

文章编号: 0455-2059(1999)02-0021-04

# 智能梁弯曲形状的主动控制

冯 玮<sup>1</sup>, 俞焕然<sup>2</sup>

(1. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080; 2. 兰州大学 力学系, 甘肃 兰州 730000)

**摘 要:** 研究了具有离散分布压电控制器的智能梁, 在外加电场作用下的弯曲形状与压电元件外加控制电压之间的关系, 建立了对智能梁的弯曲形状进行主动控制的方法, 得到了各离散分布压电元件控制电压的解析解, 并给出了算例

**关键词:** 智能结构; 梁; 弯曲; 控制

**中图分类号:** O 343.1 **文献标识码:** A

## 0 引 言

由于压电材料具有特殊性质, 即电能—机械能之间的双向可逆转换性质, 它可以作为传感器与控制器应用于离散系统的感应与控制中。基于压电效应和逆压电效应, 压电材料可贴于梁、板、壳等结构元件的表面或嵌入其内部, 以作用外加电场产生一定规律的变形, 达到对结构元件进行控制的目的

压电材料用于智能结构, 已成为近年来许多工作者关注的问题。智能结构研究方法多种多样, Seyoung 等<sup>[1]</sup>、Zhou 等<sup>[2]</sup>与 Yang 等<sup>[3]</sup>以及 Wang 等<sup>[4]</sup>先后给出了智能结构的数学模型; 智能结构在振动控制中的应用也有大量系统工作, 孙东昌等<sup>[5,6]</sup>在智能梁与智能板振动控制方面有详细论述; 有关智能结构的综述性文献可见 [7, 8]。

智能梁、板的弯曲控制是智能结构主动控制中的一个重要方面, Seyoung 等<sup>[1]</sup>对智能梁的弯曲问题作了探讨, Zhou<sup>[2]</sup>利用有限元法得到了层合板的弯曲解, 俞焕然等<sup>[9]</sup>研究了环形智能板轴对称弯曲问题。本文着重研究了智能梁弯曲形状与控制电压之间的关系, 以简支情况为例, 给出了为达到预定弯曲形状各压电元件控制电压的解析表达式, 为智能梁弯曲的主动控制提供了计算方法

## 1 智能梁的基本方程

考虑如图 1 所示的长为  $l$ , 由上、下表面对称地贴有若干压电片所构成的智能梁, 其材料常数为  $E$ , 并作如下假设:

- a 压电片与梁之间粘合牢固, 无相对位移;
- b 压电片极化方向沿  $z$  轴, 上、下表面控制电

压以压电片产生拉伸应变为正;

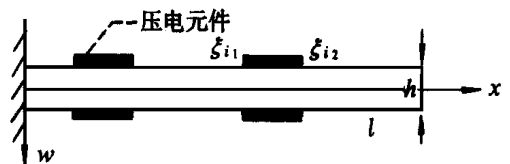


图 1 智能梁结构示意图

Fig 1 Sketch map of smart beam

收稿日期: 1998-06-30

作者简介: 冯 玮 (1969-), 男, 博士

c 压电片质量和刚度忽略不计.

压电片在外加电压作用下的应变为<sup>[7]</sup>  $\epsilon = \frac{V_i d}{h_p}$ ,  $h_p$  是压电片厚度,  $d$  为压电片应变系数  
记第  $i$  个压电片角点坐标为  $\Omega(\xi_{i1}, \xi_{i2})$ , 并引入广义位置函数

$$R_i(x) = \begin{cases} 1, & \xi_{i1} < x < \xi_{i2}, \\ 0, & \text{o therelse} \end{cases} \quad (1)$$

压电片对梁的作用归结为压电片在梁的局部引起应变  $\epsilon^f, \epsilon^b$

$$\epsilon^f = \frac{dV_i^f}{h_i} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right), \quad \epsilon^b = \frac{dV_i^b}{h_i} \left( -\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

$V_i^f, V_i^b$  分别是每一对压电片上的控制电压,  $h, h_i$  是梁厚与压电片厚度, 并设梁宽度为  $b$  则梁内应力分布为

$$\sigma(x) = E \left( -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \sum_i (\epsilon^f + \epsilon^b) R_i(x) \right). \quad (3)$$

将上式沿厚度积分, 得到内力矩

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma(x) \cdot z dz = -EI(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sum_i J_i(x) (V_i^f - V_i^b) R_i(x), \quad (4)$$

其中:  $I(x) = \frac{bh^3(x)}{12}$ ,  $J_i(x) = \frac{Edbh^2(x)}{6h_i}$ .

若令每对压电元件的电压满足以下关系, 即  $V_i^f = -V_i^b = V_i$ , 则与推导梁的平衡方程类似, 由微元体平衡可得智能梁运动微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (EI(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}) = - \sum_i \frac{\partial (J_i(x) R_i(x))}{\partial x^2} V_i \quad (5)$$

方程(5)为一机电耦合的微分方程, 它反映了压电元件对梁挠度的影响

## 2 智能梁控制电压作用下的弯曲

智能梁控制方程的解可以根据不同的边界条件将挠度按不同的基函数展开, 代入方程(5)中求得 以下用简支梁为例, 设

$$w(x) = \sum_m A_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right), \quad (6)$$

代入智能梁控制方程(5)中, 为方便推演, 令  $A(x) = A, I(x) = I, J_i(x) = J$ , 可得

$$A_m = \frac{2I}{EI\pi^2 m^2} \sum_i V_i J_i R_i(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx. \quad (7)$$

记  $f_m = \frac{2I}{EI\pi^2 m^2}$ ,  $g_m = \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ , 上式写成

