文章编号：1000-4750(2012)02-0222-08

各向异性双重孔隙介质的应力与油水两相渗流耦合理论模型

赵　颖

(中国科学院力学研究所环境力学重点实验室，北京 100190)

摘　要：针对天然裂缝性油藏的特性，建立了描述双重孔隙介质中油水两相流体流动特性的流固耦合理论模型。该模型不仅考虑了渗透率的各向异性，而且考虑了岩石固体骨架变形的各向异性。渗流方程是依据双重孔隙的概念建立起来的，而固体骨架变形控制方程则是根据 Biot 的等温、线性孔隙弹性理论建立起来的。同时，给出了横向各向同性及结构各向异性、固体材料各向同性时的双重孔隙介质的应力与油水两相渗流耦合理论模型。对该模型进行了简化，并将其简化后模型与单相流的各项同性和各向异性双重孔隙介质流固耦合理论模型进行了比较。

关键词：各向异性；双重孔隙介质；裂隙；流固耦合；两相流

中图分类号：TV139.1　　**文献标志码：**A

FULLY COUPLED DUAL-POROSITY MODEL FOR OIL-WATER TWO-PHASE FLOW IN ANISOTROPIC FORMATIONS

ZHAO Ying

(Key Laboratory of Environmental Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: A fully-coupled geo-mechanics and two-phase (oil-water) fluid-flow model is developed to analyze pressure transient problems in naturally fractured reservoirs (or stress-sensitive reservoirs) with deformable anisotropic formation. For fractured reservoirs, the rock is actually dual-porosity media of matrix pores and fractures, fractures are the main storage of oil. Fluid flow is modeled within the context of dual-porosity concept and based on three basic principles: mass conservation, Darcy's law, and equation of state. While geo-mechanics is modeled following Biot's two-phase (fluid and rock), isothermal, linear poroelastic theory, which has three basic principles: stress equilibrium, strain-displacement, and strain-stress-pressure relations. The development follows along the line of the conventional and existing porous single-phase fluid-flow modeling. The interpretation of the pore volumetric changes of the dual continua, fractures and matrix-blocks, and the associated effective stress law for anisotropic double porous media are the most difficult and critical coupling considerations. The model reduces, in the case of isotropic and anisotropic but single-phase response,
to that suggested by Li et. al. and Zhao. et al.

Key words: anisotropy; double porous media; fracture; fluid-solid coupling; two-phase (oil-water) flow

近些年来，随着裂缝性油气田的开发，人们对双重孔隙介质的孔隙结构及流体渗流规律进行了大量的研究。双重孔隙介质概念已广泛应用于分析裂缝性多孔介质中流体流动及热传导过程。早在 1960 年，苏联学者 Barrenblatt[1]等人就首先提出了双重孔隙的概念，并提出了均质、各向同性的双重孔隙介质的渗流微分方程。然而，在 Barrenblatt 等人开创性工作的基础上，真正激发工程研究人员将

收稿日期：2010-05-14；修改日期：2011-04-18

基金项目：国家自然科学基金项目(11002146)；国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(2010CB731502)

通讯作者：赵　颖(1977－)，女，辽宁沈阳人，助研，博士，主要从事渗流力学及岩石力学等方面研究(E-mail: zhaoying@imech.ac.cn)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

双重孔隙模型应用于裂缝性油藏的流体流动研究的是 Warren 和 Root[2]对 Barrenblatt 等人的原始模型进行的简化。这也为其后的双重孔隙介质模型在裂缝性介质中的广泛应用奠定了坚实的基础。

孔隙介质岩石作为石油、天然气储藏体，其力学性能对油气的开采有很大的影响。但是，在早期的油气藏开采研究中，研究主要集中在油气水在地下孔隙中的运移渗流过程，把岩石中的孔隙和裂隙当作刚性的流通通道，以及不可压缩的储集空间，而对岩体本身的力学性质研究不多。最早研究流体-固体变形耦合现象的是 Terzaghi[3]。他首先将可变形、饱和的多孔介质中流体的流动作为流动-变形的耦合问题来看待，提出了有效应力的概念，建立了一维固结模型，该模型在土力学中得到了广泛应用。Biot[4]进一步研究了三向变形材料与孔隙压力的相互作用，建立了比较完善的三维固结理论。但是，由于其理论主要侧重于研究力学问题(与流体流动问题相比)，因此，在概念的理解上和参数(如岩石压缩系数)的物理解释上均不能与传统的渗流模型相一致。为了解决上述问题，Geertsma[5]、Verruijt[6]和 Chen[7]等人在传统渗流模型的基础上重新解释并定义了 Biot 理论，使得新建理论与已有渗流理论和模型有很好的相容性和延展性，并建立了各向同性单重孔隙介质流固耦合理论模型。此后，为了能够使模型适用于裂缝性双重孔隙介质油藏，许多学者致力于将 Biot 的孔隙弹性理论与 Barrenblatt 等人的双重孔隙概念相结合的研究。最终建立的诸多模型根据其所采用的方法大体分为以下两类：

1) 第 1 类模型是根据混合理论建立的。该理论认为，在混合介质中的各组分表现出来的物理特性、热力特性、水力特性和力学特性等与混合物表现的相应特性有明显的差异，各组分服从其原有的控制方程，即混合物被看作各单相介质的叠加，而每相遵循其自身的运动规律。此外，在任何时间，每一空间点都同时被几种不同的单相颗粒介质所占据，且每种颗粒具有自身的物性。Wilson 和 Aifantis[8]、Beskos 和 Aifantis[9]及 Bai[10]等人的双重孔隙介质流固耦合模型均是根据该理论建立的。他们所建立的模型有两个相关的特性：① 当忽略孔隙和裂隙之间的窜流项时，上述根据混合理论建立的双重孔隙模型中的渗流模型与单重孔隙渗流模型具有相同的形式；② 首次提出了唯象系数，并且给出了它的物理解释。特性①意味着在混合介质中，其中一种介质与应力相关的岩石特性与混合介质中的其它介质无关。这反过来将给唯象系数的物理解释带来困难，甚至与所采用的固体骨架变形控制方程不一致。

