

光滑粒子动力学方法中粒子分布与数值稳定性分析^{*}

刘谋斌^{1)†} 常建忠²⁾

1) (中国科学院力学研究所, 北京 100190)

2) (中北大学机电工程学院, 太原 030051)

(2009 年 7 月 30 日收到; 2009 年 12 月 28 日收到修改稿)

光滑粒子动力学 (SPH) 作为一种拉格朗日型无网格粒子方法, 已经成功地应用于包括含多相流动界面以及移动边界的可压缩和不可压缩流体运动的研究中. 通过对 Poiseuille 流动的深入研究, 探索了 SPH 方法中粒子分布对计算精度的影响, 揭示了一种因为粒子不规则分布而导致的数值不稳定性现象. 研究显示, 这种数值不稳定性起源于 SPH 方法粒子近似过程中的不连续性. 使用了一种新的粒子近似格式以确保 SPH 方法中粒子近似的连续性. 计算结果表明, 这种新的粒子近似格式对于规则和不规则的粒子分布都能得到稳定精度的结果.

关键词: 光滑粒子动力学, 粒子近似, 连续性, 稳定性

PACC: 0340G, 4710, 4785

1. 引言

光滑粒子动力学 (smoothed particle hydrodynamics, 简记为 SPH)^[1,2] 是一种拉格朗日型无网格粒子方法. 与传统的基于网格的数值方法 (如有限元、有限差分和有限容积等方法) 不同, SPH 使用粒子系统代表所模拟的连续介质 (流体或固体), 并且估算和近似控制介质运动的偏微分方程. 与耗散粒子动力学方法类似^[3], 各种宏观物理量 (如密度、压力、速度、内能等) 被定义在粒子中心, 相关的物理量及其空间导数可以通过邻近的相互作用粒子的物理量插值得到. 因为近似过程中没有网格, 避免了网格的存在而导致的一些数值问题, 可以处理大变形问题. 不同于格子-玻尔兹曼等粒子方法^[4], SPH 是一种纯粹的粒子方法, 没有任何背景网格. SPH 方法中粒子伴随介质的运动而以当地速度移动, 是一种拉格朗日方法, 可以不需要复杂的算法追踪或者捕捉运动界面、移动边界等运动特征, 特别适合具有自由表面、运动交界面的流体大变形问题^[5-7]. SPH 方法因此兼具欧拉方法和拉格朗日方法的优点, 近年来已经成功地应用到工程和科学的各个领域^[8,9].

早期 SPH 方法一般应用于模拟三维开放空间

的天体物理学问题, 其理论基础是概率论和统计力学^[8,10], 三维开放空间边界的影响可以不予考虑. 随着 SPH 方法的不断发展并广泛地应用于现代计算流体和固体力学等领域, 传统 SPH 方法的许多缺点和不足逐渐显现出来, 这些缺点主要集中在计算精度不够以及数值不稳定两方面. SPH 方法计算精度与其连续性, 即再生或重构线性多项式的能力密切相关. 而 SPH 数值稳定性涉及的因素较多, 例如有与应力状态相关的拉伸不稳定^[11,12]、与光滑函数特性相关的数值不稳定^[13]、与时间步长选择相关的数值不稳定^[8] 等等. 早期对 SPH 方法计算精度及稳定性的研究主要集中在一维以及粒子规则分布的情形, 而空间的多维性、粒子分布的无序性以及粒子随时间不断移动等因素导致实际 SPH 方法中计算精度及数值稳定性的分析更为复杂.

在传统的 SPH 计算中, 初始的粒子一般呈规则分布, 质量一致 (粒子大小相等). 随着计算的进行, 粒子分布逐渐变得紊乱不规则, 每个粒子的密度随压力和应力变化而逐渐演变, 粒子的大小也逐渐不一. 因此, 传统的 SPH 粒子近似格式很难保证一阶甚至是零阶连续性, 不能精确再生线性函数甚至常数. 这也是导致传统 SPH 方法粒子近似格式精度偏低的根本原因. 随着 SPH 方法的不断发展和完善, 各种粒子近似的格式不断涌现出来^[9]. 这些改进格

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10942004, 50976108) 资助的课题.

[†] E-mail: liumoubin@imech.ac.cn

式大多着眼于恢复传统 SPH 方法粒子近似的不连续性,从而改善其计算精度^[14-23].

本文应用传统的 SPH 方法模拟了经典的 Poiseuille 流动问题. 研究发现,当初始粒子规则分布时,在计算结果趋于稳定以后继续进行 SPH 计算,当计算时间较长时会出现严重的数值不稳定. 本文分析了这种数值不稳定性的来源,并且提出了相应的解决方案.

