文章编号：1007-791X（2011）05-0459-06

非均匀脆性介质损伤演化的一维准静态线性失稳及其发展

郝圣旺[1,2,*]

（1. 中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室，北京 100190；2. 燕山大学 建筑工程与力学学院，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：非均匀脆性介质的局部化转变及其发展是非均匀介质通向灾变破坏的一个重要途径，对于均匀场失稳及其发展的认识是理解局部化触发灾变破坏的根本。本文通过微扰分析方法，基于损伤演化方程，分析了非均匀脆性介质的均匀场在微小扰动下的线性失稳问题，指出一维弹脆性系统的损伤演化最大应力点后可能发生失稳。基于分区平均场近似和弹脆性模型分析了系统发生一部分加载另一部分卸载的非均匀演化问题，结果表明均匀场发生这种非均匀转变并继续发展的状态是可以存在的。而发生这种分叉失稳后，系统中出现部分弹性卸载和部分继续损伤的非均匀性会进一步发展和增强。

关键词：非均匀脆性介质；失稳；局部化；灾变破坏

中图分类号：O34　　文献标识码：A　　DOI：10.3969/j.issn.1007-791X.2011.05.017

0　引言

非均匀介质的微损伤的微观观察表明[1-5]，在材料受载变形过程中，微裂纹会由初始的空间随机分布逐渐转向局部性的集中，最后诱发宏观破坏。白以龙、夏蒙棼等[6-15]在理论和实验研究的基础上，发现非均匀脆性介质损伤演化到最后发生宏观灾变破坏的过程实际是一个损伤演化诱致灾变的过程。他们把力学与统计物理学及非线性科学结合起来，建立了统计细观损伤力学和损伤演化诱致灾变理论[3,5,8-10]，并通过跨尺度分析将材料的微结构效应与其宏观力学行为，特别是破坏联系起来，发现初始随机的微损伤的发展会形成宏观上的局部化区[7,10,14-15]。实际上，无序非均匀脆性介质在受载过程中，出现变形和损伤局部化并最终导致灾变性破坏是一种普遍性的现象。损伤演化局部化是造成灾变破坏表现出不确定性的一个重要原因[6,14-15]。

在整体平均场近似下，灾变破坏可由整体平均量表征，在这种意义下，可确定性地描述何时发生宏观灾变破坏[14]。对整体平均场的显著偏离可能是灾变破坏表现出不确定性的一个主要起因，这种对整体平均场的偏离典型地表现为局部化的出现。在很多情况下，灾变破坏是由变形和损伤局部化的发展所触发的[6,14-15]，而灾变破坏点与变形和损伤局部化的一些特征量有关，如局部化区的特征尺度、局部化的程度等[6,14-15]。当发生变形和损伤局部化时，整体平均场近似不再适用，并且局部化的发展并不完全由整体平均量确定[14-17]，这就导致了灾变破坏的不确定性。

对于具有宏观统计均匀性的介质，在外载作用下，在初始阶段系统内的应力和变形大体是均匀的。在这种情况下，系统内出现的细观损伤是随机均匀分布的，相应地，在宏观上表现为均匀损伤。在加载过程中，损伤演化可能会达到一个转变点，即均匀损伤失稳，对均匀损伤的微小偏离可能会被不断放大，导致不同尺度上的损伤场涨落和损伤局部化。所以，非均匀介质损伤由初始均匀的随机损伤演化发生失稳现象是非均匀介质发生局部化转

收稿日期：2011-04-21　基金项目：国家自然科学基金资助项目（90715001，10802073）；河北省高校百名优秀创新人才支持计划项目（CPRC019）

作者简介：*郝圣旺（1975-），男，安徽望江人，博士，副教授，主要研究方向为非均匀介质的灾变破坏和工程结构的防灾减灾，Email：hsw@ysu.edu.cn。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

