第 35 卷 第 2 期
2003 年 3 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 35, No. 2
Mar., 2003

一个基于非均匀网格上的二阶基本无振荡差分格式[1)]

申义庆 *,† 高 智 †
*(清华大学数学科学系, 北京 100084)
†(中国科学院力学研究所高温气动实验室, 北京 100080)

摘要 在基本无振荡格式的构造中, 将通常的对流通量 f 的逼近方式推广到对通量导数的逼近, 这一构造方法可以有效地应用到非均匀或非结构网格. 直接基于非均匀网格上, 构造了一个二阶的基本无振荡 (ENO) 差分格式. 该格式具有形式简单, 对网格的划分灵活, 与传统格式相比不增加计算量等优点. 几个数值算例证明了格式的有效性.

关键词 TVD 格式, ENO 格式, 非均匀网格

引 言

TVD(total variation diminishing) 格式 [1,2] 和 ENO(essentially non-oscillatory) 格式 [3,4] 是近 20 年发展起来的高精度高分辨率格式, 众多的 TVD 或 ENO 格式都是基于等距网格来进行构造的, 对于物理尺度变化较大的区域, 通常采用坐标变换, 在新坐标系下划分为均匀计算网格来进行数值计算, 当物理尺度变化剧烈时坐标变换带来变化悬殊的 Jacobi 值, 因此对物理量导数的逼近将出现较大的误差 [5]. 如在高 Re 数流动计算中, 由于边界层厚度很小, 通常在壁面进行加密变换, 从而导致物理网格尺度变化很大; 而且对于很多不规则的流动区域, 要进行坐标变换而获得规则的计算区域并不是很容易的事.

本文直接基于非均匀网格, 构造了一个二阶的基本无振荡差分格式. 首先引入 TVD 格式的限制器函数将逼近导数的一阶偏心、二阶中心和二阶偏心格式组合起来, 给出了对导数值的一个二阶差分逼近算子, 将此算子应用于微分方程的数值计算中, 得到的数值结果是基本上无振荡的. 进一步推广此方法, 将导数的一阶偏心、二阶中心和二阶偏心近似在非均匀网格上计算, 用同样方法得到一个新的二阶基本无振荡格式. 该格式具有形式简单, 对网格的划分灵活, 与传统格式相比不增加计算量等优点.

利用一阶波动方程检验了格式的精度, 定常 Burgers 方程检验了格式对定常正激波和无黏非定常 Burgers 方程检验格式对运动激波的捕捉能力, 一维激波管问题验证了格式在方程组中的应用.

1 新的导数差分逼近算子

对双曲守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{1}$$

空间导数 $f'=\partial f/\partial x$ 的二阶中心差分格式为

$$f_j'^{(2C)}\approx\frac{1}{2\Delta x}(f_{j+1}-f_{j-1}) \tag{2}$$

二阶偏心格式为

$$f_j'^{(2U)}\approx\begin{cases}\dfrac{1}{2\Delta x}[3f_j-4f_{j-1}+f_{j-2}]\\ \dfrac{1}{2\Delta x}[-f_{j+2}+4f_{j+1}-3f_j]\end{cases} \tag{3}$$

显然可见, 在 5 点 $(x_{j-2},x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2})$ 上, 对其相邻的 3 点 $(x_{j+r-2},x_{j+r-1},x_{j+r})$, f' 的二阶逼近分别对应着上面的 3 种形式, 其中 $r=0,1,2$.

对式 (2), 式 (3) 作类似文献 [6,7] 的分析可知, 二阶迎风格式为负色散格式, 二阶中心格式为正色散格式. 由色散 (频散) 控制的思想构造高精度、高分辨率差分格式, 国内学者已有较深入的研究, 并获得了性质较好、应用较广的数值格式 [7,8]. 这里我

2001-07-08 收到第一稿, 2002-08-26 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目 (10272106) 和中国科学院力学研究所高温气动实验室资助项目.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

