

解双曲型守恒律的修正加权群速度控制格式

何志伟¹, 李新亮¹, 傅德薰², 马延文²

(1 中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190)

(2 中国科学院力学研究所非线性力学重点实验室, 北京海淀区 100190)

摘要 基于群速度控制理论, 本文提出了一类新的格式——修正加权群速度控制格式。通过常见的测试案例——包括: 激波/密度波干扰问题, 双马赫反射问题, 瑞利-泰勒不稳定问题, 并和经典的 WENO 格式的数值结果相比, 新格式的数值结果显示了对于小尺度结构很好的分辨率和良好的激波捕捉能力。因此, 新格式适用于复杂流动的数值模拟。

关键词 高精度; 双曲型守恒律; 群速度控制; WENO

1. 引言

高精度有限差分格式在复杂流动的数值模拟方面, 如湍流的 DNS 和 LES, 起着很重要的角色。对于可压缩湍流, 当马赫数足够大时, 流场中就会出现激波(激波簇), 这些激波(激波簇)给湍流的 DNS 和 LES 带来了很大的挑战。为了克服激波附近的数值震荡, 数值格式要提供足够的数值粘性, 但是过大的数值粘性则会耗散掉小尺度结构, 从而破坏数值模拟的结果。所以, 设计具有高分辨率和低耗散的高精度激波捕捉格式对于湍流 DNS 和 LES 是非常重要的。

WENO 格式[1, 2]是目前最为成功的数值格式。在复杂流动的数值模拟中有着广泛的运用。WENO 格式已被相当多的数值结果证明具有非常好的激波捕捉能力。但是大量的数值结果也表明经典的 WENO 格式除了计算量很大的缺点外, 对于小尺度结构的耗散也过大, 因而不是可压缩湍流数值模拟最为理想的数值格式。最近, 为了克服 WENO 格式耗散过大的缺点, 很多研究者做了各种改进。一类方法是混合格式。即间断处使用 WENO 格式, 而流场光滑处使用一类低耗散格式[3, 4]或者是精度最优的格式[5]。而间断处和光滑处则是通过设计开

2. 群速度控制(GVC)理论

关函数来实现判定。另一类方法是修改 WENO 格式的加权方式从而实现在光滑处具有较小的数值粘性[6-8, 10, 11]。

为了解释和克服在数值结果中间断处产生数值震荡的现象, 文献[9]提出了群速度控制(GVC)理论。该理论认为间断处产生数值震荡的原因是由于波包的群速度不一致造成的。本文根据群速度控制理论, 系统的提出了如何定量地实现慢格式和混合格式, 如何通过加权实现群速度控制(GVC)。为了克服 GVC 理论的缺点, 借助于 WENO 加权理论, 本文提出了一类名为修正加权群速度控制格式(WGVC-M)。大量的数值案例的测试表明, 和同阶的经典的 WENO 格式[1, 2]相比, WGVC-M 显示了非常好的对于小尺度结果的分辨率和良好的激波捕捉能力。

本文结构如下: 第 2 部分将系统的解释群速度控制理论。第 3 部分将系统的解释如何构造修正加权群速度控制格式, 包括: 如何定量地实现慢格式和混合格式; 如何通过加权实现群速度控制, 如何构造修正加权群速度控制格式(WGVC-M)。第 4 部分将给出新的格式对于一些经典的数值格式测试案例的数值结果。结论放在第 5 部分。

文献[9]提出了一种群速度控制(GVC)理论。其主要思想是,波包的群速度不一致造成了间断处的数值震荡,为了克服间断处的数值震荡,波包的群速度应该被合理的控制。根据GVC理论,一些GVC格式[12-14]已经被构造出来。

为了文章的完整性,本文先给出群速度控制理论的完整的数学描述[9, 12-14]。

考虑如下的模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = a = \text{const} > 0 \quad (2.1)$$

其结果 $u(x, t)$ 可以通过一个典型的 Fourier 模态来表示, 即

$$u = \hat{u}_k(t) e^{i\kappa x} \quad (2.2)$$

其中 \hat{u}_k 是波数 κ 的 Fourier 模态。 $i \equiv \sqrt{-1}$ 。

将(2.2)带入模型方程(2.1), 对对流项进行空间微分, 有

$$\frac{du_j(t)}{dt} = a \left(i(\kappa h) \frac{\hat{u}_k}{h} e^{i\kappa x} \right). \quad (2.3)$$