2) 第 2 类模型是采用与建立传统渗流模型相同的方法建立起来的，其渗流与应力的耦合主要体现在整个相互作用的过程中岩石特性与应力相关。因此，确定与应力相关的岩石特性对于完成耦合作用至关重要。Duguid 和 Lee[11]、Valliappan 和 Khalili-Naghadeh[12]、Chen[13]及 Li[14]等人均采用该方法建立了双重孔隙介质流固耦合模型。Duguid 和 Lee[11]侧重于研究渗流问题，而忽略了大多数的力学耦合问题。该模型假设固体骨架不可压缩，并且假定裂隙和基质孔隙的孔隙体积压缩系数均为流体压缩系数，即仅为流体压力的函数。上述特性表明，围限应力为常数是一个隐含的假定条件。在渗流方程中，没有采用明确的岩石压缩系数(固体、孔隙或体积压缩系数)。此外，该模型中唯一的耦合项(固体骨架变形速度的散度)也最终在数值求解过程中被忽略了。Valliappan 和 Khalili-Naghadeh[12]考虑并明确了岩石压缩系数。但是，所采用的某些岩石压缩系数的表达式及有效应力关系式与假设的力学理论不一致。并且，在总的推导过程中，隐含了岩石固体骨架不可压缩的假定，这与建立模型的初衷及所提出的模型方程矛盾。上述讨论模型中的所有不足之处在 Chen[13]和 Li[14]等人所建立的模型中得到了解决。其所建模型的主要特点有：① 保证了模型内部的一致性；② 使得单重孔隙模型与双重孔隙模型之间具有连续性，即可以平稳过渡。但是，Chen 等人所建立的模型是在假定岩石固体骨架力学性质为各向同性的基础上建立起来的，这与实际的裂缝性油藏的力学性质不同。因为与砂岩地层不同，裂缝性油藏通常为各向异性油藏，其各向异性不仅表现为渗透率的各向异性，而且表现为固体骨架力学性质的各向异性。

针对裂缝性油藏这类各向异性油藏的特点，Zhao[15]等人在 Carroll[16]建立的各向异性单重孔隙介质弹性变形有效应力定律的基础上，建立了描述孔隙-裂隙流体压力共同作用下孔隙介质力学响应的各向异性双重孔隙介质有效应力定律。并在此基础上，建立了各向异性双重孔隙介质流固耦合理论模型[17]。该模型不仅考虑了渗透率的各向异性，而

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

且考虑了岩石固体骨架力学性质的各向异性，因此可以更真实的描述具有天然裂缝的碳酸盐岩储层的渗流特征。但是该模型仅限于研究介质中只有单相流体，即单相水、单相油或单相气。而实际储集层中的孔隙几乎总是包含有几种不同的流体[18]，即总是油水或油气水共存共渗。因此，本文针对油水两相流体在各向异性双重孔隙介质中的流动与固体变形耦合作用进行研究。

1 岩石固体骨架变形控制方程

孔隙弹性理论的 3 个基本原理是：应力平衡、应变-位移关系和应变-应力-压力关系，其数学表达式如下：

1) 应力平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0 \tag{1}$$

2) 几何方程(应变-位移关系)：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

3) 应变-应力-压力关系：

$$\sigma_{ij}^{e}=\sigma_{ij}-\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}p_1-\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}p_2=\boldsymbol{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

式中：σ_{ij} 和 ε_{kl} 分别为总应力张量和应变张量的分量；u_i 是固体位移分量；$\boldsymbol{C}_{ijkl}$ 是弹性常数张量；σ_{ij}^{e} 为裂缝性双重孔隙介质有效应力；p_n 是平均流体压力；$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{n}$ 为有效应力系数张量，其值为[15]：

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}=\delta_{ij}-\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{M}_{klmm}^{*},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}=\boldsymbol{C}_{ijkl}M_{klmm}^{*}-\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{M}_{klmm}^{s}。 \tag{4}$$

式中：δ_{ij} 为 Kronecher 符号；$\boldsymbol{M}_{klmn}$ 为弹性柔度张量；上标 * 代表单重孔隙非裂隙系统；上标 s 表示固体颗粒；下标 $n=1,2$ 分别表示孔隙和裂隙。将式(2)和式(3)代入到式(1)中，得到：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\partial x_k}\right)=-\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_1}{\partial x_j}-\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_2}{\partial x_j} \tag{5}$$

式(5)即为各向异性双重孔隙介质单相流体流动与固体变形耦合的固体骨架变形控制方程。对于不相溶混的油水两相流体流动，考虑耦合作用后的固体骨架变形控制方程，其形式和单相流体流动与固体变形耦合的固体骨架变形控制方程相同，只是孔隙和裂隙中的流体压力均为两相流体的平均压力，即有：

$$p_n=p_{\mathrm{w}}^{n}s_{\mathrm{w}}^{n}+p_{\mathrm{o}}^{n}s_{\mathrm{o}}^{n};\ s_{\mathrm{w}}^{n}+s_{\mathrm{o}}^{n}=1,$$
$$p_c^{n}=p_{\mathrm{w}}^{n}-p_{\mathrm{o}}^{n}=p_c^{n}(s_{\mathrm{w}}^{n},s_{\mathrm{o}}^{n})。 \tag{6}$$

其中：s_m 是流体饱和度，下标 $m=\mathrm{o},\mathrm{w}$ 分别代表油和水；p_c 为毛管力，与油和水的饱和度相关。将式(6)代入到式(5)中，并认为：

$$s_{\mathrm{o}}^{1}=s_{\mathrm{o}}^{2}=s_{\mathrm{o}};\ s_{\mathrm{w}}^{1}=s_{\mathrm{w}}^{2}=s_{\mathrm{w}} \tag{7}$$

可以得到：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\partial x_k}\right)=$$
$$-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{2}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{2}}{\partial x_j} \tag{8}$$