变的前提。

为了认识和理解材料损伤和变形局部化现象，研究者们做出了很多的努力，并取得了较大的进展。Rudnicki 和 Rice [18] 通过线性稳定性方法分析了一个均匀材料体在给定的本构关系和边界条件下是否会发生局部化的问题。在这些理论中，研究者们 [18-19] 导出的均匀场线性失稳的条件，可能对应于均匀场向局部化转变的条件。该途径的优点是它可基于平均场模型导出，因为它回答的是对平均场发生微小偏离时是否进一步发展的问题。

本文将首先通过微扰分析方法，基于损伤演化方程，分析均匀场在微小扰动下的线性失稳问题，这是损伤演化发生局部化转变的前提。并进一步基于分区平均场近似和弹脆性模型 [20]，研究失稳发生后，进一步的加载是否会导致非均匀性的进一步增强，也就是探讨这种失稳发生后的进一步发展问题，这是局部化演化诱发灾变破坏的一个先决条件。

1 一维情况下均匀变形和损伤的线性失稳

假设准静态均匀变形时的应力、应变和损伤分数为 σ_H，ε_H，D_H。脚标H表示均匀变形状态，它们之间应服从相应的本构关系

$$\sigma_H=\sigma_H(\varepsilon_H,\ D(\varepsilon_H))=\sigma_H(\varepsilon_H)\ 。\tag{1}$$

下面考虑在上述准静态的均匀场上发生一个微小扰动时，考察随着损伤和变形的演化发展，该扰动的发展是否会随着时间成指数型失稳增长，即假设损伤分数D，应力σ，应变ε和质点速度v为

$$\begin{cases} D=D_H+D' & D'\ll D_H \\ \sigma=\sigma_H+\sigma' & \sigma'\ll\sigma_H \\ \varepsilon=\varepsilon_H+\varepsilon' & \varepsilon'\ll\varepsilon_H \\ v=v_H+v' & v'\ll v_H \end{cases}\ ,\tag{2}$$

式中，D'，σ'，ε'，v'为各量的微小扰动量，其远远小于各自相应的均匀场对应的量值D_H，σ_H，ε_H和v_H，并可表示为

$$\begin{cases} D'=D_\mu\cdot e^{\alpha T+ iky} \\ \sigma'=\sigma_\mu\cdot e^{\alpha T+ iky} \\ \varepsilon'=\varepsilon_\mu\cdot e^{\alpha T+ iky} \\ v'=v_\mu\cdot e^{\alpha T+ iky} \end{cases}\ 。\tag{3}$$

式中，T为时间，k为波数，下标μ表示该量为小量。于是，均匀场的线性稳定问题转化为上面各微小扰动量发生随时间长大的线性失稳条件。很容易看出，上式中系数α可能为正实数或实部为正的复数的条件就是微小扰动发生失稳的条件。

在一维情况的准静态应变控制加载下，对于弹脆性损伤统计模型 [15,20]，有$D=D(\varepsilon)$。整体平均场近似下，其本构方程可以写为如下形式 [15,21]：

$$\sigma=E_0(1-D(\varepsilon))\varepsilon=\sigma(\varepsilon)\ ,\tag{4}$$

式中，E_0为材料的弹性模量。系统中，随时间演化的非均匀损伤场和非均匀变形场应该遵守如下的力学方程组 [22]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial T}=f(\sigma(\varepsilon),\ D(\varepsilon);\ \dot{\varepsilon}_0)=f(\varepsilon;\ \dot{\varepsilon}_0) \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial T}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial T}-V_0\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}=0 \end{cases}\ 。\tag{5}$$

