

# 一种求解 Euler 方程的间断 Galerkin 方法的改进研究

刘洪伟<sup>1</sup>, 樊菁<sup>1</sup>, 徐昆<sup>2</sup>

(1 中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190)

(2 香港科技大学数学系, 香港九龙清水湾)

**摘要** 本文将对一种数值求解 Euler 方程的间断 Galerkin 方法提出改进的策略。该间断 Galerkin 方法由 Tang 和 Warnecke 提出 (*Computers & Fluids* 34(2005), 375-398), 数值试验已表明, 此方法的 3 阶及以上格式会有相当程度的精度损失。针对此问题, 本文提出了一种改进的办法, 可以使原方法的精度不会随着格式阶数的增加而有所损失, 从而确保了该间断 Galerkin 方法的高精度特性。对于一维的情况, 本文也研究了不同限制器对于此方法求解含间断问题的影响, 给出了相关的建议。

**关键词** RKDG 方法, 气体动力学格式, 数值通量, 收敛精度

## 引言

间断 Galerkin 方法是近年来发展比较迅速的一种数值计算方法。这种方法有一些比较明显的特点, 例如, 单元的计算模板只包括与其相邻的计算单元, 这将有利于边界的处理、非结构网格的应用和程序的并行等; 可以达到高精度; 具有比较好的激波捕捉的特性等。间断 Galerkin 方法的这些特点使其越来越受到相关学者的关注和认可, 目前它不仅被应用于计算流体力学领域, 而且已被拓展到了很多其他领域的数值计算和模拟<sup>[2]</sup>。

气体动力学方法<sup>[3]</sup>是基于气体动力学理论来构造求解气体运动方程数值格式的方法, 目前已被应用于求解 Euler 方程、Navier-Stokes 方程、稀薄气体流动控制方程和磁流体动力学方程等。该方法的物理意义比较清晰和易于理解, 其思想比较容易被拓展到不同尺度和类型气体流动问题的数值模拟当中。

本文将对一种基于气体动力学的求解 Euler 方程的间断 Galerkin 方法提出改进的策略。该方法由 Tang 和 Warnecke 提出<sup>[1]</sup>, 文献[1]中的数值试验表明, 此方法的 3 阶及以上格式会出现明显的精度损失, 我们的研究发现, 出现这种情况的原因是由于在文献[1]中所使用的数值

通量耗散性太大所导致, 据此我们构造了一种新的耗散性比较小的通量用于此方法, 数值结果表明, 格式的精度不会再随着阶数的增加而下降。

## 1 基于气体动力学的间断 Galerkin 方法

这里我们首先来简要回顾一下由 Tang 和 Warnecke 提出的基于气体动力学的求解 Euler 方程的间断 Galerkin 方法。简单起见, 我们以一维的 Euler 方程为例, 它可写成如下形式

$$\mathbf{U}_t + (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_x = 0. \quad (1)$$

对于给定的网格  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , 我们可将数值解近似为

$$\mathbf{U}_h(x, t) = \sum_{l=0}^k \mathbf{U}_i^{(l)}(t) \phi_i^{(l)}(x), \quad x \in I_i. \quad (2)$$

这里的  $\phi_i^{(l)}(x)$  是定义在  $I_i$  上的局部 Legendre 多项式。经过推导<sup>[1]</sup>, 可以得到自由度  $\mathbf{U}_i^{(l)}(t)$  满足的方程, 例如对于  $k = 4$  的情况, 我们有

$$\begin{cases} \Delta x_i (\mathbf{U}_i^{(0)})_t + \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = 0 \\ \frac{1}{3} \Delta x_i (\mathbf{U}_i^{(1)})_t + \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} + \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = 2\mathbf{Q}_i^{(0)} \\ \frac{1}{5} \Delta x_i (\mathbf{U}_i^{(2)})_t + \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = 2\mathbf{Q}_i^{(1)} \\ \frac{1}{7} \Delta x_i (\mathbf{U}_i^{(3)})_t + \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} + \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = 2(\mathbf{Q}_i^{(0)} + \mathbf{Q}_i^{(2)}) \\ \frac{1}{9} \Delta x_i (\mathbf{U}_i^{(4)})_t + \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = 2(\mathbf{Q}_i^{(1)} + \mathbf{Q}_i^{(3)}) \end{cases} \quad (3)$$