式(8)即为各向异性双重孔隙介质油水两相流体流动与固体变形耦合的固体骨架变形控制方程。

下面研究它的 3 种简化形式：

① 当岩石固体骨架变形性质为横向各向同性时，有[16]：

$$C_{ijkl}=\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+$$
$$\alpha(\delta_{ik}h_jh_l+\delta_{jl}h_ih_k+\delta_{il}h_jh_k+\delta_{jk}h_ih_l)+$$
$$\beta(\delta_{ij}h_kh_l+\delta_{kl}h_ih_j)+\gamma h_ih_jh_kh_l \tag{9}$$

其中：μ、λ、α、β 和 γ 为常数；h_i 为相对于对称轴的方向余弦。将式(9)代入到式(8)中，得到：

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\alpha h_ih_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_j}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}+$$
$$(\alpha+\beta)h_ih_j\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_k}+\alpha h_jh_k\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}+$$
$$(\alpha+\beta)h_jh_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_i}+\gamma h_ih_jh_kh_l\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}=$$
$$-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{2}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{2}}{\partial x_j} \tag{10}$$

其中有效应力系数张量具有如下简化形式[15]：

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}=\delta_{ij}(1-AA_1^{*}-CB_1^{*})-(BA_1^{*}+DB_1^{*})h_ih_j,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}=\delta_{ij}(AA_1^{*}+CB_1^{*}-AA_1^{s}-CB_1^{s})+$$
$$(BA_1^{*}+DB_1^{*}-BA_1^{s}-DB_1^{s})h_ih_j。 \tag{11}$$

其中：$A=2\mu+3\lambda+\beta$；$B=4\alpha+3\beta+\gamma$；$C=\lambda+\beta$；$D=2\mu+4\alpha+\beta+\gamma$；$A_1^{s}=2\mu_1^{s}+3\lambda_1^{s}+\beta_1^{s}$；$B_1^{s}=4\alpha_1^{s}+3\beta_1^{s}+\gamma_1^{s}$；$A_1^{*}=2\mu_1^{*}+3\lambda_1^{*}+\beta_1^{*}$；$B_1^{*}=4\alpha_1^{*}+3\beta_1^{*}+\gamma_1^{*}$。

② 当各向异性仅仅是结构上的各向异性，而固体材料是各向同性时，$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}$、$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}$ 分别简化为[15]：

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}=\delta_{ij}(1-AA_1^*-CB_1^*)-(BA_1^*+DB_1^*)h_ih_j,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}=\delta_{ij}\left(AA_1^*+CB_1^*-\frac{Ac_s}{3}\right)+\left(BA_1^*+DB_1^*-\frac{Bc_s}{3}\right)h_ih_j。\tag{12}$$

其中，c_s 为无孔隙材料的压缩系数。

③ 如果孔隙体积的几何形状也是各向同性的，式(10)和式(11)则分别简化为：

$$\mu\frac{\partial^2u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2u_j}{\partial x_j\partial x_i}=-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{2}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{2}}{\partial x_j}\tag{13}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{1}=\delta_{ij}\left(1-\frac{c^*}{c_b}\right);\ \boldsymbol{\alpha}_{ij}^{2}=\delta_{ij}\left(\frac{c^*-c_s}{c_b}\right)\tag{14}$$

将式(14)代入到式(13)中，得到:

$$\mu\frac{\partial^2u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2u_j}{\partial x_i\partial x_j}=-s_{\mathrm{o}}\alpha_1\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_1\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{1}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\alpha}_2\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{2}}{\partial x_j}-s_{\mathrm{w}}\boldsymbol{\alpha}_2\frac{\partial p_{\mathrm{w}}^{2}}{\partial x_j}\tag{15}$$

其中：$\alpha_1=1-(c^*/c_b)$；$\alpha_2=(c^*-c_s)/c_b$。

对于单相流体，如单相油，有：

$$s_{\mathrm{o}}=1;\ s_{\mathrm{w}}=0;\ p_{\mathrm{w}}^{n}=0\tag{16}$$

将式(16)代入到式(14)，得到：

$$\mu\frac{\partial^2u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2u_j}{\partial x_i\partial x_j}=-\alpha_1\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{1}}{\partial x_j}-\alpha_2\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^{2}}{\partial x_j}\tag{17}$$

式(17)即为单相流的各向同性双重孔隙介质流固耦合固体骨架变形控制方程，与黎水泉[14]所给出的方程形式相同。

2　流体流动控制方程

双重孔隙介质中流体的流动主要遵循 3 个基本原理：质量守恒、达西定律(假定流体是牛顿流体，流动为层流和线性达西流动)和状态方程，其数学表达式如下：

1) 质量守恒方程：

不相溶混的油水两相流体：

$$(\phi_n\rho_{\mathrm{o}}s_{\mathrm{o}}^n\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}i}^n)_{,i}+\frac{\partial(\phi_n\rho_{\mathrm{o}}s_{\mathrm{o}}^n)}{\partial t}+(-1)^n\rho_{\mathrm{o}}s_{\mathrm{o}}^n\Gamma=0,$$

$$(\phi_n\rho_{\mathrm{w}}s_{\mathrm{w}}^n\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}i}^n)_{,i}+\frac{\partial(\phi_n\rho_{\mathrm{w}}s_{\mathrm{w}}^n)}{\partial t}+(-1)^n\rho_{\mathrm{w}}s_{\mathrm{w}}^n\Gamma=0。\tag{18}$$

固体：

$$[\rho_s(1-\phi_t)v_{is}]_{,i}+\frac{\partial[(1-\phi_t)\rho_s]}{\partial t}=0\tag{19}$$

2) 达西定律：

$$\phi_ns_{\mathrm{o}}^n(\boldsymbol{v}_{\mathrm{o}i}^n-v_{is})=-\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^nk_{r\mathrm{o}}^n}{\mu_{\mathrm{o}}}p_{\mathrm{o},j}^n;$$

$$\phi_ns_{\mathrm{w}}^n(\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}i}^n-v_{is})=-\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^nk_{r\mathrm{w}}^n}{\mu_{\mathrm{w}}}p_{\mathrm{w},j}^n。\tag{20}$$