在实际的数值模拟中, 模型方程(2.1)是离散在空间 $x_j = j\Delta x$, $j = 0, \dots, N$, 其中 Δx 是网格宽度; $u_j = u(x_j)$ 。这样就得到一系列常微分方程, 即

$$\frac{du_j}{dt} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.4)$$

为了方便讨论, 定义 L 为空间微分算子 $\Delta x \frac{\partial}{\partial x}$ 的差分算子, 即 $L \approx \Delta x \frac{d}{dx}$ 。这样, 则有

$$\begin{aligned} \frac{du_j(t)}{dt} &= \frac{L(f_j)}{\Delta x} = a \left(K_e(\kappa \Delta x) \cdot \frac{\hat{u}_k}{\Delta x} e^{i\kappa x} \right) \\ &= a \left((K_r(\kappa \Delta x) + iK_i(\kappa \Delta x)) \cdot \frac{\hat{u}_k}{\Delta x} e^{i\kappa x} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

定义 $\xi = \kappa \Delta x$, 并且比较(2.3)和(2.5), 可以看出 $K_e(\xi)$ 的实部有放大或者缩小相应的 Fourier 模态的振幅的功能, 而虚部则是引入了相误差。

定义 1

差分算子 L , 如果有 $K_r(\xi) \geq 0$, $0 \leq \forall \xi \leq \pi$, 则是耗散的, 用 L_d 表示; 如果有 $K_r(\xi) \equiv 0$, $0 \leq \forall \xi \leq \pi$ 则是无耗散的, 用 L_n 表示; 如果有 $K_r(\xi) \leq 0$, $0 \leq \forall \xi \leq \pi$, 则是反耗散的, 用 L_a 表示。

定义 2

差分算子 L , 如果有 $\frac{d}{d\xi}(K_i(\xi)) \leq 1$,

$0 \leq \forall \xi \leq \pi$, 则是慢格式, 用 L_s 表示; 如果

有 $\frac{d}{d\xi}(K_i(\xi)) \geq 1$, $0 \leq \forall \xi \leq \pi$ 则是快格式,

用 L_f 表示; 如果有 $\exists \pi > \xi_0 > 0$, $0 \leq \forall \xi \leq \xi_0$,

$\frac{d}{d\xi}(K_i(\xi)) \geq 1$ 和 $\xi_0 \leq \forall \xi \leq \pi$,

$\frac{d}{d\xi}(K_i(\xi)) \leq 1$, 则混合格式, 用 L_m 表示。

所以, 一个群速度控制格式必须满足如下条件:

① 在激波后: $L \in (L_f \cup L_m) \cap (L_d \cup L_n)$,

② 在激波前: $L \in L_s \cap (L_d \cup L_n)$ 。

3. 修正加权群速度控制格式(WGVC-M)

3.1 混合格式和慢格式的实现

在本文中, 我们用如下带一个自由参数的 2N 阶差分算子

$$L(f_j; \sigma) = \sigma \cdot f_{j-(N+1)} + \sum_{l=-N}^N a_l(\sigma) \cdot f_{j+l} \quad (3.1)$$

来获得混合格式和慢格式。相应的数值通量

$h_{j+1/2} = h(x_{j+1/2})$ 则为

$$\hat{f}_{j+1/2}(\sigma) = \sum_{l=-N}^N b_l(\sigma) \cdot f_{j+l} \quad (3.2)$$

其中 $h(x)$ 隐含地定义为 [16]

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\eta) d\eta \quad (3.3)$$

附录中表 3-4 给出了当 N 等于 2 和 3 时,

$a_l(\sigma)$ 和 $b_l(\sigma)$ 表达式。

为了系统地分析格式 (3.1) 的色散和耗散特性, 本文定义如下两个函数:

$$\Phi(\sigma) = \min \left\{ \left\{ \xi \left| 1 - \frac{K_i(\xi)}{\xi} \right| \geq TOL \right\} \right\} \quad (3.4)$$

$$\Psi(\sigma) = \min \left\{ \left\{ \xi \left| K_r(\xi) \right| \geq TOL \right\} \right\} \quad (3.5)$$