2. SPH 方法基本思想

2.1. SPH 方法核近似与粒子近似

SPH 方法使用一组任意分布的粒子来代表所模拟的介质系统,基于粒子体系离散控制流体运动的偏微分方程,并通过适当的变换对所获得的 SPH 运动方程进行求解,从而仿真流体系统的动力学特征. 利用 SPH 方法对偏微分方程的近似包括核近似和粒子近似两步. 对函数的核近似是通过对函数及权函数进行积分来实现,而粒子近似是在一个有限区域内对所有粒子进行加权求和. 对于传统的(经典的)SPH 方法,在某点(或某个粒子) i 上,对任意函数 $f(\mathbf{x})$ 的核近似($\langle f(\mathbf{x}) \rangle$)可由下式定义:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \tag{1}$$

其中 f 为三维坐标向量 \mathbf{x} 的函数; Ω 为包含 \mathbf{x} 的积分区域; W 是一个权函数,在许多与 SPH 相关的文献中通常被称为光滑函数(smoothing function)或者核函数(kernel function); h 定义了光滑函数 W 的影响区域,称为光滑长度.

SPH 方法对光滑函数的性质有一系列要求. 首先,光滑函数必须满足的正则化条件为

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1. \tag{2}$$

当光滑长度趋于零时,光滑函数 W 具有狄拉克函数性质,即

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3}$$

光滑函数必须满足对称性条件,即

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0. \tag{4}$$

光滑函数必须满足紧支性条件,即当 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h$ 时,

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0. \tag{5}$$

(5)式中 κ 是与点 \mathbf{x} 处光滑函数相关的常数, κh 确定了光滑函数的有效范围(即支持域). 文献[8, 18]对 SPH 光滑函数进行了详尽的分析,综合研究了光滑函数不同的要求及特征,并且提出了构造光滑函数的广义方式^[8, 18].

对应于连续形式的核近似((1)式),任意函数 $f(\mathbf{x})$ 的离散形式的粒子近似是对相关粒子 i 支持域内所有粒子进行加权求和(见图 1),即

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \Delta v_j, \tag{6}$$

其中 $W_{ij} = W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h)$, Δv_j 为粒子 j 所对应的体积, N 为计算区域内的总粒子数. 因为光滑函数满足紧支性条件, N 也可以视为粒子 i 支持域内的总粒子数. 在流体动力学数值模拟中, Δv_j 经常用质量与密度比 m_j/ρ_j 代替. 值得注意的是,把密度和质量引入近似方程,从而可以方便地将 SPH 方法应用到爆炸、冲击、海岸海洋水动力学、山川河流水动力学等不同领域的流体动力学研究中. 这正是 SPH 方法最具吸引力的因素之一.

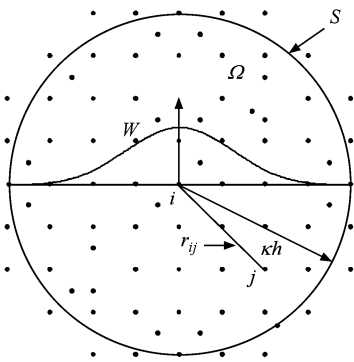


图 1 二维空间 SPH 粒子近似 W 为光滑函数,支持域为 κh , S 为计算区域 Ω 的表面

对导数的核近似可以通过用相应的导数替代(1)式中的函数,经分步积分并忽略边界项后得到

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \int f(\mathbf{x}) W_{i,\alpha} d\mathbf{x}, \tag{7}$$

其中 $W_{i,\alpha}(\mathbf{x}) = \partial W_i(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}^\alpha$, $f_{i,\alpha} = (\partial f/\partial \mathbf{x}^\alpha)_i$, α 为空间向量下标, $\alpha = 1, 2, \dots, d$ (d 为空间维数). 导数的粒子近似为

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\alpha} \Delta v_j. \tag{8}$$

也可以通过类似的方式,把相应的导数代入(1)式,经分步积分并忽略边界项,同时在支持域上对所有粒子加权求和得到高阶导数的核近似和粒子近似.

(1),(6)–(8)式清楚表明,SPH 方法中对函数及其导数的核近似和粒子近似实际上是把对函数或导数的运算转换为对光滑函数及其导数的运算.

2.2. SPH 方法的精度

在早期的文献中,SPH 方法通常被认为是二阶精度的方法^[10, 21, 24–27]. 因为如果对(1)式等号右边进行泰勒展开,仅保留一阶导数,可以得到

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ &\quad + r((\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &\quad + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &\quad + r(h^2), \end{aligned} \tag{9}$$

其中 r 为泰勒展开的余项. 因为光滑函数满足正则化条件(2)式,而且一般都是偶函数,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0, \tag{9} \text{式可写成}$$
$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) + r(h^2). \tag{10}$$

因此就核近似而言,SPH 方法具有二阶精度. 然而(10)式未必对所有的情形都成立. 例如,当某个粒子临近计算区域边界时,粒子的支持域与计算区域相交,支持域被边界截断. 此时正规化条件 $\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1$ 不能满足,另外对称性条件 $\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0$ 也不能满足. 很明显,函数的 SPH 核近似不再具有二阶精度.