3) 状态方程(等温下的流体压缩系数)：

$$c_{\mathrm{o}}^n=\frac{1}{\rho_{\mathrm{o}}}\frac{\partial\rho_{\mathrm{o}}}{\partial p_{\mathrm{o}}^n};\ c_{\mathrm{w}}^n=\frac{1}{\rho_{\mathrm{w}}}\frac{\partial\rho_{\mathrm{w}}}{\partial p_{\mathrm{w}}^n}\tag{21}$$

式中：ρ_m 是流体密度；$\boldsymbol{v}_{mi}^n$ 为流体真实速度向量；ϕ_n 为孔隙度；ϕ_t 是总的孔隙度($\phi_t=\phi_1+\phi_2$)；ρ_s 和 v_{is} 分别为固体密度和固体变形速度；$\boldsymbol{k}_{ij}^n$ 为绝对渗透系数张量；k_{mr}^n 为相对渗透系数；μ_m 是流体粘度；$p_{m,j}^n$ 是流体压力梯度；c_m^n 是流体压缩系数；Γ 是单位骨架体积上的裂隙与基质孔隙之间的体积交换率；t 为时间；下标 $m=\mathrm{o},\mathrm{w}$ 分别代表油和水。

将达西定律式(20)代入式(18)中，得到：

$$\left(\rho_m\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^nk_{mr}^n}{\mu_m}p_{m,j}^n\right)_{,i}=\frac{\mathrm{d}(\phi_ns_m^n\rho_m)}{\mathrm{d}t}+\phi_ns_m^n\rho_m(v_{is})_{,i}+(-1)^ns_m^n\rho_m\Gamma\tag{22}$$

其中，$\mathrm{d}(\,)/\mathrm{d}t$ 为物质导数。

现再将式(22)右端展开，假设饱和度 s_m 不随时间变化而变化，可以得到：

$$\left(\rho_m\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^nk_{mr}^n}{\mu_m}p_{m,j}^n\right)_{,i}=s_m^n\phi_n\rho_m\cdot\left[\frac{1}{\rho_m}\frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\phi_n}\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}t}+(v_{is})_{,i}\right]+(-1)^ns_m^n\rho_m\Gamma\tag{23}$$

将固体质量守恒方程式(19)的第 1 项展开，得到：

$$(v_{is})_{,i}=-\frac{1}{\rho_s(1-\phi_t)}\frac{\mathrm{d}[(1-\phi_t)\rho_s]}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V_b}\frac{\mathrm{d}V_b}{\mathrm{d}t}\tag{24}$$

因此，固体变形速度的散度仅仅影响整体体积的变化率。由式(24)可知，当 $\boldsymbol{v}_s=0$(即固体骨架不变形)时，$\mathrm{d}V_b=0$。

由 $\phi_n=V_{pn}/V_b$，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\phi_n}=\frac{\mathrm{d}V_{pn}}{V_{pn}}-\frac{\mathrm{d}V_b}{V_b}\tag{25}$$

将式(24)和式(25)代入到式(23)中，得到：

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left(\rho_m \frac{\boldsymbol{k}_{ij}^n k_{mr}^n}{\mu_m} p_{m,j}^n\right)_{,i} =$$

$$s_m^n \phi_n \rho_m \left[\frac{1}{\rho_m}\frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{V_{pn}}\frac{\mathrm{d}V_{pn}}{\mathrm{d}t}\right] + (-1)^n s_m^n \rho_m \Gamma \quad (26)$$

从式(26)可以看出，其右端项基本上代表了流体密度和孔隙体积的变化率。而流体密度的变化与流体压缩系数 c_m^n 有如下关系(通过式(21))：

$$c_m^n \frac{\mathrm{d}p_m^n}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho_m}\frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}t} \quad (27)$$

将上述结果代入到式(26)中，得到：

$$\left(\rho_m \frac{\boldsymbol{k}_{ij}^n k_{mr}^n}{\mu_m} p_{m,j}^n\right)_{,i} =$$

$$s_m^n \phi_n \rho_m \left[c_m^n \frac{\mathrm{d}p_m^n}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{V_{pn}}\frac{\mathrm{d}V_{pn}}{\mathrm{d}t}\right] + (-1)^n s_m^n \rho_m \Gamma \quad (28)$$

下面我们来讨论单位孔隙和裂隙体积的体积变化量 $\mathrm{d}V_{pn}/V_{pn}$。显然，由于孔隙平均压力 p_1 或裂缝平均压力 p_2 增大，会引起孔隙体积或裂隙体积的增加；而外加压应力的增加不仅使固体骨架体积减少，同时也会引起孔隙体积和裂缝体积的减少。假设双重孔隙介质三种受载状态如图 1、图 2 和图 3 所示。

将 Betti 互等定律应用于各向异性双重孔隙介质，可以得到关于上述 3 种载荷的 3 个关系式：

1) 考虑图 1 和图 2 所示两种载荷情况，可以得到[15]：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\sigma_{ij} M_{ijkk}^* \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_1 \phi_1 M_{iikk}^* \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_2 \phi_2 \varepsilon_{ii}^* = \\ &\quad \mathrm{d}p_1 M_{iikl} \mathrm{d}\sigma_{kl} - \mathrm{d}p_1 (M_{iikk} - M_{iikk}^*)\mathrm{d}p_1 + \\ &\quad \mathrm{d}p_2 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*)\mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_1 \phi_1 \varepsilon_{ii}^1\end{aligned} \quad (29)$$

2) 考虑图 1 和图 3 所示两种载荷情况，可以得到：

$$\begin{aligned}&M_{iikl}\mathrm{d}\sigma_{kl} - \mathrm{d}p_1 (M_{iikk} - M_{iikk}^*) + \\ &\quad (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*)\mathrm{d}p_2 + \varepsilon_{ii}^1 \phi_1 + \varepsilon_{ii}^2 \phi_2 = \\ &\quad \mathrm{d}\sigma_{ij} M_{ijkk}^s + \mathrm{d}p_1 \phi_1 M_{iikk}^s + \mathrm{d}p_2 \phi_2 M_{iikk}^s\end{aligned} \quad (30)$$