上述两个函数给出当 K_i 和 K_r 和他们的精确解之间的误差不超过给定限制 TOL 时对应的 ξ 的最大值。在本文中, 我们取 $TOL = 5\%$ 。

图 1(a) 和 (b) 给出了当 N 分别等于 2 和 3 时, $\Phi(\sigma)$ 和 $\Psi(\sigma)$ 的分布情况。

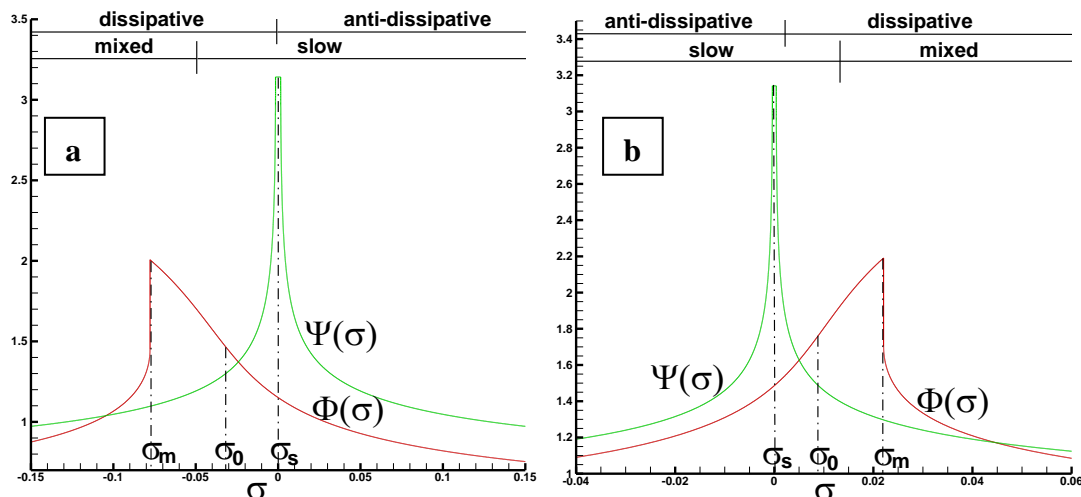


图 1 $\Phi(\sigma)$ 和 $\Psi(\sigma)$ 的分布

从图 1 可以很明显看出, σ 取不同的值时, 差分算子显示出不同的耗散和色散特性。在本文中, 我们取混合格式 (即 $\sigma = \sigma_m$) 和慢格式 (即 $\sigma = \sigma_s$)。在图 1 中, 当 σ 等于 σ_0 时,

3.2 混合格式和慢格式的加权选择方法

在本文中, 在计算数值通量 $\hat{f}_{j+1/2}(\sigma)$ 时, 我们希望:

a. 在间断处实现 GVC 的要求。

分别为 5 阶迎风格式和 7 阶迎风格式。其中 $\sigma_m, \sigma_s, \sigma_0$ 的值见附录中表 5。

b. 在光滑区实现精度最高, 即 $2N+1$ 阶。

基于上述要求, 本文提出了一种加权方法来实现上述要求, 具体如下:

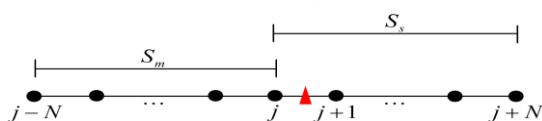


图 2 GVC 的加权方法

如图 2 所示, 我们将整个模板分成两个不相交的子模板, 分别定义为 S_m 和 S_s 。受 WENO-Z 的权重的启发[10, 11], 在这两个子模板上分别计算如下的权重:

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{N+1} \Delta x^{2N+1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{d^l f}{dx^l} \right)^2 dx \quad (3.6)$$

$$\alpha_k = C_k \left(1 + \left(\frac{\tau_{2N+1}}{\beta_k + \varepsilon} \right)^N \right) \quad (3.7)$$

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_m + \alpha_s} \quad (3.8)$$

3.3 修正加权群速度控制格式 (WGVC-M)

本文认为: 在实际的应用中, GVC 理论确实可以减少间断处的数值震荡[12, 13]。但是, 迄今为止, 没有能达到基本无振动的层次。这是由于 GVC 理论的缺陷造成的。GVC 理论是基于线性的, 而且大部分普通格式在高波数时均变成慢格式, 造成了 GVC 格式难以全面克服非线性问题中间断处的数值震荡。所以 GVC 理论必须要借助于格式本身的耗散性或者其他成功的理论。

本文借助于 WENO 格式的理论, 提出了一类名为修正加权群速度控制格式 (WGVC-M)。具体推导如下:

首先, 我们将证明如下结论: WENO 格式可以写成一个 GVC 格式加修正项的形式。证明如下:

在整个模板上, 可以得到一个 $2N+1$ 阶 WENO 格式[1, 2], 即

$$\hat{f}_{j+1/2}^{WENO} = \sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \quad (3.9)$$

$$\text{其中 } \alpha_k = \frac{C_k}{(\beta_k + \varepsilon)^p}, \quad \omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^N \alpha_l},$$

($k=0, \dots, N$), 光滑度量因子的计算方法同

(3.6). 参数 ε 取文献[6]中推荐的标准值 10^{-40} .