们将作进一步的推广应用，将式 (2) 和式 (3) 分开写成下列形式

$$\left.\begin{aligned} f_j'^{(2C)} &\approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_j - f_{j-1} + \frac{1}{2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})\Big] + \\ &\quad O(\Delta x^2) \\ f_j'^{(2U)} &\approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_j - f_{j-1} + \frac{1}{2}(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})\Big] + \\ &\quad O(\Delta x^2) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} f_j'^{(2C)} &\approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_{j+1} - f_j - \frac{1}{2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})\Big] + \\ &\quad O(\Delta x^2) \\ f_j'^{(2U)} &\approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_{j+1} - f_j - \frac{1}{2}(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)\Big] + \\ &\quad O(\Delta x^2) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则可引入 TVD 格式中使用的限制器函数，对式 (4) 和式 (5) 中的不同部分进行选择，即：

对 $a = \partial f/\partial u \geq 0$

$$f_j' \approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_j - f_{j-1} + \frac{1}{2}\min\text{i}\bmod(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}, f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})\Big] \tag{6}$$

对 $a = \partial f/\partial u \leq 0$

$$f_j' \approx \frac{1}{\Delta x}\Big[f_{j+1} - f_j - \frac{1}{2}\min\text{i}\bmod(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}, f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)\Big] \tag{7}$$

为方便在下节中的推广应用，利用一阶迎风逼近

$$f_j'^{(1U)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}(f_j - f_{j-1}), & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_j \geq 0 \\ \dfrac{1}{\Delta x}(f_{j+1} - f_j), & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_j < 0 \end{cases} \tag{8}$$

将 (6),(7) 式写为另一种形式

$$f_j' \approx f_j'^{(1U)} + \frac{1}{2}\min\text{i}\bmod(f_j'^{(2U)} - f_j'^{(1U)}, f_j'^{(2C)} - f_j'^{(1U)}) \tag{9}$$

式 (6),(7) 或式 (9) 是在均匀网格上进行的，第 2 节我们将从 (9) 式直观地构造非均匀网格二阶基本无振荡差分格式.

2 非均匀网格二阶基本无振荡格式的构造

下面我们基于非均匀网格构造式 (9) 形式的二阶基本无振荡格式：

对 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_j \geq 0$ 时，有

一阶迎风差分

$$f_j'^{(1U)} = a_{1,j} f_j + b_{1,j} f_{j-1} \tag{10}$$

二阶迎风差分

$$f_j'^{(2U)} = a_{2,j} f_j + b_{2,j} f_{j-1} + c_{2,j} f_{j-2} \tag{11}$$

二阶中心差分

$$f_j'^{(2C)} = a_{2,j} f_j + b_{3,j} f_{j-1} + c_{3,j} f_{j+1} \tag{12}$$

设 $h_j = x_{j+1} - x_j$，通过简单的 Taylor 展式，我们可以确定式 (10)~(12) 里的系数

$$\begin{cases} a_{1,j} + b_{1,j} = 0 \\ -h_{j-1} b_{1,j} = 1 \end{cases}$$

得：$b_{1,j} = -1/h_{j-1}, a_{1,j} = -b_{1,j}$

$$\begin{cases} a_{2,j} + b_{2,j} + c_{2,j} = 0 \\ -b_{2,j} h_{j-1} - c_{2,j}(h_{j-1} + h_{j-2}) = 1 \\ b_{2,j} h_{j-1}^2 + c_{2,j}(h_{j-1} + h_{j-2})^2 = 0 \end{cases}$$

得：$c_{2,j} = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}h_{j-2} + h_{j-2}^2}$，$b_{2,j} = \dfrac{h_{j-1} + h_{j-2}}{-h_{j-1}h_{j-2}}$，$a_{2,j} = -b_{2,j} - c_{2,j}$

$$\begin{cases} a_{3,j} + b_{3,j} + c_{3,j} = 0 \\ -b_{3,j} h_{j-1} + c_{3,j} h_j = 1 \\ b_{3,j} h_{j-1}^2 + c_{3,j} h_j^2 = 0 \end{cases}$$

得：$c_{3,j} = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}h_j + h_j^2}$，$b_{3,j} = \dfrac{-h_j}{h_{j-1}^2 + h_{j-1}h_j}$，$a_{3,j} = -b_{3,j} - c_{3,j}$

对于 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_j < 0$ 时，

一阶迎风差分

$$f_j'^{(1U)} = a_{1,j} f_j + b_{1,j} f_{j+1} \tag{13}$$

二阶迎风差分

$$f_j'^{(2U)} = a_{2,j} f_j + b_{2,j} f_{j+1} + c_{2,j} f_{j+2} \tag{14}$$

二阶中心差分

$$f_j'^{(2C)} = a_{3,j} f_j + b_{3,j} f_{j-1} + c_{3,j} f_{j+1} \tag{15}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

同理可求得上面三式的系数.