其中的  $\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}$  是网格边界处的数值通量， $\mathbf{Q}_i^{(l)}, l=0, \dots, 3$  是可以基于气体动力学理论显式求出的源项<sup>[1]</sup>。该方法区别于其他间断 Galerkin 方法的突出特点正是右端的源项可以显式求出来，而不需用数值积分近似。

## 2 新的数值通量

我们的研究显示，不同的数值通量对于系统 (3) 所确立的间断 Galerkin 方法的影响是很大的。文献[1]中使用了一种耗散性比较大的数值通量

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \sum_{l=0}^k \left[ \iint_{u>0} \psi u g_i^{(l)} dud\xi + (-1)^l \iint_{u<0} \psi u g_{i+1}^{(l)} dud\xi \right], \quad (4)$$

这里的  $\psi = (1, u, (u^2 + \xi^2)/2)^T$ ，微观（分布函数）自由度  $g_i^{(l)}$  和宏观（守恒量）自由度  $\mathbf{U}_i^{(l)}(t)$  有如下的关系

$$\mathbf{U}_i^{(l)} = \iint \psi g_i^{(l)} dud\xi. \quad (5)$$

由于该数值通量的耗散性很大，导致了此方法的精度在 3 阶及以上格式中有明显的下降<sup>[1]</sup>。

针对此问题，这里我们建议在此间断 Galerkin 方法中使用一种新构造的数值通量，下面将加以介绍。首先，我们求出网格边界  $x_{i+1/2}$  两端的宏观守恒量  $\mathbf{U}_{i+1/2}^-$  和  $\mathbf{U}_{i+1/2}^+$ ，

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^- = \sum_{l=0}^k \mathbf{U}_i^{(l)}, \quad \mathbf{U}_{i+1/2}^+ = \sum_{l=0}^k (-1)^l \mathbf{U}_{i+1}^{(l)}, \quad (6)$$

求得基于这两组守恒量的 Maxwell 分布函数  $g_{i+1/2}^-$  和  $g_{i+1/2}^+$ ，并且构造网格边界处的初始分布函数  $f_0$  为

$$f_0 = \begin{cases} g_{i+1/2}^-, & x < x_{i+1/2} \\ g_{i+1/2}^+, & x > x_{i+1/2} \end{cases}. \quad (7)$$

通过守恒性条件构造网格边界处粒子达到的平衡态分布函数  $g_0$ ，

$$\iint \psi g_0 dud\xi = \iint_{u>0} \psi g_{i+1/2}^- dud\xi + \iint_{u<0} \psi g_{i+1/2}^+ dud\xi. \quad (8)$$

其次，基于初始分布  $f_0$  和平衡态分布  $g_0$  来构造网格边界处的总分布函数  $f_{i+1/2}$  为

$$f_{i+1/2} = \alpha f_0 + (1 - \alpha) g_0. \quad (9)$$

这里的松弛系数  $\alpha$  可以根据下式来确定，

$$\alpha = 1 - \exp\left(-C \frac{|p_{i+1/2}^- - p_{i+1/2}^+|}{p_{i+1/2}^- + p_{i+1/2}^+}\right). \quad (10)$$

在(10)式中， $p_{i+1/2}^-$  和  $p_{i+1/2}^+$  是网格边界两端的压力值，常数  $C$  为给定的正值。数值试验显示，计算结果对于常数  $C$  的取值并不敏感。在本文的所有算例中，我们取  $C = 10^4$ 。最后，对 (9) 式给出的网格边界处的总分布函数  $f_{i+1/2}$  取距，得到通过该边界的数值通量，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} &= \iint \psi u f_{i+1/2} dud\xi \\ &= \alpha \left( \iint_{u>0} \psi u g_{i+1/2}^- dud\xi + \iint_{u<0} \psi u g_{i+1/2}^+ dud\xi \right) \\ &\quad + (1 - \alpha) \iint \psi u g_0 dud\xi \end{aligned} \quad (11)$$