上面方程组中的第 1 个方程是损伤场演化控制方程，函数f是损伤动力学函数，表示损伤随时间的演化率，方程中略去了流动项；第 2 个方程为连续方程；第 3 个为动量方程或平衡方程。其中$\dot{\varepsilon}_0$为加载控制量，譬如常见的恒应变率控制加载，又均匀场下的应变即为其平均应变，从而有$\varepsilon_H=\langle\varepsilon(T)\rangle=\dot{\varepsilon}_0T$。其中$\langle\varepsilon(T)\rangle$为系统在$T$时刻的平均应变。对于准静态单调加载，整个加载过程中$\dot{\varepsilon}_0$是一个很小的不变量。V_0为初始体积。方程组 (5) 再加上一个本构方程 (1)，就构成为了一个闭合的控制方程组。在均匀性的近似条件下，其均匀量σ_H，ε_H，D_H和v_H满足如下方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_H}{\partial T}=f(\varepsilon_H;\ \dot{\varepsilon}_0) \\ \dfrac{\partial\varepsilon_H}{\partial T}-\dfrac{\partial v_H}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial v_H}{\partial T}=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_H}{\partial y}=0 \end{cases}\ 。\tag{6}$$

将式 (2) 代入方程组 (5) 的第 1 个式子，将损伤演化函数f在平均场附近展开并忽略其高阶

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

项，则有

$$\frac{\partial D_H}{\partial T}+\frac{\partial D'}{\partial T}=f\approx f(\varepsilon_H;\ \dot{\varepsilon}_0)+f_\varepsilon'(\varepsilon_H;\ \dot{\varepsilon}_0)\varepsilon'\ ,\qquad(7)$$

结合式 (3) 和式 (6)，并整理后，上式变为

$$\alpha D_\mu-f_\varepsilon'\varepsilon_\mu=0\ 。\qquad(8)$$

经过同样整理后，方程组 (5) 的第 2，3 两式分别可以写为

$$\alpha\varepsilon_\mu-k\mathrm{i}v_\mu=0\ ,\qquad(9)$$

和

$$\alpha v_\mu-V_0k\mathrm{i}\sigma_\mu=0\ ,\qquad(10)$$

将本构方程 (1) 写成增量形式，并将式 (2) 和 (3) 代入后整理可得

$$\sigma_\mu-\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\varepsilon_\mu=0\ 。\qquad(11)$$

由式 (8) ~ (11) 组成的以D_μ，v_μ，V_μ和σ_μ为未知数的齐次方程组，有实根的条件为其系数行列式等于 0。根据此条件整理后可以得到如下的关于特征值α的控制方程

$$\alpha\left(\alpha^2+k^2V_0\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)=0\ 。\qquad(12)$$

从上面的分析可以看出，该系统损伤演化线性失稳的条件就是方程 (12) 中的变量α有正的实根或实部为正的复数根的条件。由于初始体积V_0恒大于 0，所以系统发生微扰失稳的条件即为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}<0\ ,\qquad(13)$$

也就是说在最大应力点之后，该系统的均匀变形和损伤场将可能会发生失稳。

可以看出，岩石类非均匀脆性材料在微小扰动下具有由均匀场演化到失稳的特征。以往的研究者们对非均匀脆性介质的局部化转变点的讨论很多，Wawersik 等 [23-24] 报道岩石的局部化可能发生在最大应力点之后。Rudnicki 和 Rice [18] 通过微扰分析，基于弹塑性本构对岩石的局部化条件进行了研究。在他们的结果中，当局部化区所在剪切面上法向受压时失稳点发生在最大应力点之后，对于纯剪和拉伸时，其失稳点可能在最大应力点之后，也可能在最大应力点之前。线性的稳定性分析回答的是均匀场的演化失稳问题，但是这种失稳是否会进一步发展是局部化演化触发灾变破坏的前提。所以，下面将基于一个简化模型来讨论如果最大应力点后发生了局部化，其是否会进一步发展的问题。

2　非均匀变形和损伤场的成核和发展

局部化发生后，一般局部化区的变形和损伤继续发展，而其他的区域发生弹性卸载 [15,18]。要理解这个现象，首先来考察如图 1 所示的由两部分组成的串联系统。当系统是均匀变形和损伤时，即两部分的变形和损伤及其增量均相同时，如图 1 中的力平衡和变形协调条件很容易满足。于是，问题转化为了考察图 1 所示系统中是否存在满足一部分加载而另一部分发生卸载这种情形的条件。