将求得的式 (10)~(12) 或式 (13)~(15) 代入式 (9)，即得到非等距网格的二阶基本上无振荡格式.

3 数值算例

我们通过几个简单算例，从数值方面检验了上述格式的精度以及基本无振荡的性质.

3.1 线性初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, && -1\le x\le 1\\ &u(x,0)=u_0(x), && -1\le x\le 1\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

采用周期边界条件.

此算例主要是从数值上验证格式 (6) 和 (7) 的精度，$u_0(x)=\sin(\pi x)$, $t=1$. 从表 1 可看出，此格式的最大误差 (L_∞，极值点附近) 精度阶也基本接近二阶，因而是一致高精度的格式. 时间离散采用二阶 Runge-Kutta 法 [4].

表 1 格式 (8) 精度表

Table 1 The accuracy of scheme (8)

N	L_∞ error	L_∞ order	L_1 error	L_1 order
10	2.6971e-1		1.7774e-1	
20	8.5893e-2	1.651	5.1734e-2	1.781
40	2.6052e-2	1.721	1.2529e-2	2.046
80	7.2093e-3	1.853	3.1066e-3	2.012
160	1.9135e-3	1.914	7.7313e-4	2.007
320	4.9221e-4	1.959	1.9291e-4	2.003

3.2 非线性 Burgers 方程的定常解

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{17}$$

使用此算例的目的是验证所构造的格式对正激波的捕捉能力以及数值解的基本无振荡要求. 对方程 (17)，$u(x)=\tanh(-Re\cdot x/2)$ 是一个定常解，因此我们取其相应的边界条件：$u(-L,t)=\tanh(L\times Re/2)$，$u(L,t)=\tanh(-L\times Re/2)$；初始条件取 $u(x,0)=0$；$Re=1000$，网格点数均为 $N=81$，图 1~ 图 3 的计算区域为 $x\in[-0.1,0.1]$，即 $L=0.1$. 格式 (6),(7) 的结果见图 1. 非等距格式的网格划分为：从原点向两边，网格间距按 $\Delta\eta=6.410\times10^{-5}$ 倍数逐渐增大，最大间距为 $\Delta x=3.75\times10^{-3}$，最小间距为 $\Delta x=1.25\times10^{-3}$，见图 2. 图 3 为分段均匀网格，两边网格网格最粗，为 $\Delta x=5\times10^{-3}$，然后向中间靠近是 $\Delta x=2.5\times10^{-3}$，中间最小为 $\Delta x=1.25\times10^{-3}$. 图 4 为任意划分的网格，计算区域 $x\in[-1,1]$，即 $L=1$. 最小间距为 2.0×10^{-4}，最大间距为 2.23×10^{-1}.

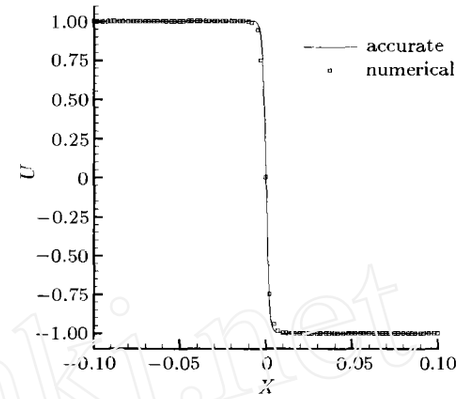

图 1 格式 (6),(7) 结果

Fig.1 Results of scheme (6),(7)