关键是利用 SPH 方法对偏微分方程进行近似,其精度最终取决于离散形式的粒子近似,而仅非连续形式的核近似. 当整个系统从连续的计算区域由离散的粒子代表时,在数值计算方面又带来了更多的挑战. 除了与相关的核近似对应的粒子近似格式外,粒子的分布形式、光滑函数的选取、光滑长度的范围等对计算的精度可能会有可观的影响. 光滑函数

离散形式的正规化条件 $\sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j = 1$ 及对称性条件 $\sum_{j=1}^N (x_i - x_j') W_{ij} \Delta v_j = 0$ 都未必能得到满足,因此传统的 SPH 粒子近似格式很难保证一阶甚至是零阶连续性,因而不能精确再生线性函数甚至常数. 这也是导致传统 SPH 方法粒子近似格式精度偏低的根本原因.

3. SPH 模拟 Poiseuille 流动问题

3.1. SPH 形式的 Navier-Stokes(N-S)方程

经典 Poiseuille 流动问题涉及两无限长平板间流体运动现象. 因为 Poiseuille 流动问题具有理论解^[8, 28],所以通常被用来检验新的数值模型. 在 Poiseuille 流动模型中,流体在分别位于 $y = 0$ 和 $y = l$ 的两块平行且无限长的固定平板间流动. 初始静止的流体由于受到体力 F (例如压力梯度或外力)的作用而在两平板间逐渐流动,最终达到稳定状态. 在经典的流体动力学中,Poiseuille 流动流场中任一点的流动速度等物理变量可以通过求解 N-S 方程得到. 拉格朗日形式的 N-S 方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}, \\ \frac{Dv^\alpha}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + F, \end{aligned} \tag{11}$$

其中密度 ρ 、速度分量 v^α 和总应力张量 $\sigma^{\alpha\beta}$ 都是因变量,空间坐标 x^α 和时间 t 为自变量, β 为方向下标 ($\beta = 1, 2, \dots, d$), F 为外力. (11)式利用指标重复进行求和,而总的时间求导是在拉格朗日框架中进行. 总应力张量 σ 由各向同性压力 p 和黏性应力 τ 两部分组成,即

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}. \tag{12}$$

对于牛顿流体,黏性剪应力与剪应变率 ε 成比例, $\tau^{\alpha\beta} = \mu \varepsilon^{\alpha\beta}$,其中 μ 为黏性系数. 而剪应变率 ε 为

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta^{\alpha\beta}, \tag{13}$$

利用 SPH 方法的核近似和粒子近似的方案,进行适当转换,可以得到 SPH 离散形式的 N-S 方程

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} &= \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}, \\ \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} &= - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F_i. \end{aligned} \tag{14}$$

3.2. 人工可压缩性

在求解可压缩流体问题的标准 SPH 方法中,粒子的运动是由于压力梯度等的作用而产生的,而粒子的压力是通过状态方程由粒子自身的密度和内能来计算的. 然而,在不可压缩流体问题中,流体实际的状态方程限制了时间步长,即时间步长不能太小. 如何有效地计算动量方程中的压力项是模拟计

算不可压缩流体的一个主要任务. 例如在有限差分或者有限容积方法中, 压力的求解都是通过特殊的算法迭代并修正得到^[29]. 在 SPH 方法中, 也可以引入类似的迭代并修正算法, 从而求解压力方程. 但是, 由于 SPH 公式包含定常密度的约束条件, 故而导致最终的方程式过于繁重. 基于任何一种不可压缩流体理论上都可以被视为轻微的可压缩流体(准可压缩流体)的假设, 在 SPH 方法中一般通过引入人工可压缩性, 应用一个合适的准可压缩流体的状态方程来模拟不可压缩流体. 在模拟诸如 Poiseuille 问题等低雷诺数流动时, 通常可以使用下列状态方程^[28]:

$$p = c^2 \rho. \tag{15}$$

其中 c 为声速. 在人工压缩率理论中, 声速是一个值得慎重考虑的因素. 若引用实际的声速(例如在标准气压和温度下水中的声速为 1480 m/s), 则可用理想不可压缩的人工流体来近似真实的流体. 考虑流体的相对密度变化率 δ , 有

$$\delta = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{|\rho - \rho_0|}{\rho_0} = \frac{V_b^2}{c^2} = Ma^2, \tag{16}$$

其中 V_b 和 Ma 分别是流体整体速度和马赫数. 由于真实的声速相当大, 故相应得到的马赫数非常小, 相对密度变化率 δ 几乎可忽略. 因此, 为了应用人工可压缩流体近似真实流体, 必须使用比真实值要小得多的声速. 所以对声速的要求有以下两个方面: 一方面, 要求声速必须足够大, 以至于人工可压缩流体的特性与真实流体充分接近; 另一方面, 要求声速应足够小, 可使时间步的增量在容许范围内. 由(16)式可看出, 在使用人工可压缩流体模拟真实流体时, 必须选择声速与流体的整体速度相近. 除了考虑整体速度的大小, 在选择声速时也必须先估计压力场的大小. 声速一般可选为流体整体流速的 10 倍左右, 这样流体的相对密度变化率 δ 应在 1% 以内^[8].