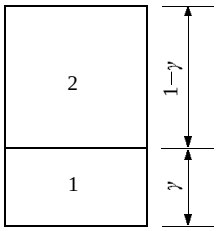

图 1　分区平均场模型描述

Fig. 1　A sketch of local mean field approximation

对于弹脆性材料 (应力应变关系如图 2 所示)，变形增加即加载时，损伤单调增加。所以，当应变增量$\delta\varepsilon>0$时，损伤会继续发展，从而损伤分数D的增量$\delta D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\delta\varepsilon=h(\varepsilon)\delta\varepsilon$。于是，将本构方程式 (4) 写成增量形式并略去高阶项，整理后则有

$$\delta\sigma=E_0[1-D(\varepsilon)-\delta D]\delta\varepsilon-\varepsilon\delta D=$$

$$E_0\left[1-D(\varepsilon)-\varepsilon\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]\delta\varepsilon\ 。\qquad(14)$$

另一方面，如果其变形减小时，其损伤不再增加，而发生如图 1 所示的弹性卸载。本文分析中不考虑损伤的愈合。也就是说应变增量$\delta\varepsilon<0$时，为弹性卸载，损伤增量$\delta D=0$，此时有

$$\delta\sigma=E_0[1-D(\varepsilon)]\delta\varepsilon\ 。\qquad(15)$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

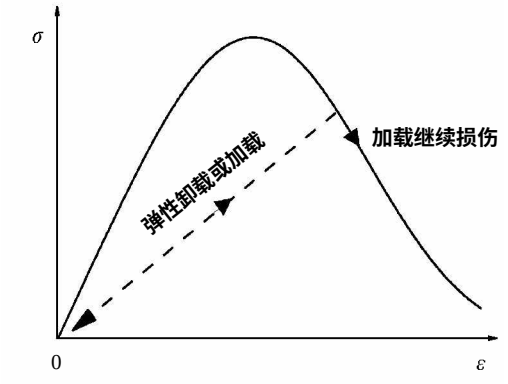

图 2 弹脆性损伤模型

Fig. 2 A sketch of stress-strain relation of ESB model

为简化对非均匀变形和损伤场的分析，假定系统由各自均匀变形的两部分串联组成（如图 1 所示）。采用分区平均场近似，整体体系分为如图 1 中的 1 和 2 两部分组成的串联系统。一部分是占整体尺度比例为γ的部分，其应变为$\varepsilon_1=\varepsilon+\delta\varepsilon_1$，并设$\delta\varepsilon_1>0$，显然$\gamma<1$。该部分的损伤为

$$D_1=D(\varepsilon+\delta\varepsilon_1)=D(\varepsilon)+\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1\delta\varepsilon_1,\ \delta D_1=\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1\delta\varepsilon_1\ ,\quad(16)$$

应力为

$$\sigma_1=\sigma(\varepsilon+\delta\varepsilon_1)=\sigma(\varepsilon)+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1\delta\varepsilon_1,\ \delta\sigma_1=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1\delta\varepsilon_1\ ,\quad(17)$$

σ_1，ε_1和D_1分别为比例为γ部分的名义应力、名义应变和损伤分数。

同时，另一部分所占比例为$1-\gamma$，其应变为$\varepsilon_2=\varepsilon+\delta\varepsilon_2$，损伤为

$$D_2=D(\varepsilon+\delta\varepsilon_2)=D(\varepsilon)+\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_2\delta\varepsilon_2,\ \delta D_2=\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_2\delta\varepsilon_2\ ,\quad(18)$$

应力为

$$\sigma_2=\sigma(\varepsilon+\delta\varepsilon_2)=\sigma(\varepsilon)+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_2\delta\varepsilon_2,\ \delta\sigma_2=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_2\delta\varepsilon_2\ ,\quad(19)$$

σ_2，ε_2和D_2为比例为$1-\gamma$部分的名义应力、名义应变和损伤分数。

根据系统的变形几何关系，系统的总应变为

$$\varepsilon=\gamma\varepsilon_1+(1-\gamma)\varepsilon_2\ ,\ \delta\varepsilon=\gamma\delta\varepsilon_1+(1-\gamma)\delta\varepsilon_2\ 。\quad(20)$$