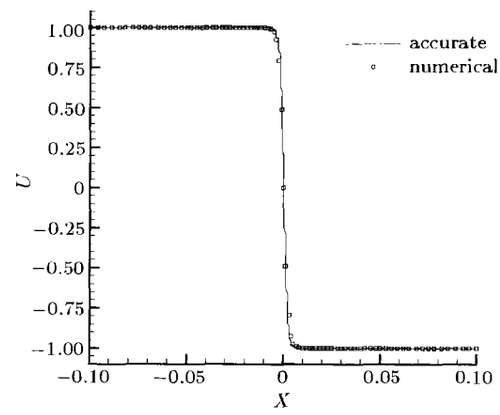

图 2 非均匀网格结果

Fig.2 Results of non-uniform grid scheme

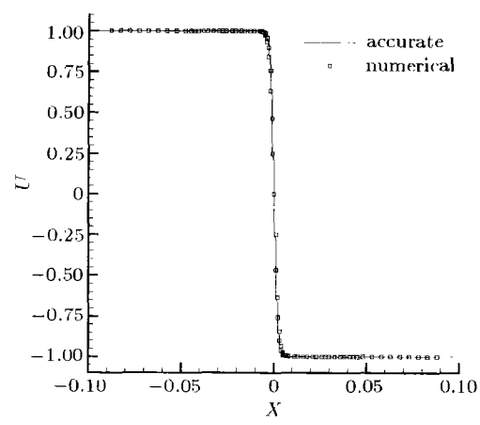

图 3 非均匀网格结果

Fig.3 Results of non-uniform grid scheme

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

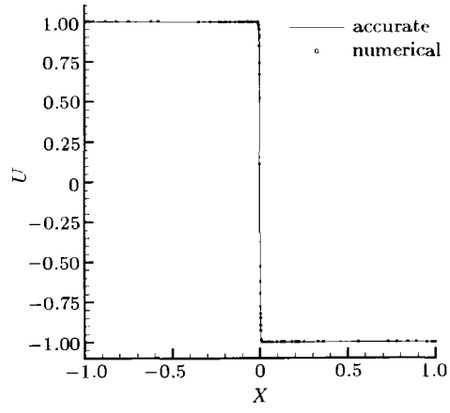

图 4　非均匀网格结果

Fig.4　Results of non-uniform grid scheme

3.3　非线性初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, && 0\le x\le 2\pi\\ &u(x,0)=0.3+0.7\sin x, && 0\le x\le 2\pi\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

以 2π 为周期的边界条件.

此算例表明了几种格式对运动激波的捕捉能力，网格点数均为 $N=81$. 格式 (6),(7) 见图 5. 图 6, 图 7 为非等距网格格式结果. 图 6 的网格划分为：从原点向两边，网格间距按 $\Delta\eta=2.0138\times10^{-3}$ 倍数逐渐增大，最大间距为 $\Delta x=1.178\times10^{-1}$，最小间距为 $\Delta x=3.927\times10^{-2}$. 图 7 为分段均匀网格，两边网格网格最粗，为 $\Delta x=1.571\times10^{-1}$，然后向中间靠近是 $\Delta x=7.854\times10^{-2}$，中间最小为 $\Delta x=3.927\times10^{-2}$. 图 8 为任意划分的网格，最小间距为 6.2832×10^{-4}，最大网格间距为 7.2257×10^{-1}. 图 9 为此任意划分的网格下，二阶中心 (2C)、一阶迎风 (1U) 和本文格式 (present) 与精确解的比较图，可看出，本文构造的格式既克服了二阶中心格式的数值振荡，又比一阶迎风具有较小的数值耗散，增强了分辨率.

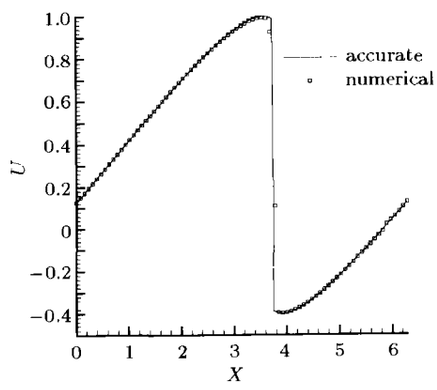

图 5　格式 (6),(7) 结果

Fig.5　Results of scheme (6),(7)