Morris 等^[28]通过权衡压力、黏性力和体力三者的大小, 推导出了声速的估算值, 认为声速的平方应为 $V_b^2/\delta, \nu V_b^2/\delta L$ 和 FL/δ 三者中的最大值, 即

$$c^2 = \max\left(\frac{V_b^2}{\delta}, \frac{\nu V_b}{\delta L}, \frac{FL}{\delta}\right). \tag{17}$$

其中 $\nu (\nu = \mu/\rho)$ 为运动黏度, L 为特征长度.

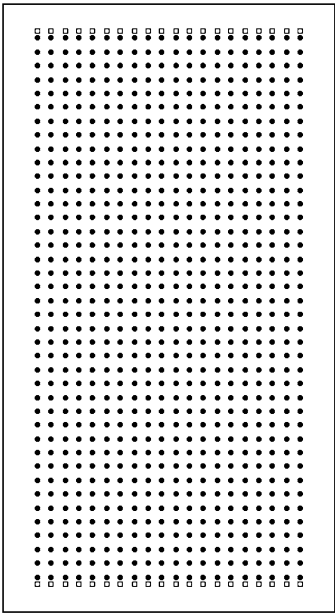
3.3. 结果分析

在应用 SPH 方法研究 Poiseuille 流动时, 对于两块无限长平行平板的模拟是通过沿着流动方向对粒子运动和粒子间的相互作用均应用周期边界条件实现的. 在粒子运动过程中, 当粒子即将离开指定区域穿越边界时就会立即受到周期边界的作用而重新回到指定区域内. 粒子间相互作用时, 支持域内的粒子将会受到边界上或者边界外附近的虚粒子的作用. 因此, 在对粒子的运动方程进行积分和计算粒子与相邻粒子的相互作用时都应考虑周期边界条件的约束影响.

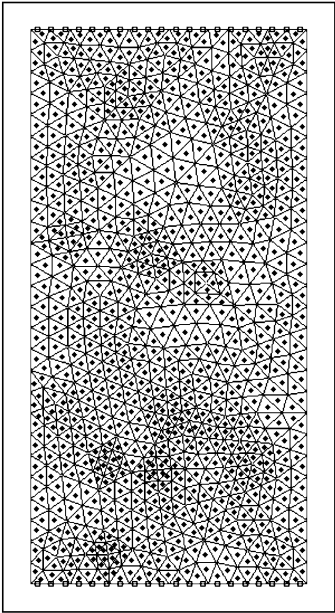
在模拟过程中, 取平板间距离 $l = 10^{-3}$ m, $\rho = 10^3$ kg/m³, 运动黏度 $\nu = 10^{-6}$ m²/s, 体积力 $F = 2 \times 10^{-2}$ m/s². 流动达到平衡状态时流体前沿速度 $v_0 = 2.5 \times 10^{-5}$ m/s. 对应的雷诺数 $Re = 2.5 \times 10^{-2}$. 计算区域是 0.0005 m × 0.001 m 的矩形, 800 (20 × 40) 个粒子规则分布在计算区域中(图 2(a)). 在上下固体边界各使用 20 个虚粒子, 对计算区域内的流体粒子施加排斥力, 以防止流体粒子穿透固体壁面^[8, 30]. 所取的光滑长度比粒子初始间距稍微大些(在这里取为 1.1 倍), 时间步长为 10^{-4} s. 所采用的光滑函数为三次样条函数^[8]. 本文中 Poiseuille 流动涉及毫米尺度, 而毫米尺度的多相流动中必须考虑表面张力和壁面吸附的模型^[31]. 本文的工作中涉及的单相流动, 平行平板间流动入口和出口应用了周期性边界条件, 属于单相饱和型流动, 表面张力和壁面吸附对 Poiseuille 流动本身没有影响, 可以不予考虑.

图 3 显示了粒子规则分布时, 传统 SPH 方法模拟 Poiseuille 流动在 $t = 0.01, 0.1, 1.0, 10.0, 10.5, 11.0, 11.5$ s 时刻所得沿平板间垂直位置 (z 方向) 上的水平方向速度 V_x 分布与对应解析解的比较. 从图 3 可以看出: 在 $t = 0.01, 0.1, 1.0$ s 时, 所得计算结果与解析解符合很好. 在 $t = 1.0$ s 时, 流动完全发展到稳定状态, 计算结果达到稳定解. 随后继续进行 SPH 计算, 所得的结果大致围绕稳定解小幅度振荡. 然而, 当 t 超过 10.0 s 后, 所得 SPH 计算结果逐渐偏离稳定解. 随着时间的延长, 所得结果完全远离稳定解. 这表明传统的 SPH 方法在长时间模拟 Poiseuille 流动时存在数值不稳定.