可以看出，如果是均匀的应变场则要求$\delta\varepsilon_1=\delta\varepsilon_2$。而非均匀应变场则对应于$\delta\varepsilon_1\neq\delta\varepsilon_2$情形。在最大应力之后，即当$\varepsilon>\varepsilon_{\sigma_{max}}$时有$\mathrm{d}\sigma<0$。当系统中占比例为$\gamma$的第 1 部分变形继续增加时，该部分的在最大应力点之后应力增量应满足

$$\delta\sigma_1=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1\delta\varepsilon_1=E_0\left[1-D(\varepsilon)-\varepsilon\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]\delta\varepsilon_1<0\ ,\quad(21)$$

局部化发生以后，应变和损伤将会聚集在局部化区域，而其它区域一般发生弹性卸载[15,18]。本文中假设比例为$1-\gamma$的第 2 部分发生弹性卸载，则有

$$\delta\sigma_2=E_0[1-D(\varepsilon)]\delta\varepsilon_2<0\ 。\quad(22)$$

根据上面第 1 部分加载，相应的第 2 部分发生弹性卸载的假设，即$\delta\varepsilon_1>0$，$\delta\varepsilon_2<0$。由于$D(\varepsilon)$小于 1，所以只要$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1=E_0\left[1-D(\varepsilon)-\varepsilon\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]<0$，也就是说在最大应力点之后，式 (21) 和 (22) 就能成立。

再来考察应变，对于给定的γ，整个系统应变的增量应满足$\delta\varepsilon=\gamma\delta\varepsilon_1+(1-\gamma)\delta\varepsilon_2$，所以$\delta\varepsilon_2=\frac{1}{1-\gamma}(\delta\varepsilon-\gamma\delta\varepsilon_1)$。条件$\delta\varepsilon_1>0$，$\delta\varepsilon_2<0$要求$\gamma\delta\varepsilon_1>\delta\varepsilon$。根据图 1 中第 1 和第 2 两部分的力平衡条件，要求两部分的应力和应力增量均应相等，则由式 (20) ~ (22) 整理后，可以将整个系统的应变增量表示为

$$\delta\varepsilon=\left\{\frac{1-\gamma}{E_0[1-D(\varepsilon)]}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1+\gamma\right\}\delta\varepsilon_1\ 。\quad(23)$$

可以看出，在最大应力之后，即$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_1<0$时，只要$\gamma\delta\varepsilon_1>\delta\varepsilon$，在控制系统边界位移的单调加载下，即$\delta\varepsilon>0$时，原来的均匀系统可能出现$\gamma$部分的变形继续增加，而$1-\gamma$部分发生弹性卸载的非均匀变形现象。也就是说系统会出现均匀的变形和损伤演化失稳现象，这是系统发生应变和损伤局部化的前提。值得注意的是，如果$\gamma\delta\varepsilon_1<\delta\varepsilon$，根据方程 (23) 有$\delta\varepsilon<0$，而在控制系统边界位移的单调加载下又要求$\delta\varepsilon>0$时，此时就会诱发系统的灾变破坏。

下面来考察进一步加载（即名义应变进一步增大）是否会导致系统非均匀性的进一步增强。根据上面分析，系统在最大应力点后发生分叉，即如图 2 所示应力应变曲线所示的一部分发生弹性卸载而另一部分继续加载。继续上文的分析，在图 1 所示