详细的 WENO 格式的具体构造方法可以参见[1, 2, 6]。

其中 $k=m$ 或者 $k=s$; $\tau_{2N+1} = |\beta_m - \beta_s|$ 。

参数 ε 是一个正的小量, 引入的目的是为了防止分母为 0。参数 ε 对加权算法的影响在文献[6]中有详细的讨论, 本文中我们使用文献[6]中使用的标准值 $\varepsilon = 10^{-40}$ 。指数 N 是用来增强光滑度量因子之间的比例, 从而保证收敛在一定的精度[10, 11]。文献[10]还表明增大指数 N 还有在极值点加速收敛的功能。最优权重系数 C_k 用来实现光滑区达到 $2N+1$ 阶精度。 C_k 的值见附录中表 5。

构造完 WENO 格式后, 我们使用本文第 3.2 部分提出的 GVC 权重对 WENO 格式进行二次加权, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} &= \omega_m \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \right) + \omega_s \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \right) \\ &= \omega_m \left(\hat{f}_{j+1/2}^m(\sigma_m) + \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} - \hat{f}_{j+1/2}^m(\sigma_m) \right) \right) \\ &\quad + \omega_s \left(\hat{f}_{j+1/2}^s(\sigma_s) + \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} - \hat{f}_{j+1/2}^s(\sigma_s) \right) \right) \\ &= \omega_m \hat{f}_{j+1/2}^m(\sigma_m) + \omega_s \hat{f}_{j+1/2}^s(\sigma_s) \\ &\quad + \left[\omega_m \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} - \hat{f}_{j+1/2}^m(\sigma_m) \right) + \omega_s \left(\sum_{l=0}^N \omega_l \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} - \hat{f}_{j+1/2}^s(\sigma_s) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

从 (3.10) 可以看出, 右边第一项和第二项构成了本文提出的加权群速度控制格式。右边大括号构成了对加权群速度控制格式的修正, 可以证明这个修正项是耗散和色散的混合, 具体证明从略。

接下来我们提出本文的修正加权群速度控制格式 (WGVC-M)。从上面的证明可以看出 WENO 格式可以写成一个 “GVC 格式+修正项” 的形式。既然, WENO 格式对于小尺度结构的耗散过大, 所以, 很合理地我们应该除去修正项, 尽可能不使用修正项。

我们需要满足如下条件的函数 $\theta(r)$:

在光滑区, $r \approx 0$ 并且 $\theta(0) = 0$;

在间断处, $r \approx 1$ 并且 $\theta(1) = 1$ 。

在本文中我们定义

$$r = 1 - \frac{\omega_m \omega_s}{C_m C_s}. \quad (3.11)$$

函数 $\theta(r)$ 为

$$\theta = r^q \cdot (q+1-q \cdot r), \quad (3.12)$$

其中 q 是一个正整数。之所以选成如上的表达式和 q 的取值将在后面讨论。

注意到, (3.2) 定义的 $2N$ 阶格式可以写成 WENO 格式中 $\hat{f}_{j+1/2}^{(l)}$ 的线性组合, 即

$$\hat{f}_{j+1/2}(\sigma) = \sum_{l=0}^N d_l(\sigma) \cdot \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \quad (3.13)$$

其中的系数 $d_l(\sigma)$, ($l=0, \dots, N$) 见附录中表 6。

将 (3.12) 和 (3.13) 带入 (3.10), 即可得到修正加权群速度控制格式 (WGVC-M)

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2} = & \omega_m \left(\sum_{l=0}^N ((1-\theta_{j+1/2})) d_l(\sigma_m) + \theta_{j+1/2} \omega_l \right) \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \\ & + \omega_s \left(\sum_{l=0}^N ((1-\theta_{j+1/2})) d_l(\sigma_s) + \theta_{j+1/2} \omega_l \right) \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