这里我们构造新数值通量所用的策略借鉴了文献[9]中的基本思想。对于多维问题，构造新数值通量的过程和一维的情况非常类似，在此不再详述。

## 3 计算结果

下面我们将通过一系列数值算例来检验使用了新数值通量的间断 Galerkin 方法的精度和激波捕捉能力。在计算中我们使用了 minmod 类型的 TVB 限制器<sup>[4]</sup>、WENO/HWENO 限制器<sup>[5,6]</sup>、距类型限制器<sup>[7]</sup>，并对所得到的数值结果进行了比较。

### 3.1 一维问题的精度验证

在此我们数值求解如下初值的一维 Euler 方程，

$$\rho(x,0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), U(x,0) = 0.7, p(x,0) = 1.$$

计算域取为  $[0, 2]$ ，边界设为周期性边界条件。该问题的精确解是

$$\rho(x,t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x - Ut)), U = 0.7, p = 1.$$

我们检验了在  $t = 2$  时的数值结果的收敛精度，见表 1-5。由表 1-4 可以看到，在没有限制器时， $k$  阶的  $P^k$  格式可以达到  $k + 1$  阶的收敛精度，其中表 3-4 中得到的收敛精度比文献[1]中对应的结果要高，说明本文中构造的新数值通

量的确提高了方法的精度。表 5 显示, 使用了 HWENO 限制器的  $P^2$  格式仍然可以达到 3 阶精度。

### 3.2 二维问题的精度验证

我们数值求解了如下初值的二维 Euler 方程,

$$\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)), U(x, y, 0) = 0.7, \\ V(x, y, 0) = 0.3, p(x, y, 0) = 1.$$

计算域取为  $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$ , 边界为周期性边条件。该问题的精确解为

$$\rho(x, y, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y - (U + V)t)), \\ U = 0.7, V = 0.3, p = 1.$$

表 6-7 显示了  $t = 2$  时数值结果的收敛精度, 从两表中可以看出,  $P^1$  格式为 2 阶精度,  $P^2$  格式为 3 阶精度。

### 3.3 一维 Sod 激波管问题

为了检验方法的激波捕捉特性, 我们考虑了一维 Sod 激波管问题, 所用的初始条件为

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & x \leq 0 \\ (0.125, 0, 0.1), & x > 0 \end{cases},$$

计算域为  $[-5, 5]$ , 取 100 个网格。由于此问题相对简单, 使用不同阶数格式及前述的不同限制

表 1 一维  $P^1$  格式的收敛精度 (无限制器)

N	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
10	6.84E-3	-	2.97E-3	-	3.59E-3	-
20	1.57E-3	2.12	6.71E-4	2.15	7.94E-4	2.18
40	5.03E-4	1.64	1.91E-4	1.81	2.29E-4	1.80
80	1.35E-4	1.90	4.66E-5	2.04	5.69E-5	2.01
160	3.48E-5	1.96	1.15E-5	2.02	1.43E-5	1.99
320	8.92E-6	1.96	2.87E-6	2.00	3.59E-6	1.99

表 2 一维  $P^2$  格式的收敛精度 (无限制器)

N	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
10	2.99E-4	-	1.05E-4	-	1.29E-4	-
20	3.31E-5	3.18	1.14E-5	3.20	1.44E-5	3.16
40	4.11E-6	3.01	1.42E-6	3.01	1.79E-6	3.01
80	5.13E-7	3.00	1.77E-7	3.00	2.24E-7	3.00
160	6.41E-8	3.00	2.22E-8	3.00	2.80E-8	3.00
320	8.01E-9	3.00	2.77E-9	3.00	3.50E-9	3.00

表 3 一维  $P^3$  格式的收敛精度 (无限制器)

N	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
5	2.42E-4	-	8.26E-5	-	9.85E-5	-
10	1.54E-5	3.97	5.19E-6	3.99	6.31E-6	3.96
20	1.03E-6	3.90	3.40E-7	3.93	4.14E-7	3.93
40	6.63E-8	3.96	2.15E-8	3.98	2.62E-8	3.98
80	4.18E-9	3.99	1.35E-9	3.99	1.64E-9	4.00
160	2.62E-10	4.00	8.42E-11	4.00	1.03E-10	3.99