3) 考虑图 2 和图 3 所示两种载荷情况，可以得到：

$$\mathrm{d}p_1 M_{iikk}^s + \mathrm{d}p_1 \phi_1 M_{iikk}^s = M_{iikk}^* \mathrm{d}p_1 + \phi_1 M_{iikk}^* \mathrm{d}p_1 + \phi_2 \varepsilon_{ii}^* \quad (31)$$

其中：ε_{ii} 为体积应变；上标*表示单重孔隙介质；上标 s 表示固体材料；上标 1 表示双重孔隙介质中的基质孔隙；上标 2 表示双重孔隙介质中的裂隙；重复指标表示求和。

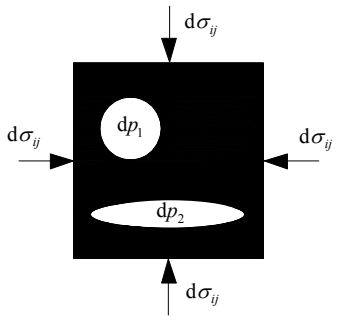

图 1 受载状态示意图

Fig.1 Loading on the representative element

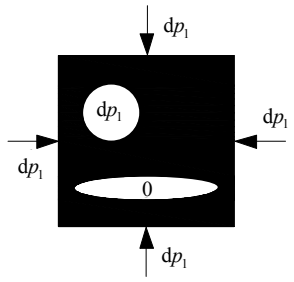

图 2 $\mathrm{d}p_2 = 0$ 时的受载状态示意图

Fig.2 Load schematics when $\mathrm{d}p_2 = 0$

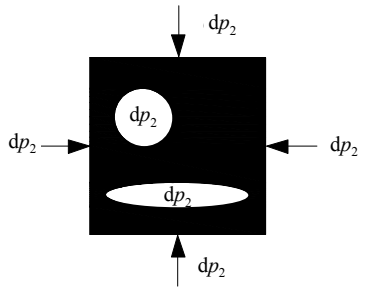

图 3 $\mathrm{d}p_1\delta_{ij} = \mathrm{d}p_2\delta_{ij} = \mathrm{d}\sigma_{ij}$ 时的受载状态示意图

Fig.3 Load schematics when $\mathrm{d}p_1\delta_{ij}, \mathrm{d}p_2\delta_{ij}$ and $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ are equal

由式(31)可以解出：

$$\phi_2 \varepsilon_{ii}^* = \mathrm{d}p_1 (1+\phi_1)(M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) \quad (32)$$

再将式(32)代入到式(29)和式(30)中，并根据体积应变的定义，可以求出：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_{p_1}}{V_{p_1}}\phi_1 = \varepsilon_{ii}^1 \phi_1 = \mathrm{d}\sigma_{ij}(M_{ijkk}^* - M_{kkij}) + \mathrm{d}p_1[\phi_1 M_{iikk}^* + \\ (M_{iikk} - M_{iikk}^*)] + \mathrm{d}p_2 \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*)\end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_{p_2}}{V_{p_2}}\phi_2 = \varepsilon_{ii}^2 \phi_2 = \mathrm{d}\sigma_{ij}(M_{ijkk}^s - M_{ijkk}^*) + \mathrm{d}p_1 \phi_1 (M_{iikk}^s - \\ M_{iikk}^*) + \mathrm{d}p_2[\phi_2 M_{iikk}^s - (1+\phi_1)(M_{iikk}^s - M_{iikk}^*)]\end{aligned} \quad (33b)$$

其中：V_{p_1} 为孔隙体积；V_{p_2} 为裂隙体积。

将上式和式(6)代入到式(28)中，结合式(2)、式(3)和式(7)，并认为密度为常数，可以得到：

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^1 k_{\mathrm{or}}^1}{\mu_{\mathrm{o}}} p_{\mathrm{o},j}^1\right)_{,i} = b_{11} s_{\mathrm{o}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^1}{\partial t} + b_{12} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^1}{\partial t} +$$

$$b_{13} s_{\mathrm{o}}^2 \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^2}{\partial t} + b_{14} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^2}{\partial t} - \frac{1}{2} s_{\mathrm{o}} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) -$$

$$s_{\mathrm{o}} \Gamma \left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^1 k_{\mathrm{wr}}^1}{\mu_{\mathrm{w}}} p_{\mathrm{w},j}^1\right)_{,i} = b_{21} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^1}{\partial t} + b_{22} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^1}{\partial t} +$$

$$b_{23} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^2}{\partial t} + b_{24} s_{\mathrm{w}}^2 \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^2}{\partial t} - \frac{1}{2} s_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) -$$

$$s_{\mathrm{w}} \Gamma \left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^2 k_{\mathrm{or}}^2}{\mu_{\mathrm{o}}} p_{\mathrm{o},j}^2\right)_{,i} = b_{31} s_{\mathrm{o}}^2 \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^1}{\partial t} + b_{32} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^1}{\partial t} +$$

$$b_{33} s_{\mathrm{o}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^2}{\partial t} + b_{34} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^2}{\partial t} - \frac{1}{2} s_{\mathrm{o}} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) +$$

$$s_{\mathrm{o}} \Gamma \left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^2 k_{\mathrm{wr}}^2}{\mu_{\mathrm{w}}} p_{\mathrm{w},j}^2\right)_{,i} = b_{41} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^1}{\partial t} + b_{42} s_{\mathrm{w}}^2 \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^1}{\partial t} +$$

$$b_{43} s_{\mathrm{o}} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{o}}^2}{\partial t} + b_{44} s_{\mathrm{w}} \frac{\partial p_{\mathrm{w}}^2}{\partial t} -$$

$$\frac{1}{2} s_{\mathrm{w}} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + s_{\mathrm{w}} \Gamma \tag{34}$$