为了方便编程, 我们将 (3.14) 写成类似于 WENO 格式的形式 [1], 即

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{l=0}^N \omega^{WGVC-M} \hat{f}_{j+1/2}^{(l)} \quad (3.15)$$

其中

$$\omega^{WGVC-M} = (1-\theta_{j+1/2}) g_l + \theta_{j+1/2} \omega_l \quad (3.16)$$

并且

$$g_l = \omega_m d_l(\sigma_m) + \omega_s d_l(\sigma_s) \quad (3.17)$$

可以很明显的看出, 在已有的 WENO 格式的基础上我们只要计算 (3.16)。其中 g_l ($l \in \{0, \dots, N\}$) 的值见附录表 7。

4. 数值试验

在这一部分, 我们将讨论将修正加权群速度控制格式运用到常见的格式测试案例上。对于一维线性问题, 其控制方程为

最后我们讨论一下函数 $\theta(r)$ 的表达式和其中的 q 的取值以及 WGVC-M 格式的性质。

之所以选择 $\theta(r)$ 函数为 (3.12) 的形式, 是

因为

a. 其具有性质:

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1; \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = 0 \quad (3.18)$$

可以看出其不仅满足我们要求的性质, 而且保证了当 q 取无穷大时, 逼近为 δ 函数, 这样理论上总上可以保证 WGVC-M 格式的形式。即确保间断处总是用 WENO 格式来除掉 GVC 格式不能除掉的数值震荡。

b. 之所以选择幂函数形式, 是因为从 0 到 1 突变, 幂函数变化快。大量的数值试验表明, 随着 q 的增大, 耗散越小。这点很明显: q 越大, $\theta(r)$ 绝大部分值均为 0, 只有强间断处才不为 0。当然变化更快的是指数函数, 但是要找到满足 (3.18) 性质的指数函数, 则表达式过于复杂。

对于 q 的取值。理论上 q 可调。当 q 为 0 时, 即为 WENO 格式, 当 q 取无穷大时, 逼近为 δ 函数。 q 越大, 耗散越小, 耗散越小, 就不能保证基本无震荡。本文通过大量的数值试验表明, 耗散和基本无震荡的折中考虑是 $q=100$ 。

最后, 对于 WGVC-M 格式的性质, 本文认为, GVC 格式和 WENO 格式都是用来克服间断处的数值震荡的, 在间断和极值处应尽可能使用 GVC 格式而不使用 WENO 格式, WENO 格式用来进一步克服在间断和极值处那些 GVC 格式无法克服的数值震荡。所以, 如果一定要看成是混合格式, 本文的格式看以看成是在间断处的混合格式, 不同于传统的混合格式。此外, 本文认为新格式亦不能看成是对 WENO 格式的简单优化。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

对于其他问题, 其控制方程为可压缩流动的 Euler 方程

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho ue_t + up \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho ve_t + vp \end{pmatrix}_y = 0$$

(4.2)

数值求解上述方的过程如下, 在单元界面处, 使用 Roe 平均求出界面值。局部 Lax-Friedrichs 通量向量分裂[2]将通量分裂为正

4.1 线性单波方程

首先, 我们考虑网格加密情况下格式的误差性质。在计算中, 我们使用四精度的浮点运算, 时间步长为 $dt = (dx)^3$

表 1 和 2 给出了方程(4.1), 初始条件为 $u_0(x) = \sin(\pi x)$, 区间为 $[-1, 1]$, 并且为周期

负两部分, 即 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$ 。使用局部特征分解技术后, 格式被运用到每个特征场上。变回到物理空间后即可得到最终的数值通量。时间方向使用具有 TVD 性质的 3 阶 Runge-Kutta 法[15]。在所有的计算中 CFL=0.6。

条件时, 随着网格加密, 新格式的收敛情况。计算时间为 $t=1$ 。

从表 1 和 2 中, 可以看出, 新格式很快就收敛到了最高精度, 而同阶的标准 WENO ($\varepsilon = 10^{-40}$) [6]格式则没有这个性质。

表 1 WENO5 和 WGVC-M5 的收敛性质, 其中初始条件为 $u_0(x) = \sin(\pi x)$

方法	网格单元数	L_1		L_∞	
		误差	精度	误差	精度
WENO5 ($\varepsilon = 10^{-40}$)	10	3.50E-02	—	2.96E-02	—
	20	1.55E-03	4.50	1.46E-03	4.35
	40	4.55E-05	5.09	4.59E-05	4.99
	80	1.40E-06	5.03	1.48E-06	4.96
WGVC-M5	10	6.38E-03	—	4.04E-03	—
	20	2.04E-04	4.97	1.51E-04	4.75
	40	6.37E-06	5.00	4.96E-06	4.92
	80	1.99E-07	5.00	1.56E-07	4.99