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

串联系统中，分叉时，还是假设比例为γ的 1 区变形继续增加，另一部分（比例为$1-\gamma$的 2 区）弹性卸载，即$\delta\varepsilon_1>0$，$\delta\varepsilon_2<0$。记分叉点的应变为$\varepsilon_L\geq\varepsilon_{\sigma_{max}}$，系统发生分叉后，在边界位移控制加载下，即控制系统的名义应变ε进一步加载到$\varepsilon'=\varepsilon+\delta\varepsilon$，其中，$\varepsilon'>\varepsilon_L\geq\varepsilon_{\sigma_{max}}$，于是，有$\varepsilon_1'=\varepsilon_1+\delta\varepsilon_1$，$\varepsilon_2'=\varepsilon_2+\delta\varepsilon_2$，且$\delta\varepsilon=\gamma\delta\varepsilon_1+(1-\gamma)\delta\varepsilon_2$。

系统发生分叉以后，图 1 中所占比例为γ的 1 区可能有两个状态。一种是其保持加载状态，即其损伤和变形进一步增长，这对应与局部化和非均匀性的进一步发展。另一种情况就是 1 区由加载转变为弹性卸载，而 2 区由弹性卸载转变为加载，这种情况对应扰动的失稳发展停止了或局部化不再发展。

对于第一种情况，系统发生分叉以后，倘若($\delta\varepsilon_1>0$, $\delta\varepsilon_2<0$)，即γ区进一步加载、而$1-\gamma$区进一步卸载，这种状态是可以存在的。

对于第二种情况，倘若($\delta\varepsilon_1<0$, $\delta\varepsilon_2>0$)，即比例为γ的 1 区由加载转变为了卸载即$\delta\varepsilon_1<0$，而比例为$1-\gamma$的 2 区由弹性卸载转变为了加载即$\delta\varepsilon_2>0$。此时，由于$1-\gamma$区是由弹性卸载状态转变为加载状态的，故其加载仍是沿着图 2 中的虚线发生弹性加载，于是会导致$\delta\sigma_2>0$。而γ区成为弹性卸载又要求$\delta\sigma_1<0$，这样就出现了$\delta\sigma_2\neq\delta\sigma_1$的情况，很明显这就导致了系统不满足力的平衡条件。所以，这个状态不可能出现。

由以上分析可以看出，当$\varepsilon>\varepsilon_{\sigma_{max}}$时，在一维串联系统中，如果出现分叉（一部分区域进一步加载、另一部分区域卸载），形成高应变、高损伤的加载区和低应变、低损伤的卸载区，则名义应变进一步增大时，只可能是高应变、高损伤区进一步加载，而低应变、低损伤区进一步卸载。也就是说系统发生分叉以后，进一步加载（即名义应变进一步增大）只会导致非均匀性的进一步增强。

3　结论

本文基于线性失稳分析，指出在一维准静态加载下下均匀场在最大应力点之后会发生线性失稳，变形和损伤场不再能保持均匀。回答了均匀场为什么会发生局部化的问题，给出了局部化发生的一个前提条件。

基于分区平均场近似和弹脆性模型，对系统中一部分加载而另一部分发生弹性卸载的局部化情况的分析，表明均匀场发生这种非均匀转变并继续发展的状态是可以存在的。而发生这种分叉失稳后，不可能出现原来的加载区转变为卸载区而原来的卸载区又反过来转变为加载区的情况。所以，均匀场模式发生失稳以后系统中出现部分弹性卸载和部分继续损伤的非均匀性会进一步发展和增强。

参考文献

[1] Rathbun A P, Marone C. Effect of strain localization on frictional behavior of sheared granular materials [J]. J Geophys Res, 2010, 115 (B1): B01204.

[2] Van Mier Jan G M, Man Hau-Kit. Some notes on microcracking, softening, localization, and size effects [J]. International Journal of Damage Mechanics, 2009,18 (3): 283-309.

[3] Desrues J, Bésuelle P, Lewis H. Strain localization in geomaterials [J]. Geological Society, London, Special Publications, 2007,289: 47-73.

[4] Reches Z, Lockner D A. Nucleation and growth of faults in brittle rocks [J]. J Geophys Res, 1994,99 (B9): 18159-18173.

[5] Lockner D A, Byerlee J D, Kuksenko V, et al.. Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite [J]. Nature, 1991, 350 (6313): 39-42.