为了确定导致这种数值不稳定现象的各种因



(a)



(b)

图2 Poiseuille 流动模拟初始粒子设置 在上下固体边界各使用了 20 个虚粒子(空心方块表示). (a) 800 (20 × 40) 粒子规则分布, (b) 粒子不规则分布, 集中在用 Matlab 生成的三角形单元的质心上

素,我们随后使用了不同的边界条件处理方式和不同的光滑函数,调整光滑长度及 Poiseuille 流动涉及的雷诺数(低雷诺数下)的大致范围. 在这些情况下所得计算结果都存在类似现象,即在长时间模拟 Poiseuille 流动时,随着计算时间的延长,所得结果

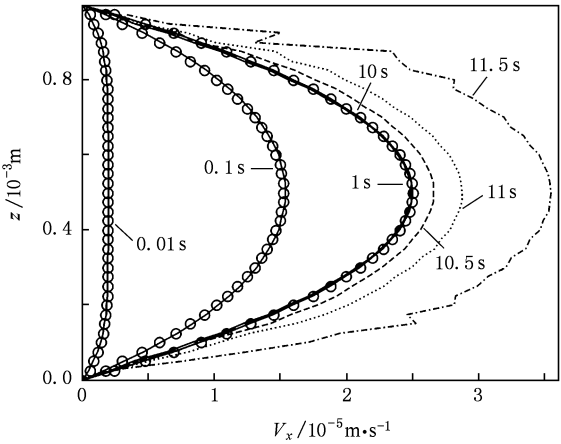


图3 粒子规则分布时,SPH 方法模拟 Poiseuille 流动在不同时刻沿平板间垂直位置(z 方向)上的水平方向速度 V_x 的分布及相应时刻的解析解 空心圆点为解析解

完全远离稳定解,存在数值不稳定.

仔细观察最初模拟的粒子分布情况(如图 4 所示)可以发现:在 $t = 10.0$ s 左右,所得的 SPH 粒子分布大致还是比较规则的. 而在 $t = 10.0$ s 以后,粒子的分布逐渐紊乱,变得无规则. 这表明数值不稳定性有可能是粒子分布不规则所导致. 为了确认这点,我们重新模拟了 Poiseuille 流动. 1040 个粒子不规则分布,集中在用 Matlab 偏微分工具箱^[32]生成的三角形单元的质心上,粒子的体积和对应单元的体积一致,而光滑长度取为与对应三角形单元相同面积的圆形的直径. 图 5 显示了粒子无规则分布时,应用传统 SPH 方法在 $t = 0.01, 0.1, 1.0$ s 时刻所得到的速度分布. 很明显,粒子无规则分布时所得到的数值结果在早期模拟过程中就出现数值振荡,随后数值偏差越来越大,很快偏了解析解,表现出数值不稳定.

传统的 SPH 粒子近似格式不能保证一阶甚至是零阶连续性,不能精确再生线性函数甚至常数,这也是导致传统 SPH 方法粒子近似格式精度偏低的根本原因. 在传统的 SPH 方法中,除了核近似以及对应的粒子近似格式外,粒子的分布形式、光滑函数的选取、光滑长度的范围等对计算的精度可能会有可观的影响. 当粒子分布不规则时,计算结果从计算初期开始就出现较大的误差,随着计算的不断进行,粒子的分布也进一步无序,而且所得误差不断累积,最终导致计算不稳定.