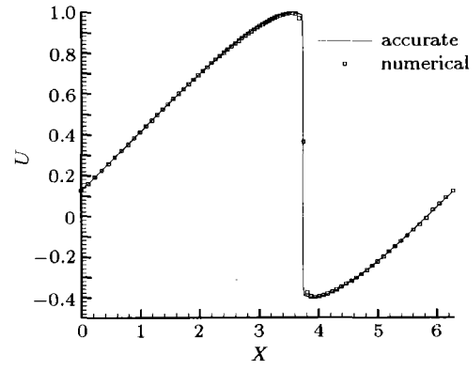

图 6　非均匀网格结果

Fig.6　Results of non-uniform grid scheme

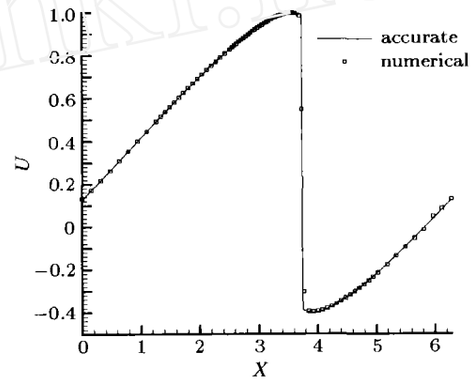

图 7　非均匀网格结果

Fig.7　Results of non-uniform grid scheme

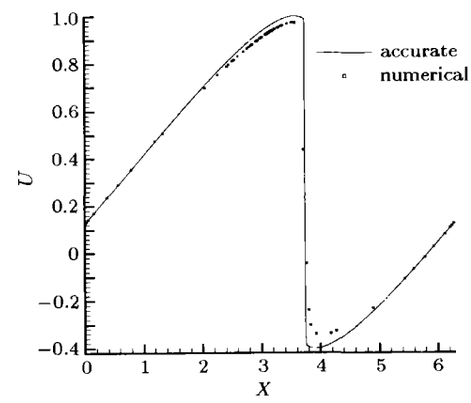

图 8　非均匀网格结果

Fig.8　Results of non-uniform grid scheme

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

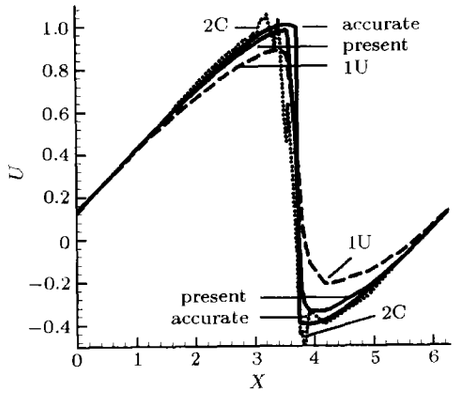

图 9 几种格式比较

Fig.9 Comparisons of several schemes

3.4 激波管问题[10]的数值模拟

计算了 $t=0.14$，网格点 $N=101$ 时的分布情况，此问题验证格式在方程组中的应用. 我们采用 Steger-Warming[11] 分裂技术，先把通量分裂为正、负通量，再分别计算.

图 10 为均匀网格格式 (6),(7) 的结果；图 11 的网格划分为：从中心点 $x=0.5$ 开始，向两边网格间距逐渐增加，最大网格 $\Delta x_{\max}=1.5\times10^{-2}$，最小网格 $\Delta x_{\min}=5\times10^{-3}$；图 12 采用分段式均匀网格：$[0,0.25]$, $\Delta x=5\times10^{-2}$; $[0.25,0.56]$, $\Delta x=6\times10^{-3}$; $[0.56,0.65]$, $\Delta x=6.25\times10^{-3}$; $[0.65,0.8]$, $\Delta x=6\times10^{-3}$; $[0.8,1.0]$, $\Delta x=5\times10^{-2}$.

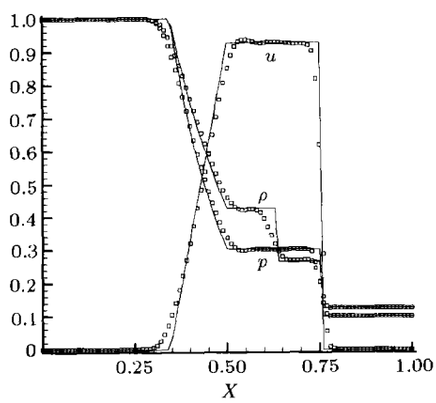

图 10 格式 (6),(7) 结果

Fig.10 Results of scheme (6),(7)

4 结 语

提出在无振荡格式的构造中，将通常的对流通量 f 的逼近方式推广到对通量导数的逼近，这一构造方法可以有效地应用到非均匀或非结构网格. 进一步地构造了基于非均匀网格的二阶基本无振荡格式. 该格式形式简单，对网格的划分灵活，且只要网格划分给定，所有系数均只需计算一次，因此与传统格式相比不增加计算量. 数值算例证明了格式的有效性.