表 4 一维  $P^4$  格式的收敛精度 (无限制器)

N	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
4	4.95E-5	-	1.32E-5	-	1.82E-5	-
8	1.44E-6	5.10	4.18E-7	4.98	5.37E-7	5.08
16	3.94E-8	5.19	1.24E-8	5.08	1.58E-8	5.09
32	1.35E-9	4.87	3.93E-10	4.98	5.06E-10	4.96
64	5.07E-11	4.73	1.30E-11	4.92	1.70E-11	4.90

表 5 一维  $P^2$  格式的收敛精度 (HWENO 限制器)

N	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
10	4.92E-4	-	1.88E-4	-	2.22E-4	-
20	5.27E-5	3.22	1.99E-5	3.24	2.41E-5	3.20
40	5.59E-6	3.24	1.94E-6	3.36	2.35E-6	3.36
80	5.90E-7	3.24	2.11E-7	3.20	2.53E-7	3.22
160	6.41E-8	3.20	2.42E-8	3.12	2.94E-8	3.11
320	8.01E-9	3.00	2.89E-9	3.07	3.56E-9	3.05

表 6 二维  $P^1$  格式的收敛精度 (无限制器)

$N \times N$	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
$8 \times 8$	4.95E-2	-	2.90E-2	-	3.36E-2	-
$16 \times 16$	9.03E-3	2.5	4.61E-3	2.7	5.31E-3	2.7
$32 \times 32$	1.39E-3	2.7	6.84E-4	2.8	7.97E-4	2.7
$64 \times 64$	2.22E-4	2.6	1.37E-4	2.3	1.55E-4	2.4
$128 \times 128$	4.70E-5	2.2	2.99E-5	2.2	3.34E-5	2.2

表 7 二维  $P^2$  格式的收敛精度 (无限制器)

$N \times N$	$L^\infty$ -error	Order	$L^1$ -error	Order	$L^2$ -error	Order
$8 \times 8$	2.55E-3	-	1.57E-3	-	1.67E-3	-
$16 \times 16$	1.51E-4	4.1	9.32E-5	4.1	1.07E-4	4.0
$32 \times 32$	1.31E-5	3.5	7.62E-6	3.6	8.86E-6	3.6
$64 \times 64$	1.04E-6	3.7	6.45E-7	3.6	7.29E-7	3.6
$128 \times 128$	1.10E-7	3.2	7.00E-8	3.2	7.80E-8	3.2

器给出的结果差别很微小, 图 1 为  $P^4$  格式 (距限制器,  $M=1$ ) 的计算结果, 从图中可以看到数值解和精确解符合得很好。

### 3.4 一维 Lax 激波管问题

该问题的初始条件为

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & x \leq 0 \\ (0.5, 0, 0.571), & x > 0 \end{cases},$$

计算域为 $[-5, 5]$ ，取 100 个网格。这里使用不同格式和限制器得到的结果也差别很小，图 2 为  $P^4$  格式（距限制器， $M=1$ ）的计算结果。

### 3.5 一维 Shu-Osher 问题

该问题的初始条件为

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333), & x \leq -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x > -4 \end{cases}$$

计算域为 $[-5, 5]$ ，取 300 个网格。对于该问题，数值试验显示， $P^1$  格式使用 WENO 限制器以及  $P^2$  格式使用 HWENO 限制器得到的结果和参考解符合得更好，而  $P^3$  和  $P^4$  格式使用距限制器相对更为合适。图 3 和 4 分别是  $P^1$  格式（WENO 限制器， $M=100$ ）和  $P^4$  格式（距限制器， $M=100$ ）的计算结果，比较两图可以看出， $P^4$  格式的结果和参考解符合得更好。