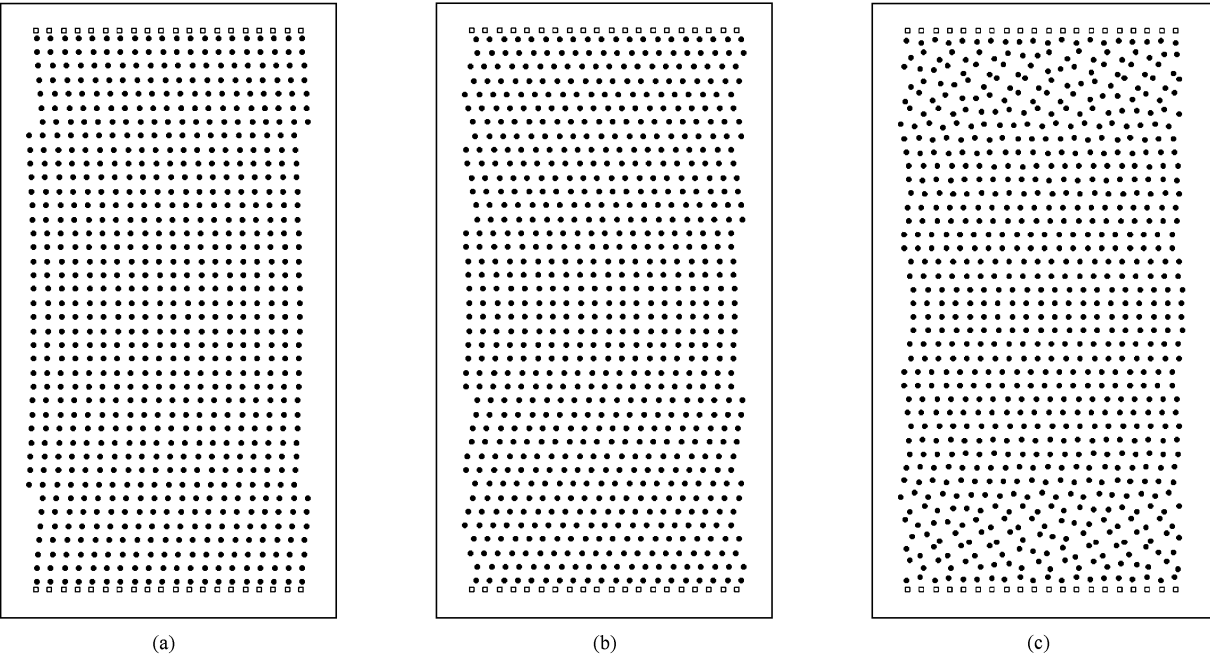


图4 粒子规则分布时,应用传统 SPH 方法得到 $t=1.0, 10.0, 11.5$ s 时刻的粒子分布 (a) $t=1.0$ s, (b) $t=10.0$ s, (c) $t=11.5$ s

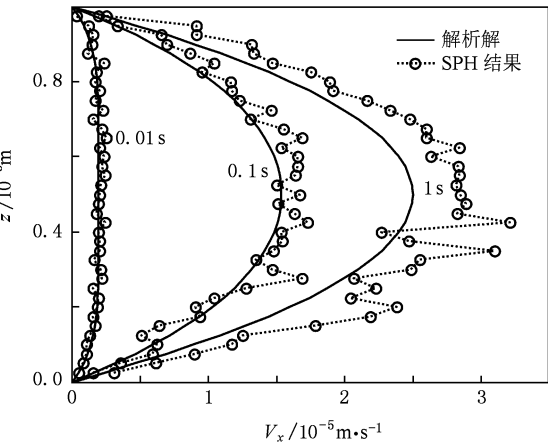


图5 粒子不规则分布时,应用传统 SPH 方法不同时刻所得到的速度分布

4. 有限粒子法 (FPM)

4.1. FPM 核近似与粒子近似

使用连续形式的核近似和粒子近似格式,能够大幅度提高传统 SPH 方法的计算精度. 文献 [20,23]提出了一种保证一阶连续性的新型粒子近似方案,即 FPM. 目前 FPM 方法已经被国际上同行应用并推广到了其他领域^[33]. FPM 可视改进型的 SPH 方法,下面简要给出其核近似和粒子近似的

格式. 在多维空间中,如果在某点 \mathbf{x}_i 泰勒展开某充分光滑的函数 $f(\mathbf{x})$, 保留至一阶导数可得

$$f(\mathbf{x}) = f_i + (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha)f_{i,\alpha} + \frac{(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha)(\mathbf{x}^\gamma - \mathbf{x}_i^\gamma)}{2!}f_{i,\alpha\gamma} + \cdots, \tag{18}$$

其中 $f_i = f(\mathbf{x}_i)$, $f_{i,\alpha} = f_\alpha(\mathbf{x}_i) = (\partial f / \partial \mathbf{x}^\alpha)_i$. (18)式两边同时乘以光滑函数 W 及其一阶导数,并且积分后可得

$$\begin{aligned} &\int f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= f_i \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int f(\mathbf{x}) W_{i,\beta} d\mathbf{x} \\ &= f_i \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{20} \end{aligned}$$

联立求解 (19) 和 (20) 式可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_i \\ f_{i,\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \int f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int f(\mathbf{x}) W_{i,\beta} d\mathbf{x} \end{bmatrix}. \tag{21} \end{aligned}$$

对应的粒子近似方案为

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i,\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{bmatrix} \quad (22)$$

(21)和(22)式中忽略了二阶导数项,保留了一阶导数,所推导出来的核近似和粒子近似方案因此都具有一阶连续性,二阶精度,并且不受边界区域、粒子分布、光滑函数选择的影响,因为对于各种情形,场函数的一阶导数和光滑函数及其导数的积分及叠加求和的影响都已经被加以考虑.在方法的实施中,可以用一套不是线性相关的基函数代替光滑函数 W 及其一阶导数,而光滑函数 W 及其一阶导数只是这种近似方案中一种可能的基函数选择而已.如果(18)式保留至高阶的导数项,则需要更多的基函数来构造相关联的方程,可以得到类似(21)和(22)式的核近似和粒子近似的多种格式,从而具有更高的精度,相应的核近似和粒子近似公式更加复杂,并且需要更多的计算时间.

值得注意的是,在传统的 SPH 方法中,对函数及其各方向导数的核近似和粒子近似都是分别独立进行的.而在 FPM 中,函数的核近似和粒子近似与其导数的核近似和粒子近似都是耦合在一起联立求解.