[6] Bai Y L, Wang H Y, Xia M F, et al.. Statistical mesomechanics of solid, linking coupled multiple space and time scales [J]. Applied Mechanics Reviews, 2005,58 (6): 372-388.

[7] Li H L, Bai Y L, Xia M F, et al.. Damage localization as a possible precursor of earthquake rupture [J]. Pure and Applied Geophysics, 2000,157 (11/12): 1929-1943.

[8] Bai Y L, Xia M F, Ke F J, et al.. Closed trans-scale statistical microdamage mechanics [J]. Acta Mechica Sinica, 2002,18 (1): 1-17.

[9] Ke F J, Bai Y L, Xia M F. Evolution of ideal micro-crack system [J]. Science in China, 1990,33 (12): 1447-1459.

[10] Rong F, Wang H Y, Xia M F, et al.. Catastrophic rupture induced damage coalescence in heterogeneous brittle media [J]. Pure and Applied Geophysics, 2006,163 (9): 1847-1855.

[11] 夏蒙棼, 韩闻生, 柯孚久, 等. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致灾变（Ⅰ）[J]. 力学进展, 1995,25 (1): 1-38.

[12] 夏蒙棼, 韩闻生, 柯孚久, 等. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致灾变（Ⅱ）[J]. 力学进展, 1995,25 (2): 145-173.

[13] Wei Y J, Xia M F, Ke F J, et al.. Evolution-induced catastrophe and its predictability [J]. Pure and Applied Geophysics, 2000,157 (11/12): 1945-1957.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[14] Hao Sheng-wang, Xia Meng-fen, Ke Fu-jiu.et al.. Evolution of localized damage zone in heterogeneous media [J]. International Journal of Damage Mechanics, 2010,19 (7): 787-804.

[15] Hao S W, Wang H Y, Xia M F, et al.. Relationship between strain localization and catastrophic rupture [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2007,48 (1): 41-49.

[16] Olsson W A, Holcomb D J. Compaction localization in porous rock [J]. Geophysical Research Letters, 2000,27 (21): 3537-3540.

[17] Bazant Z P, Gilles P C. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989,115 (4): 755-767.

[18] Rudnicki J W, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975,23 (6): 371-394.

[19] Benallal A, Comi C. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003,51 (5): 851-899.

[20] Bai Y L, Hao S W. Elastic and statistical brittle (ESB) model, damage localization and catastrophic rupture [C] //Proceedings Of International Conference On Health Monitoring Of Structure, Materials And Environment. Nanjing: Southeast University Press, 2007: 1-5.

[21] Krajcinovic D, Rinaldi A. Statistical damage mechanics-part I: theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 2005,72 (1): 76-85.

[22] Bai Y L, Bai J, Li H L, et al.. Damage evolution localization and failure of solid subjected to impact loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 2000,24 (6/7): 685-701.

[23] Wawersik W R, Fairhurst C. A study of brittle rock fracture in laboratory compression [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1970,7 (5): 561-575.

[24] Wawersik W R, Brace W F. Post-failure behavior of a granite and diabase [J]. Rock Mech, 1971,3 (2): 61-85.

One-dimension damage evolution instability and its growth of heterogeneous brittle material under quasi-static loading

HAO Sheng-wang[1,2]

(1. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. College of Architectural Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: The uncertainty of both localization transition and its growth are a key factor leading to the uncertainty of catastrophic rupture. In this paper, instabilities in heterogeneous material are investigated for one-dimensional state under quasi-static loadings by using a perturbation approach. The interests of present paper focused in particular on the onset and growth of localization. The perturbation analysis indicated that the instability might be occur after peak stress point. Base on local-mean-field approximation and the elastic and statistical brittle (ESB) model, it is demonstrated that the state that one part unloads elastically but the other part is loaded could appear if the system is loaded by controlling the boundary displacement. Moreover, the localization would grow with loading. These results can help to understand the mechanism of localization evolution inducing catastrophic rupture.

Key words: heterogeneous brittle material; instability; localization; catastrophic rupture

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net