### 3.6 二维前台阶流动问题

该问题的描述为：马赫数为 3 的均匀流进入风洞（无量纲长度为 3，高度为 1）中，与其中的前置台阶（起点为 0.6，高度为 0.2）及风洞壁面相互作用的过程。计算的来流条件为  $(\rho, U, V, p)_\infty = (1.4, 3, 0, 1)$ ，所用的限制器为 minmod 类型的 TVB 限制器，其中参数  $M$  取为  $M=50$ ，在计算中对台阶的角点没有进行特殊的奇异性处理。图 5 为  $t=4$  时刻由  $P^2$  格式计算的密度等值线。从图中可以看出，随着网格的加密，激波和接触间断都变得更加清晰和尖锐，台阶上壁处的数值（非物理）马赫杆也逐渐减小。此结果和其他文献中用高精度方法计算的结果比较接近<sup>[8]</sup>。

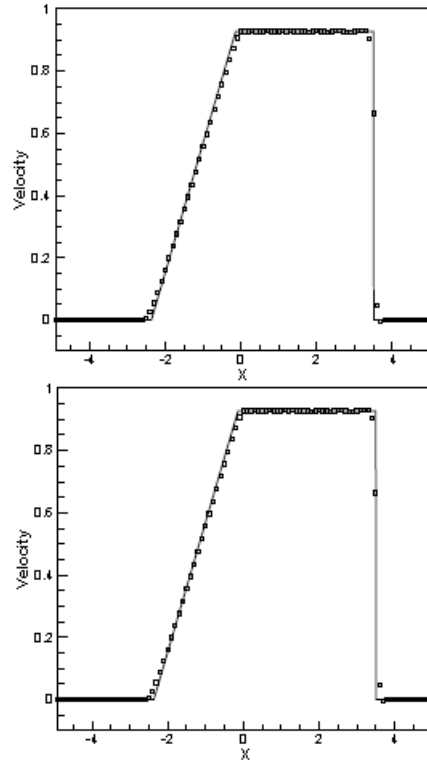
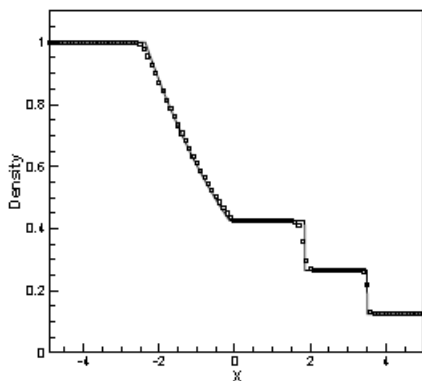
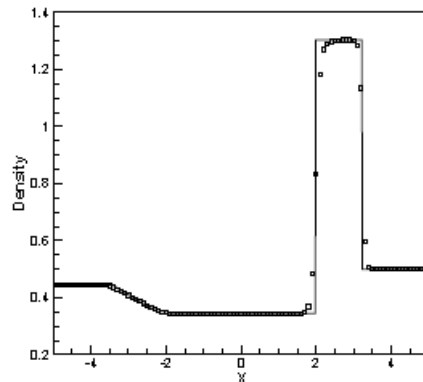


图 1 一维 Sod 激波管问题， $P^4$  格式 ( $N=100$ )。

## 4 结 论

本文对一种数值求解 Euler 方程的间断 Galerkin 方法提出了改进的策略。数值试验已表明，由 Tang 和 Warnecke 提出的间断 Galerkin 方法在使用 3 阶及以上格式时会有相当程度的精度损失。我们的研究发现，出现这种现象的原因是由于在原文献中所使用的数值通量耗散性太大所导致。本文建议了一种新的耗散性比较小的数值通量，数值结果表明，使用了新数值通量后，该方法的精度不会再有损失。此外，对于一维问题，通过数值试验，我们建议对  $P^1$  格式使用 WENO 限制器，对  $P^2$  格式使用 HWENO 限制器，而对  $P^k (k > 2)$  格式使用距限制器。