4. 2. FPM 模拟 Poiseuille 流动

FPM 粒子近似的格式可以近似 N-S 方程中所涉及的导数项,从而对 N-S 方程进行求解^[20].例如,可以利用 FPM 模拟 Poiseuille 流动问题.首先是粒子规则分布的情形(图2(a)),然后是粒子不规则分布的情形(图2(b)),图6和图7分别显示了这两种情形下在 $t=0.01, 0.1, 1.0$ s 时刻所得到的 FPM 计算结果.对于粒子规则分布和不规则分布的两种情形,所得的数值结果均与解析解符合良好,并且优于传统的 SPH 方法所得到的相应结果.图8显示了在粒子不规则分布的情形下,在 15 s 时用 FPM 所得到的粒子分布及速度矢量分布,图中实心圆点代表粒子的位置,而箭头长度及方向分别代表速度矢量

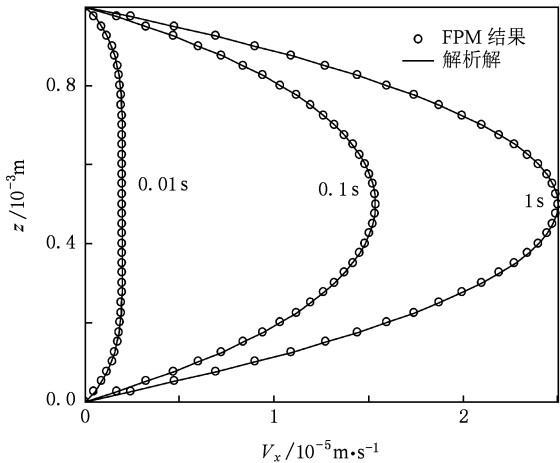


图6 粒子规则分布时,不同时刻 FPM 所得速度分布

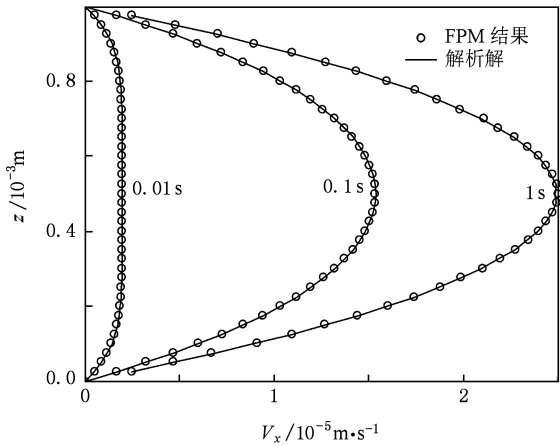


图7 粒子不规则分布时,不同时刻 FPM 所得速度分布

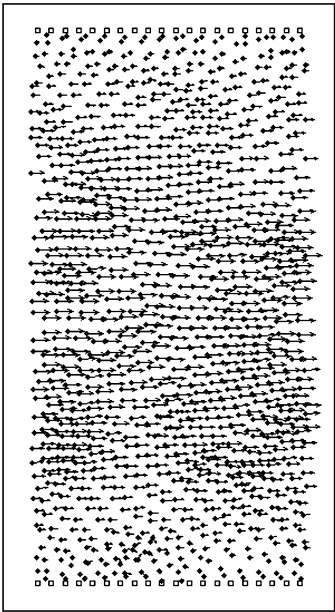


图8 粒子不规则分布情形下,在 $t=15$ s 时 FPM 所得到的粒子分布及速度矢量分布

的大小及方向. 虽然粒子分布高度无序, 所得的流动形态却完全准确. 表 1 列出了粒子规则分布和不规则分布的两种情形下, 不同时刻用 FPM 所得最大流速的比较. 对于两种粒子分布的情形, 计算结果均与解析解符合很好, 误差在 1.0% 以内, 而且计算稳定, 没有因为粒子的无序分布而产生数值不稳定. 由此可见, FPM 是解决传统 SPH 精度不高和数值不稳定的一个有效方法.

表 1 粒子规则分布和不规则分布两种情形下 FPM 所得到的最大流速比较

t/s	粒子分布 状况	最大速度/ $10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	误差/%
10	规则分布	2.501360	0.0544
	不规则分布	2.515600	0.6240
20	规则分布	2.501400	0.0560
	不规则分布	2.520722	0.8289
30	规则分布	2.501320	0.0528
	不规则分布	2.515600	0.6240

5. 结 论

本文应用传统的 SPH 方法模拟了 Poiseuille 流动. 研究表明, 在合理选择计算参数时, 传统的 SPH 方法能够在流动演变过程中得到与解析解相符的数值结果, 并且随着计算的进行数值结果达到稳定状态. 然而, 在数值结果达到稳定状态后长时间继续进行 SPH 计算, 所得到的数值结果会严重偏离稳定状态的解析解, 产生数值不稳定. 采用不同的固体边界处理方式、选择不同的光滑函数和光滑长度以及改变低雷诺数范围并不能避免这种数值不稳定. 数值研究表明, 传统的 SPH 方法出现这种数值不稳定的基本原因是粒子分布的无序性. 在粒子不规则分布时, 传统的 SPH 近似格式不能保证一阶甚至是零阶连续性, 精度较低. 计算结果从计算初期开始就出现较大的误差, 随着计算的不断进行, 误差不断累积, 最终导致计算不稳定. FPM 能确保粒子近似方案的一阶连续性, 不受粒子分布无序性的影响, 是解决传统 SPH 精度不高和数值不稳定的一个有效方法.