其中：

$$b_{11} = c_{\mathrm{o}}^1 \phi_1 + s_{\mathrm{o}}[\phi_1 M_{iikk}^* + (M_{iikk} - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1],$$

$$b_{12} = b_{21} = \phi_1 M_{iikk}^* + (M_{iikk} - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1,$$

$$b_{13} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2,$$

$$b_{14} = b_{23} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2,$$

$$b_{22} = c_{\mathrm{w}}^1 \phi_1 + s_{\mathrm{w}}[\phi_1 M_{iikk}^* + (M_{iikk} - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1],$$

$$b_{24} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{1ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2,$$

$$b_{31} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1,$$

$$b_{32} = b_{41} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1,$$

$$b_{33} = c_{\mathrm{o}}^2 \phi_2 + s_{\mathrm{o}}[\phi_2 M_{iikk}^s - (1+\phi_1)(M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2],$$

$$b_{34} = b_{43} = \phi_2 M_{iikk}^s - (1+\phi_1)(M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2,$$

$$b_{42} = \phi_1 (M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^1,$$

$$b_{44} = c_{\mathrm{w}}^2 \phi_2 + s_{\mathrm{w}}[\phi_2 M_{iikk}^s - (1+\phi_1)(M_{iikk}^s - M_{iikk}^*) + a_{2ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^2] \tag{35}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^1$、$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^2$ 的值见式(4)，a_{1ij}、a_{2ij} 的值为：

$$a_{1ij} = M_{ijkk}^* - M_{kkij}^*;\quad a_{2ij} = M_{ijkk}^s - M_{ijkk}^* \tag{36}$$

式(34)即为考虑固体变形各向异性的油水两相流体流动控制方程。下面研究它 3 种简化形式：

① 当岩石固体骨架变形性质为横向各向同性时，有[16]：

$$\begin{aligned} M_{ijkl} = {} & \mu_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda_1 \delta_{ij}\delta_{kl} + \\ & \alpha_1(\delta_{ik} h_j h_l + \delta_{jl} h_i h_k + \delta_{il} h_j h_k + \delta_{jk} h_i h_l) + \\ & \beta_1(\delta_{ij} h_k h_l + \delta_{kl} h_i h_j) + \gamma_1 h_i h_j h_k h_l \end{aligned} \tag{37}$$

则：

$$\begin{aligned} & M_{ijkk} = M_{kkij} = A_1 \delta_{ij} + B_1 h_i h_j, \\ & M_{iikk} = 3A_1 + B_1。 \end{aligned} \tag{38}$$

其中：$A_1 = 2\mu_1 + 3\lambda_1 + \beta_1$；$B_1 = 4\alpha_1 + 3\beta_1 + \gamma_1$。

与式(38)相类似，我们可以得到：

$$\begin{aligned} & M_{ijkk}^s = A_1^s \delta_{ij} + B_1^s h_i h_j;\quad M_{iikk}^s = 3A_1^s + B_1^s; \\ & M_{ijkk}^* = A_1^* \delta_{ij} + B_1^* h_i h_j;\quad M_{iikk}^* = 3A_1^* + B_1^* \end{aligned} \tag{39}$$

将式(38)和式(39)代入到式(35)中，得到：

$$\begin{aligned} b_{11} = {} & c_{\mathrm{o}}^1 \phi_1 + s_{\mathrm{o}}[\phi_1(3A_1^* + B_1^*) - (3A_1^* + B_1^* - 3A_1 - B_1)\cdot \\ & (AA_1^* + CB_1^*) + (A_1 + B_1 - A_1^* - B_1^*)(BA_1^* + DB_1^*)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} = {} & \phi_1(3A_1^* + B_1^*) + (3A_1 + B_1 - 3A_1^* - B_1^*)\cdot \\ & (AA_1^* + CB_1^*) + (A_1 + B_1 - A_1^* - B_1^*)(BA_1^* + DB_1^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13} = {} & \phi_1(3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*) + \\ & (3A_1^* + B_1^* - 3A_1 - B_1)(AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s) + \\ & (A_1^* + B_1^* - A_1 - B_1)(BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{14} = b_{23} = {} & \phi_1(3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*) + \\ & (3A_1^* + B_1^* - 3A_1 - B_1)(AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s) + \\ & (A_1^* + B_1^* - A_1 - B_1)(BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} = {} & c_{\mathrm{w}}^1 \phi_1 + s_{\mathrm{w}}[\phi_1(3A_1^* + B_1^*) + (3A_1 + B_1 - 3A_1^* - B_1^*)\cdot \\ & (AA_1^* + CB_1^*) + (A_1 + B_1 - A_1^* - B_1^*)(BA_1^* + DB_1^*)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{24} = {} & \phi_1(3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*) + \\ & (3A_1^* + B_1^* - 3A_1 - B_1)(AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s) + \\ & (A_1^* + B_1^* - A_1 - B_1)(BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{31} = {} & (3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*)(1 + \phi_1 - AA_1^* - CB_1^*) + \\ & (A_1^* + B_1^* - A_1^s - B_1^s)(BA_1^* + DB_1^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{32} = b_{41} = {} & (3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*)(1 + \phi_1 - AA_1^* - \\ & CB_1^*) + (A_1^* + B_1^* - A_1^s - B_1^s)(BA_1^* + DB_1^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{33} = {} & c_{\mathrm{o}}^2 \phi_2 + s_{\mathrm{o}}[\phi_2(3A_1^s + B_1^s) + (3A_1^s + B_1^s - \\ & 3A_1^* - B_1^*)(AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s - 1 - \phi_1) + \\ & (A_1^s + B_1^s - A_1^* - B_1^*)(BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{34} = b_{43} = {} & \phi_2(3A_1^s + B_1^s) + (3A_1^s + B_1^s - 3A_1^* - B_1^*)\cdot \\ & (AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s - 1 - \phi_1) + \\ & (A_1^s + B_1^s - A_1^* - B_1^*)(BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s), \end{aligned}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$b_{42}=(3A_1^s+B_1^s-3A_1^*-B_1^*)(1+\phi_1-AA_1^*-CB_1^*)+(A_1^*+B_1^*-A_1^s-B_1^s)(BA_1^*+DB_1^*),$$

$$b_{44}=c_{\mathrm{w}}^2\phi_2+s_{\mathrm{w}}[\phi_2(3A_1^s+B_1^s)+(3A_1^s+B_1^s-3A_1^*-B_1^*)(AA_1^*+CB_1^*-AA_1^s-CB_1^s-1-\phi_1)+(A_1^s+B_1^s-A_1^*-B_1^*)(BA_1^*+DB_1^*-BA_1^s-DB_1^s)]。\tag{40}$$