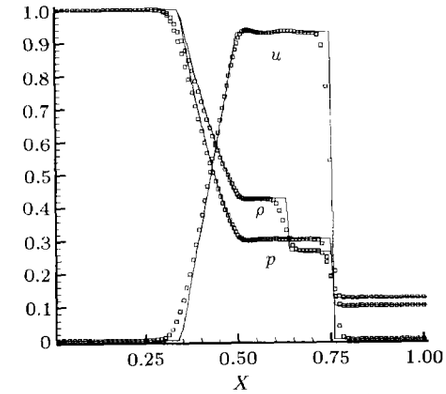

图 11 非均匀网格结果

Fig.11 Results of non-uniform grid scheme

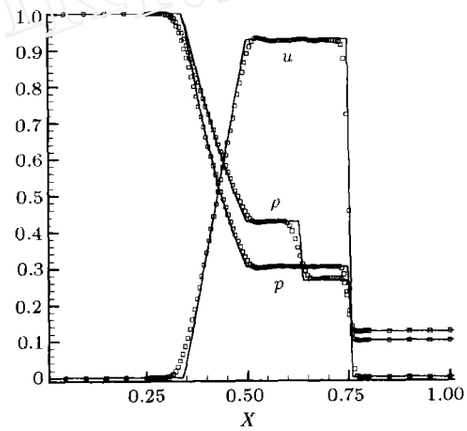

图 12 非均匀网格结果

Fig.12 Results of non-uniform grid scheme

参 考 文 献

1 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1983, 49: 357~393

2 Yee HC. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *J Comput Phys*, 1987, 54: 115~173

3 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy. Uniformly high order accuracy essentially non-oscillatory schemes III. *J Comput Phys*, 1987, 71: 231~303

4 Shu CW, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II. *J Comput Phys*, 1989, 83: 32~78

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

5 李新亮. 槽道湍流的直接数值模拟. [博士论文], 北京: 中国科学院力学研究所, 2000 (Li Xinliang. Direct numerical simulation of turbulent channel flow. [Ph D Dissertation], Beijing: Chinese Academy of Sciences, 2000 (in Chinese))

6 忻孝康等. 计算流体力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989 (Xin Xiaokang, et al. Computational Fluid Dynamics. Changsha: National University of Defence Technology Press, 1989 (in Chinese))

7 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报, 1988, 6(2): 143~165 (Zhang Hanxin. Non-oscillatory and non-free-parameter dissipation difference scheme. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1988, 6(2): 143~165 (in Chinese))

8 Jiang Zonglin, Takayama K, Chen Yaosong. Dispersion conditions for non-oscillatory shock capturing schemes and its applications. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 1995, 4(2): 137~150

9 Roe PL. Approximate Riemann solves, parameter vectors, and difference schemes. *J Comput Phys*, 1981, 43: 357~372

10 Sod SA. A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1978, 27: 1~31

11 Steger JL, Warming RF. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. *J Comput Phys*, 1981, 40: 263~293

A SECOND-ORDER NON-UNIFORM GRID ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY DIFFERENCE SCHEME [1)]

Shen Yiqing[*,†]　Gao Zhi[†]

[*](*Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

[†](*Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract　In the paper, we generalized the approximate technique of fluxes in usual difference scheme to approximate the derivatives of fluxes. This new technique can be effectively applied to non-uniform grid or unstructured mesh. Based on non-uniform grid, we constructed a second-order essentially non-oscillatory finite difference scheme. Compared with traditional schemes, the new scheme has simple form and its grid generation is very flexible and it also does not increase CPU time. Several numerical examples show that the present scheme is efficient.

Key words　TVD scheme, ENO scheme, non-uniform grid

Received 8 July 2001, revised 26 August 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272106) and Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net