[1] Gingold R A, Monaghan J J 1977 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **181** 375

[2] Lucy L B 1977 *Astron. J.* **82** 1013

[3] Chang J Z, Liu M B, Liu H T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3954 (in Chinese) [常建忠、刘谋斌、刘汉涛 2008 物理学报 **57** 3954]

[4] Zhao Y, Ji Z Z, Feng T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 671 (in Chinese) [赵颖、季仲贞、冯涛 2004 物理学报 **53** 671]

[5] Zhang A M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 927

[6] Sun Z H, Han R J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3185

[7] Zhang A M, Yao X L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 339 (in Chinese) [张阿漫、姚熊亮 2008 物理学报 **57** 339]

[8] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method* (Singapore: World Scientific)

[9] Liu M B, Liu G R, Zong Z 2008 *Int. J. Comput. Meth.* **5** 135

[10] Monaghan J J 2005 *Rep. Prog. Phys.* **68** 1703

[11] Swegle J W, Attaway S W 1995 *J. Comput. Phys.* **116** 123

[12] Fu X J, Qiang H F, Yang Y C 2007 *Adv. Mech.* **37** 375 (in Chinese) [傅学金、强洪夫、杨月诚 2007 力学进展 **37** 375]

[13] Morris J P 1996 *Publ. Astron. Soc. Aust.* **13** 97

[14] Belytschko T, Krongauz Y, Dolbow J, Gerlach C 1998 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **43** 785

[15] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P 1996 *Comput. Method. Appl. Math.* **139** 3

[16] Li S, Liu W K 2002 *Appl. Mech. Rev.* **55** 1

[17] Liu W K, Chen Y, Jun S, Chen J S, Belytschko T, Pan C, Uras R A, Chang C T 1996 *Comput. Meth. Eng.* **3** 3

[18] Liu M B, Liu G R, Lam K Y 2003 *J. Comput. Appl. Math.* **155** 263

[19] He X Y, Zhang R Y, Chen S Y, Doolen G D 1999 *Phys. Fluids* **11** 1143

[20] Liu M B, Xie W P, Liu G R 2005 *Appl. Math. Model.* **29** 1252

[21] Monaghan J J 1992 *Annu. Rev. Astron. Astr.* **30** 543

[22] Libersky L D, Petschek A G, Carney T C, Hipp J R, Allahdadi F A 1993 *J. Comput. Phys.* **109** 67

[23] Liu M B, Liu G R 2006 *Appl. Numer. Math.* **56** 19

[24] Monaghan J J 1982 *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **3** 422

[25] Hernquist L 1993 *Astrophys. J.* **404** 717

[26] Fulk D A 1994 *Ph. D. Dissertation* (Wright Patterson: Air Force Institute of Technology)

[27] Morris J P 1996 *Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications* (Melbourne: Monash University)

[28] Morris J P, Fox P J, Zhu Y 1997 *J. Comput. Phys.* **136** 214

[29] Tao W Q 1988 *Numerical Heat Transfer* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) (in Chinese) [陶文铨 1988 数值传热学 (西安:西安交通大学出版社)]

[30] Monaghan J J 1994 *J. Comput. Phys.* **110** 399

- [31] Liu M B, Liu G R 2005 *Comput. Mech.* **35** 332 (Natick: MathWorks Inc.)
- [32] MathWorks Inc 2008 *Matlab Partial Differential Equation Toolbox* [33] Fang J N, Parriaux A 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 8894

Particle distribution and numerical stability in smoothed particle hydrodynamics method^{*}

Liu Mou-Bin^{1)†} Chang Jian-Zhong²⁾

1) (*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*School of Mechatronic Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China*)

(Received 30 July 2009; revised manuscript received 28 December 2009)

Abstract

Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian meshfree particle method, and has been widely applied to different areas including incompressible or pseudo-incompressible flows with multiphase interfaces and moving boundaries. In this paper, an instability problem has been identified when the conventional SPH method is applied to modeling the Poiseuille flow problem at long-term simulations. It is found that this instability resulted from the particle inconsistency inherent to the SPH method, which originates from the discrete particle approximation and is a fundamental cause for poor approximation accuracy. A new particle approximation approach has been used to restore the particle consistency. We show that this particle consistency restoring approach can produce stable solutions for both regular and irregular particle distributions even at long-term simulations.

Keywords: smoothed particle hydrodynamics, particle approximation, consistency, stability

PACC: 0340G, 4710, 4785

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10942004, 50976108).

[†] E-mail: liumoubin@imech.ac.cn