而式(34)中的$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^1$、$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^2$则简化为式(11)。

② 当各向异性仅仅是结构上的各向异性，而固体材料是各向同性时：

$$A_1^s=\frac{1}{A^s}=\frac{1}{2\mu+3\lambda}=\frac{c_s}{3};\quad B_1^s=B^s=0\tag{41}$$

故式(40)又可简化为：

$$b_{11}=c_{\mathrm{o}}^1\phi_1+s_{\mathrm{o}}[\phi_1(3A_1^*+B_1^*)-(3A_1^*+B_1^*-3A_1-B_1)\cdot(AA_1^*+CB_1^*)+(A_1+B_1-A_1^*-B_1^*)(BA_1^*+DB_1^*)],$$

$$b_{12}=b_{21}=\phi_1(3A_1^*+B_1^*)+(3A_1+B_1-3A_1^*-B_1^*)\cdot(AA_1^*+CB_1^*)+(A_1+B_1-A_1^*-B_1^*)(BA_1^*+DB_1^*),$$

$$b_{13}=\phi_1(c_s-3A_1^*-B_1^*)+(3A_1^*+B_1^*-3A_1-B_1)\cdot\left(AA_1^*+CB_1^*-\frac{Ac_s}{3}\right)+(A_1^*+B_1^*-A_1-B_1)\cdot\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right),$$

$$b_{14}=b_{23}=\phi_1(c_s-3A_1^*-B_1^*)+(3A_1^*+B_1^*-3A_1-B_1)\cdot\left(AA_1^*+CB_1^*-A\frac{c_s}{3}\right)+(A_1^*+B_1^*-A_1-B_1)\cdot\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right),$$

$$b_{22}=c_{\mathrm{w}}^1\phi_1+s_{\mathrm{w}}[\phi_1(3A_1^*+B_1^*)+(3A_1+B_1-3A_1^*-B_1^*)\cdot(AA_1^*+CB_1^*)+(A_1+B_1-A_1^*-B_1^*)(BA_1^*+DB_1^*)],$$

$$b_{24}=\phi_1(c_s-3A_1^*-B_1^*)+(3A_1^*+B_1^*-3A_1-B_1)\cdot\left(AA_1^*+CB_1^*-A\frac{c_s}{3}\right)+(A_1^*+B_1^*-A_1-B_1)\cdot\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right),$$

$$b_{31}=(c_s-3A_1^*-B_1^*)(1+\phi_1-AA_1^*-CB_1^*)+\left(A_1^*+B_1^*-\frac{c_s}{3}\right)(BA_1^*+DB_1^*),$$

$$b_{32}=b_{41}=(c_s-3A_1^*-B_1^*)(1+\phi_1-AA_1^*-CB_1^*)+\left(A_1^*+B_1^*-\frac{c_s}{3}\right)(BA_1^*+DB_1^*),$$

$$b_{33}=c_{\mathrm{o}}^2\phi_2+s_{\mathrm{o}}\left[3\phi_2A_1^s+(c_s-3A_1^*-B_1^*)\cdot(AA_1^*+CB_1^*-A\frac{c_s}{3}-1-\phi_1)+\left(\frac{c_s}{3}-A_1^*-B_1^*\right)\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right)\right],$$

$$b_{34}=b_{43}=\phi_2c_s+(c_s-3A_1^*-B_1^*)\cdot\left(AA_1^*+CB_1^*-A\frac{c_s}{3}-1-\phi_1\right)+\left(\frac{c_s}{3}-A_1^*-B_1^*\right)\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right),$$

$$b_{42}=(c_s-3A_1^*-B_1^*)(1+\phi_1-AA_1^*-CB_1^*)+\left(A_1^*+B_1^*-\frac{c_s}{3}\right)(BA_1^*+DB_1^*),$$

$$b_{44}=c_{\mathrm{w}}^2\phi_2+s_{\mathrm{w}}\left[\phi_2c_s+(c_s-3A_1^*-B_1^*)\cdot\left(AA_1^*+CB_1^*-A\frac{c_s}{3}-1-\phi_1\right)+\left(\frac{c_s}{3}-A_1^*-B_1^*\right)\left(BA_1^*+DB_1^*-B\frac{c_s}{3}\right)\right]\tag{42}$$

而式(34)中的$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^1$、$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^2$可简化为式(12)。

③ 如果孔隙体积的几何形状也是各向同性的，则对于孔隙材料也满足类似于式(41)的方程：

$$A_1^*=\frac{c^*}{3};\quad A_1=\frac{1}{A}=\frac{c_b}{3};\quad B_1^*=B=B_1=0\tag{43}$$