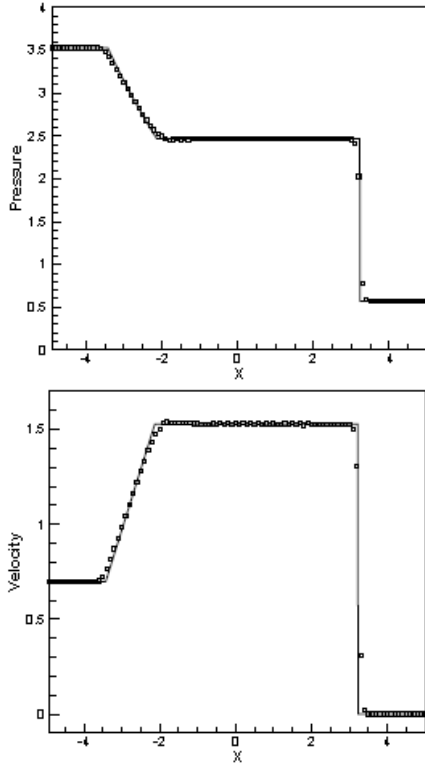


图2 一维 Lax 激波管问题,  $P^4$  格式 ( $N=100$ )。

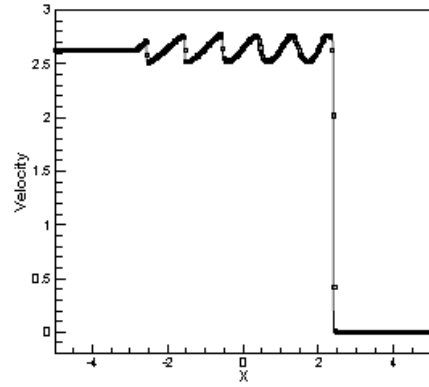
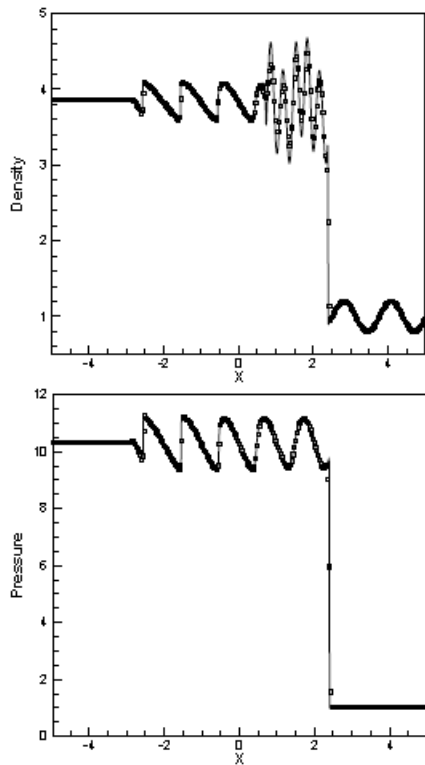
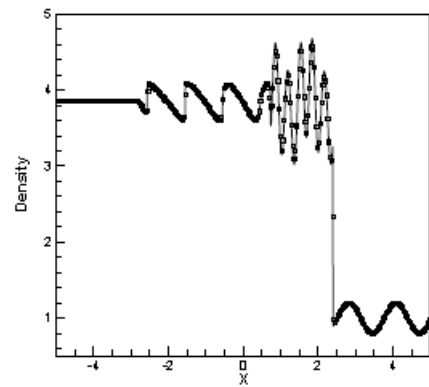


图3 一维 Shu-Osher 问题,  $P^2$  格式 ( $N=300$ )。

### 参考文献

- 1 Tang HZ, Warnecke G. A Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the Euler equations. *Comput. Fluids*, 2005, 34, 375~398.
- 2 Cockburn B, Shu CW. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems. *J. Sci. Comput.*, 2001, 16, 173~261.
- 3 Xu K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method. *J. Comput. Phys.*, 2001, 171, 289~335.
- 4 Cockburn B, Shu CW. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 1998, 141, 199~224.
- 5 Qiu J, Shu CW. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, 26, 907~929.



