{q}_{pi,N}\right]\mathrm{d}A &= -E_p,\end{aligned} \tag{40}$$

α_k 是相 k 的体积分数. $\hat{v}_k$ 是相 k 的质量加权的平均速度. v'_k 是脉动速度,它包括湍流脉动速度和由于颗粒-颗粒碰撞和颗粒-壁面碰撞引起的脉动速度,$(-P^f_k)$ 和 q^f_k 是这种脉动速度引起的应力张量和热流通量,$(-\overline{P}_k)$ 是相 k 的平均应力张量,或称分应力张量,$(-\overline{\overline{P}}_k)$ 是相平均的平均应力张量. $\overline{\rho}_k$ 是相 k 的平均密度,或称分密度,$\overline{\overline{\rho}}_k$ 是相平均的平均密度. 当 ρ_k = 常数时,$\overline{\overline{\rho}}_k = \rho_k$. $\hat{e}_k$ 和 e^f_k 分别是相 k 的(质量加权)平均内能和脉动动能,关于 $\overline{\overline{\rho}}_k$, $\overline{\overline{P}}_k$, $\overline{\overline{q}}_k$, $\hat{v}_k$, e_k, P^f_k, q^f_k 和 e^f_k 的定义式,可参见文献[6]. Γ_k, M_k 和 E_k 是两相之间的质量、动量和能量交换率.

4　结论

(1) 在颗粒表面有两种相互作用,相间相互作用和碰撞相互作用,彼此独立进行. 虽然碰撞引起的动量或能量相互作用,就控制体整体以及每一对相互碰撞的面元来说是零,但是,对于每一个相界面面元来说,这些作用的效果不是零. 正是这种相互作用引发出颗粒内部的碰撞应力和碰撞热流.

(2) 相间作用引发的颗粒内部应力称为本底应力,固相应力由本底应力和碰撞应力两部分组成.

(3) 与本底应力不同,碰撞应力在颗粒表面上没有间断,因此,它的导数平均值等于平均值的导数.

(4) 对于控制体内固相的动量平衡来说,固相应力的上述两部分均有贡献(见(36)式),对于相间力 M_p 来说,如果不计相变效应,它只与(相间作用诱发的)本底应力有关,是控制体内各相界面面元上本底应力的总和(见(39)式的最后部分),与碰撞应力无关.

(5) 本文采用 Drew-Ishii 方法推导了包括碰撞应力效应的二相流平均运动方程组,而不失 Drew-Ishii 方法原有的严谨性.

参　考　文　献

1　Drew D A, Segel L A. Averaged equations for two-phase flows. Studies in Applied Math, 1971, 50: 3

2　Ishii M. Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Paris: Eyrolles, 1975

3　Boure J A. Delhaye J M. General equations and two-phase flow modeling. In: Hetsroni G, ed. Handbook of Multiphase Systems. New York: McGraw-Hill, 1982

4　Drew D A, Lahey R T. Analytical modeling of multiphase flow. In: Roco M C, ed. Particulate Two-Phase Flow. Dxford: Butterworth-Heinemann, 1993

5　刘大有,王柏懿. 有相间质量交换的悬浮体两相流基本方程. 中国科学,A 辑,1990,(5):495～504

6　刘大有. 二相流体动力学. 北京:高等教育出版社,1993,444～484

7　Anderson T B, Jackson R. A fluid mechanical description of fluidized beds: Equation of motion. Ind Engng Chem Fundam, 1967,(6): 527～539