表 2 WENO7 和 WGVC-M7 的收敛性质, 其中初始条件为 $u_0(x) = \sin(\pi x)$

方法	网格单元数	L_1		L_∞	
		误差	精度	误差	精度
WENO7 ($\varepsilon = 10^{-40}$)	10	3.00E-01	—	2.48E-01	—
	20	4.27E-02	2.81	5.29E-02	2.23
	40	2.88E-03	3.89	3.18E-03	4.06
	80	2.07E-04	3.80	4.90E-04	2.70
	160	1.24E-05	4.07	5.46E-05	3.17
WGVC-M7	10	2.10E-01	—	1.54E-01	—
	20	3.34E-02	2.66	4.49E-02	1.78
	40	3.27E-03	3.35	5.13E-03	3.13
	80	1.64E-04	4.32	3.81E-04	3.75
	160	9.92E-06	4.05	4.36E-05	3.13

4.2 激波-密度波干扰问题

我们考虑激波密度波干扰问题[16]。其初始条件为一个马赫数为 3 的激波和一个密度的

扰动波，具体分布如下：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, 2.629, 10.333) & \text{if } 0 < x < 1 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1) & \text{if } 10 > x > 1 \end{cases}$$

计算的最终时间为 $t = 1.8$ 。因为本问题没有精确解，图中的“精确解”是用经典的 WENO5 格式在网格点数为 4001 上计算出的。图 3-4 给

出了使用修正加权群速度控制格式得到的数值结果。可以看出，新的格式在对激波的捕捉和经典的 WENO 格式相当的情况下，对小尺度结果的分辨显著得到了提高。

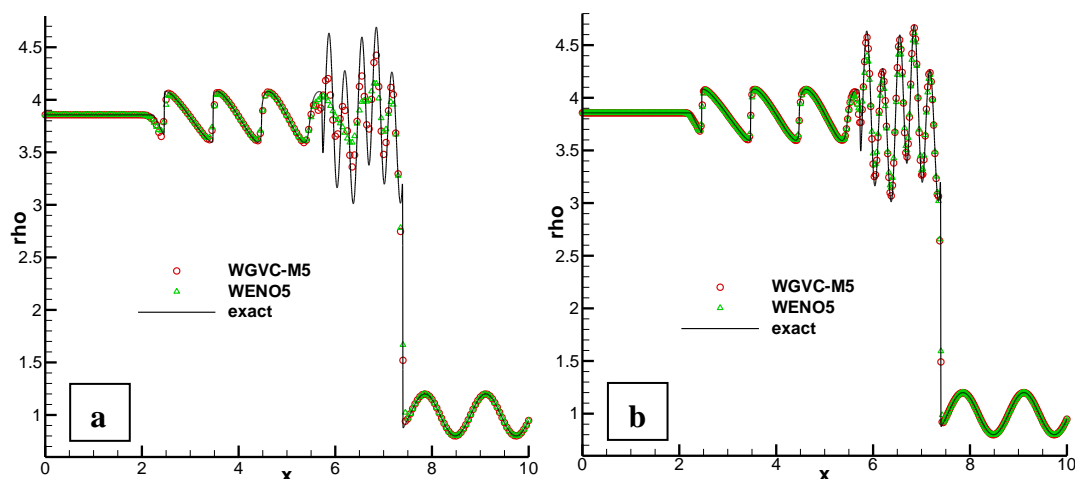


图 3 激波-密度波干扰问题：(a) 密度分布，网格点数为 201；(b) 密度分布，网格点数为 401

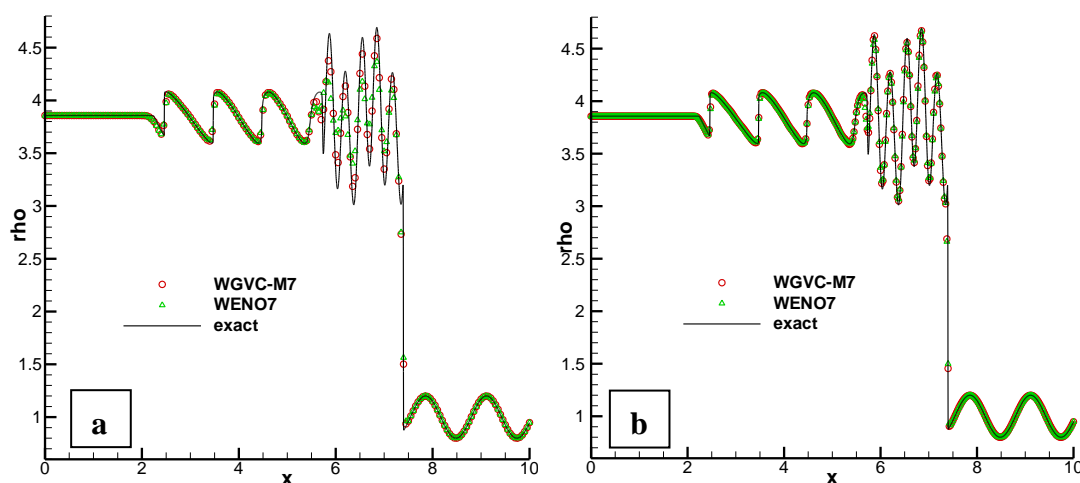


图 4 激波-密度波干扰问题：(a) 密度分布，网格点数为 201；(b) 密度分布，网格点数为 401

4.3 双马赫反射问题

我们考虑一个入射角为 60° 马赫数为 10 的激波的双马赫反射问题。具体求解设置如下 [17]：计算区域为 $[0, 0] \times [4, 1]$ 。边界条件为：下边界，即 $y = 0$ ，从 $x = 0$ 到 $x = 0.1667$ 给定是波后条件。平板(前缘位于 $x = 0.1667$ 处，一直延伸到 $x = 4$) 处采用反射

壁面条件。计算区域左边界和右边界分别采用入口和出口条件。上边界的各点的值由马赫数为 10 的激波的精确运动来确定。对于此问题，计算的最终时间为 $t = 0.2$ 。计算网格为 961×241 。

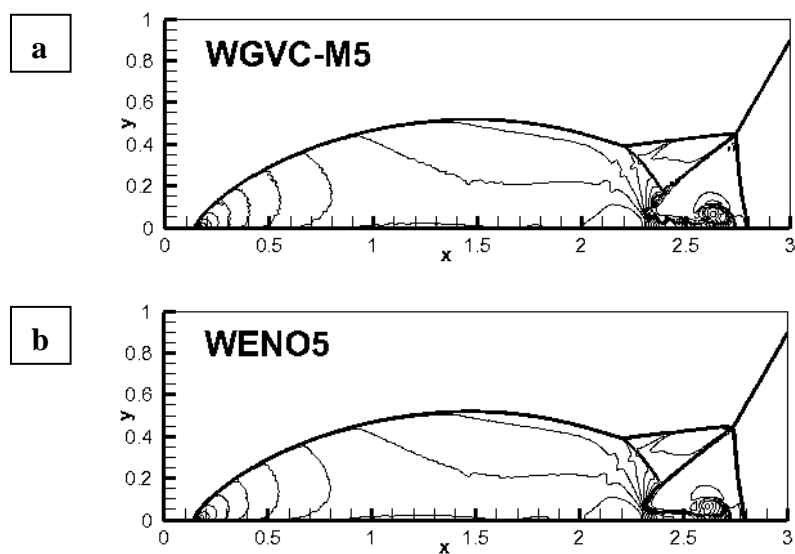


图 5 $t = 0.2$ 时密度分布。(a) WGVC-M5; (b) WENO5。30 条等值线从 $\rho = 1.5$ 到 $\rho = 22.9705$ 。