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \int_{\Omega_1} g_1 d\Omega_1 & f_1 \int_{\Omega_2} g_1 d\Omega_2 & \dots & f_1 \int_{\Omega_m} g_1 d\Omega_m \\ f_2 \int_{\Omega_1} g_2 d\Omega_1 & f_2 \int_{\Omega_2} g_2 d\Omega_2 & \dots & f_2 \int_{\Omega_m} g_2 d\Omega_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m \int_{\Omega_1} g_m d\Omega_1 & f_m \int_{\Omega_2} g_m d\Omega_2 & \dots & f_m \int_{\Omega_m} g_m d\Omega_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}, \quad (8)$$

简记为  $\{A\} = [M] \cdot \{V\}$  (9)

当智能梁上压电片位置固定后,  $[M]$  便为已知, 由于其中各元素只与压电片位置有关, 则可通过适当选取压电片分布方式, 以保证  $[M]$  非奇异. 由 (9) 式即可求得控制电压  $\{V\}$  作用下智能梁的弯曲形状

### 3 智能梁弯曲形状控制

智能结构的特点就是可以根据不同的需要, 能够通过调节外加控制电场, 对其变形进行主动控制, 以达到预定的形状. 仍以简支梁为例, 设预定变形后形状为  $\bar{w}(x)$ , 我们可以将它按 (6) 式展开, 由 (9) 式求得

$$\{V\} = [M]^{-1} \cdot \{A\}, \quad (10)$$

则可得到  $M$  个压电片上的控制电压. 由于实际情况下  $m$  不可能取到无穷大, 只能在某个  $M$  处截断, 因而压电片数目越多, 控制效果越好, 这一点容易从 (8) 式得到

### 4 算例

作为算例, 考虑长  $l$  的简支智能梁, 用本文提出的方法, 以外加控制电压来模拟受单位均布力  $\bar{q} = \frac{l^4 q}{\pi^5 E I h}$  作用下的变形. 作无量纲化

$$\bar{x} = x/l, \bar{w} = w/h, \bar{\epsilon} = \epsilon/l, \bar{V} = 2l^2 dV / (h^2 h_p).$$

附表中列出 2 片和 4 片压电片时的控制电压, 两种情况下保持压电片总面积不变. 其中情形 1 采用对称分布, 情形 2 采用非对称分布. 由附表可知, 情形 1 中两片压电元件外加控制电压相等, 符合结构对称、变形对称和载荷对称之间的一致性原则, 从而也证明本文方法的正确性. 图 2 中绘制了前述两种情况下梁的挠曲线.

附表 压电片控制电压

Table Control voltage of piezoelectric actuators				
控制电压	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
1(2片)	0.184	0.184	—	—
2(4片)	0.194	0.248	0.243	0.220

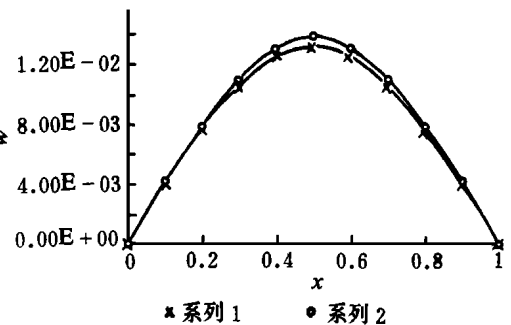


图 2 智能梁挠曲线示意图

Fig 2 Sketch map of deflection of smart beam

### 5 结语

本文通过引入广义位置函数, 研究了智能梁在外加控制电场作用下的弯曲形状与压电片控制电压之间的关系, 并在此基础上, 以简支情况为例, 得到了使智能梁达到预定弯曲形状各分布式压电元件的控制电压的解析解, 解决了智能梁构件弯曲的主动控制问题.

## 参 考 文 献

- [1] Seyoung IM, Atluri S N. Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading[J]. *AIAA J*, 1989, 27(12): 1801~ 1807.
- [2] Zhou Y S, Tiersten H F. An elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators[J]. *Smart Mater Struct*, 1994, (3): 255~ 265.
- [3] Yang J S, Batra R C. The cylindrical bending vibration of a laminated elastic plate due to piezoelectric actuators[J]. *Smart Mater Struct*, 1994, (3): 485~ 493.
- [4] Wang Bor Tsuen, Craig A Rogers. Laminated plate theory for spatially distributed strain actuators[J]. *J of Composite Mater*, 1991, 25: 433~ 452.
- [5] Sun Dongchang, Wang Dajun. Distributed piezoelectric segment method for vibration control of smart beams[J]. *AIAA J*, 1997, 35(3): 583~ 584.
- [6] 孙东昌, 王大钧. 智能板振动控制的分布压电单元法[J]. *力学学报*, 1996, 28(6): 692~ 699.
- [7] Rao S S, Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey[J]. *ASME Report*, 1994, 47(4): 113~ 123.
- [8] 沈亚鹏, 王晓明, 陈长青, 等. 智能结构力学研究的最新进展[A]. *现代力学与科技进步[C]*. 北京: 清华大学出版社, 1997. 282~ 288.
- [9] 俞焕然, 姚林泉. 粘有压电材料弹性环形板的轴对称弯曲及其控制[A]. *现代力学与科技进步[C]*. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1301~ 1304.

## Active Control of the Bending Shape of Smart Beams

Feng Wei<sup>1</sup>, Yu Huanran<sup>2</sup>

(1. Institute of Mechanics, China Academy of Sciences, Beijing, 100080, China;

2 Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

**Abstract:** The relations between control voltage and the bending shape of smart beams with distributed piezoelectric actuators are discussed. An active control method of smart beams is established, and the analytic solution of control voltage is given with certain examples.

**Key words:** smart structure; beam; bending; control