故式(42)又可简化为：

$$b_{11}=-s_{\mathrm{o}}\alpha_1\alpha_1c_b+s_{\mathrm{o}}\alpha_1c_b(1-\phi_1)+(c_{\mathrm{o}}^1+s_{\mathrm{o}}c_b)\phi_1,$$

$$b_{12}=b_{21}=-\alpha_1\alpha_1c_b+\alpha_1c_b(1-\phi_1)+c_b\phi_1,$$

$$b_{13}=b_{31}=-\alpha_1\alpha_2c_b-\alpha_2c_b\phi_1,$$

$$b_{14}=b_{23}=b_{32}=b_{41}=-\alpha_1\alpha_2c_b-\alpha_2c_b\phi_1,$$

$$b_{22}=-s_{\mathrm{w}}\alpha_1\alpha_1c_b+s_{\mathrm{w}}\alpha_1c_b(1-\phi_1)+(c_{\mathrm{w}}^1+s_{\mathrm{w}}c_b)\phi_1,$$

$$b_{24}=b_{42}=-\alpha_1\alpha_2c_b-\alpha_2c_b\phi_1,$$

$$b_{33}=-s_{\mathrm{o}}\alpha_2\alpha_2c_b+s_{\mathrm{o}}\alpha_2c_b(1+\phi_1)+(c_{\mathrm{o}}^2+s_{\mathrm{o}}c_s)\phi_2,$$

$$b_{34}=b_{43}=-\alpha_2\alpha_2c_b+\alpha_2c_b(1+\phi_1)+\phi_2c_s,$$

$$b_{44}=-s_{\mathrm{w}}\alpha_2\alpha_2c_b+s_{\mathrm{w}}\alpha_2c_b(1+\phi_1)+(c_{\mathrm{w}}^2+s_{\mathrm{w}}c_s)\phi_2\tag{44}$$

其中，$\alpha_1=1-(c^*/c_b)$，$\alpha_2=(c^*-c_s)/c_b$为各向同性双重孔隙介质有效应力系数。

对于单相流体，如单相油，利用式(16)、式(34)和式(44)分别简化为：

$$\left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^1}{\mu_{\mathrm{o}}}p_{\mathrm{o},j}^1\right)_{,i}=b_{11}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^1}{\partial t}+b_{13}\frac{\partial p_{\mathrm{o}}^2}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\Gamma,$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left(\frac{\boldsymbol{k}_{ij}^2}{\mu_o} p_{o,j}^2\right)_{,i} = b_{31}\frac{\partial p_o^1}{\partial t} + b_{33}\frac{\partial p_o^2}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \Gamma \quad (45)$$

$$b_{11} = -\alpha_1\alpha_1 c_b + \alpha_1 c_b(1-\phi_1) + (c_o^1 + c_b)\phi_1,$$
$$b_{13} = b_{31} = -\alpha_1\alpha_2 c_b - \alpha_2 c_b \phi_1,$$
$$b_{33} = -\alpha_2\alpha_2 c_b + \alpha_2 c_b(1+\phi_1) + \phi_2(c_o^2 + c_s) \quad (46)$$

式(45)和式(46)与黎水泉[14]和 Zhao[17]所给出的各向同性双重孔隙介质流固耦合渗流方程相同。

3　结论

本文经过数学推导，建立了考虑岩石骨架变形和渗透率双重各向异性的双重孔隙介质应力与油水两相流体流动耦合理论模型。并将该模型的简化模型与黎水泉[14]所建立的各向同性双重孔隙介质流固耦合理论模型和 Zhao[17]建立的描述单相流体流动特性的各向异性双重孔隙介质流固耦合理论模型进行了比较，两者形式相同，说明了本文所建立模型的合理性。

参考文献：

[1] Barrenblatt G I, Zehltov Iu P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [J]. Journal of Applied Mathematics Mechanics, 1960, 24: 1286－1303.

[2] Warren J E, Root P J. The behavior of naturally fractured reservoirs [J]. Society of Petroleum Engineers Journal, 1963, 3(3): 245－255.

[3] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics [M]. New York: Wiley, 1943.

[4] Biot M A. General theory of three-Dimensional consolidation [J]. Journal of Applied Physics, 1941, 12: 155－164.

[5] Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks [J]. Transactions of American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, 1957, 210(1): 331－340.

[6] Verruijt A. Elastic storage in aquifers. Flow through Porous Media [M]. New York: Academic Press, 1969.

[7] Chen H Y, Teufel L W, Lee R L. Coupled fluid flow and geomechanics in reservoir study -1. Theory and governing equations [R]. SPE 30752, 1995: 22－25.

[8] Wilson R K, Aifantis E C. On the theory of consolidation with double porosity [J]. International Journal of Engineering Science, 1982, 20(9): 1009－1035.

[9] Beskos D E, Aifantis E C. On the theory of consolidation with double porosity-II. [J] International Journal of Engineering Science, 1986, 24(11): 1697－1716.

[10] Bai M, Elsworth D, Roegiers J C. Multiporosity/multipermeability approach to the simulation of naturally-fractured reservoirs [J]. Water Resources Res., 1993, 29(6): 1621－1633.

[11] Duguid J O, Lee P C Y. Flow in fractured porous media [J]. Water Resources Res., 1977, 13(3): 558－566.

[12] Valliappan S, Khalili-Naghadeh N. Flow through fissured porous media with deformable matrix [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 29: 1079－1094.

[13] Chen H Y, Teufel L W. Coupling fluid-flow and geomechanics in dual-porosity modeling of naturally fractured reservoirs [R]. San Antonio: SPE 38884, 1997.

[14] 黎水泉, 徐秉业. 双重孔隙介质流固耦合理论模型[J]. 水动力学研究与进展, 2001, 16(4): 460－466.
Li Shuiquan, Xu Bingye. Theory model of fluid flow through deformable dual porosity media [J]. Journal of Hydrodynamics, 2001, 16(4): 460－466. (in Chinese)

[15] Zhao Y, Chen M, Zhang G Q. Effective stress law for anisotropic double porous media [J]. Chinese Sci Bull., 2004, 49(21): 2327－2331.

[16] Carroll M M. An effective stress law for anisotropic elastic deformation [J]. Journal of Geophysical Research, 1979, 84(B13): 7510－7512.

[17] Zhao Y, Chen M. Fully coupled dual-porosity model for anisotropic formations [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 2006, 43(7): 1128－1133.

[18] 孔祥言. 高等渗流力学[M]. 合肥: 中国科技技术大学出版社, 1999.
Kong Xiangyan. Advanced mechanics of fluids in porous media [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 1999. (in Chinese)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net