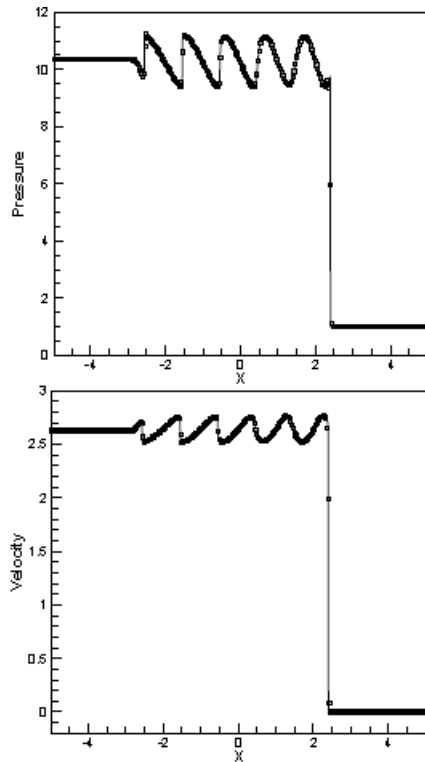


图 4 一维 Shu-Osher 问题,  $P^4$  格式 ( $N=300$ )。

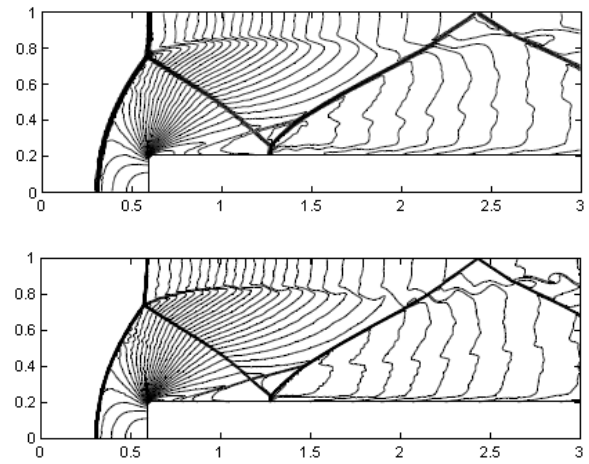
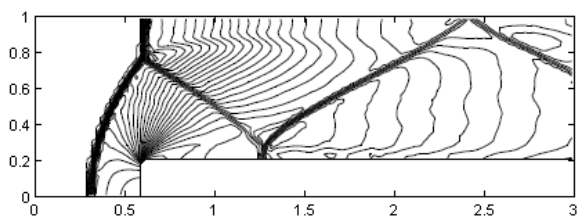


图 5 二维前台阶流动问题的密度等值线, 从  $\rho = 0.1$  到  $\rho = 6.45$  等分成 30 条等值线,  $P^2$  格式。(上:  $\Delta x = \Delta y = 1/40$ ; 中:  $\Delta x = \Delta y = 1/80$ ; 下:  $\Delta x = \Delta y = 1/160$ )

- 6 Qiu J, Shu CW. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: One dimensional case. J. Comput. Phys., 2004, 193, 115~135.
- 7 Burbeau A, Sagaut P, Bruneau CH. A problem-independent limiter for high-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods. J. Comput. Phys., 2003, 169, 111~150.
- 8 Zhou T, Li YF, Shu CW. Numerical comparison of WENO finite volume and Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods. J. Sci. Comput., 2001, 16, 145~171.
- 9 Liu H, Xu K. A Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for viscous flow equations. J. Comput. Phys., 2007, 224, 1223~1242.



## IMPROVED STUDY OF A RUNGE-KUTTA DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE EULER EQUATIONS

LIU Hongwei<sup>1</sup> FAN Jing<sup>1</sup> XU Kun<sup>2</sup>

(1 State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Rd, Beijing 100190, China)

(2 Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology, Kowloon, Hong Kong, China)

**Abstract** The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method proposed by Tang and Warnecke [*Computers & Fluids* 34(2005), 375-398] for the Euler equations is improved by changing the strategy of the flux evaluation at the cell interface. The accuracy of the revised method is higher than that of the original scheme for  $P^k$  ( $k > 2$ ) cases. Various limiting techniques are tested for the revised method in capturing the discontinuous solutions. Many numerical examples are shown to verify the high-order accuracy and demonstrate the good shock-capturing capability of the method.

**Key words** RKDG method, gas-kinetic scheme, numerical flux, convergence order