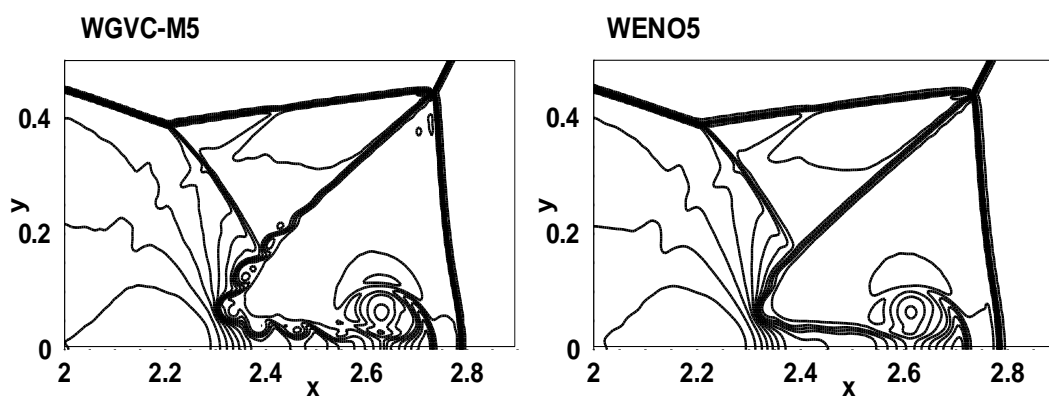


图 6 图 5(a) 和 5(b) 的局部放大。30 条等值线从 $\rho = 1.5$ 到 $\rho = 22.9705$ 。

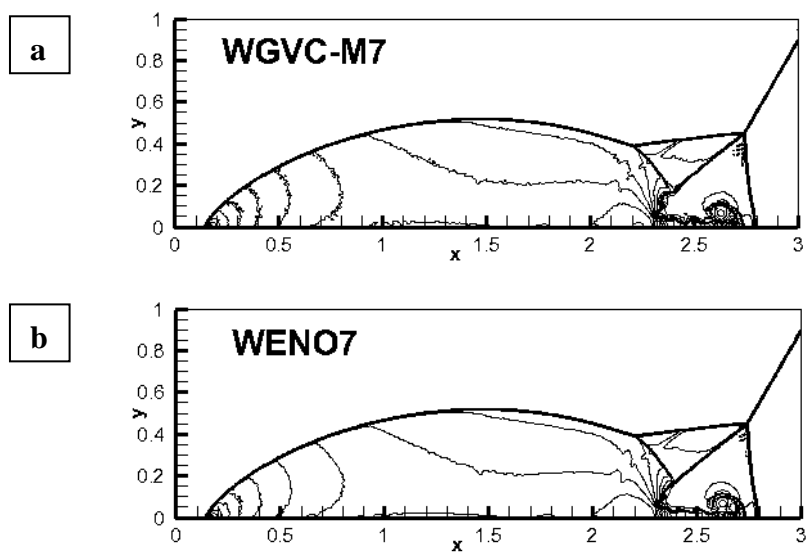


图 7 $t = 0.2$ 时密度分布。(a) WGVC-M7; (b) WENO7。30 条等值线从 $\rho = 1.5$ 到 $\rho = 22.9705$ 。

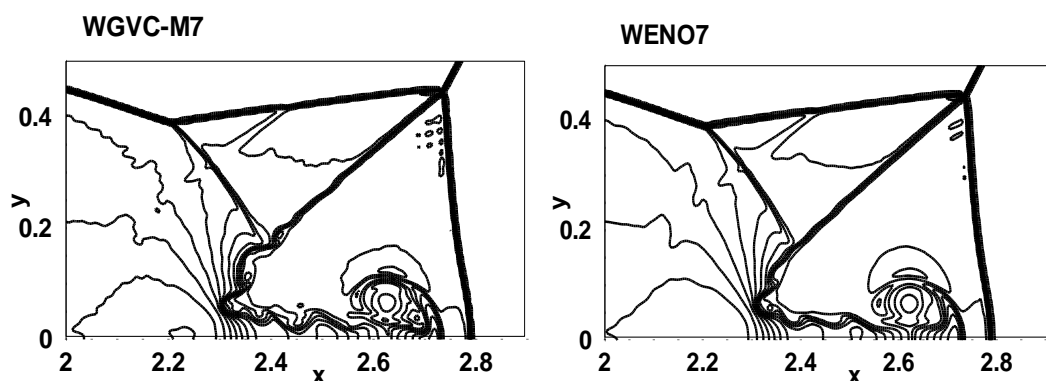


图8 图7(a)和7(b)的局部放大。30 条等值线从 $\rho=1.5$ 到 $\rho=22.9705$ 。

图5给出了5阶修正加权群速度控制格式和经典WENO格式的数值模拟的结果。而图6给出了图5的局部放大的结果。图7给出了7阶修正加权群速度控制格式和经典WENO格式的数值模拟的结果。而图8给出了图7的局部放大的结果。可以看出由于新格式具有和同阶经典WENO格式相似的激波捕捉能力，同时由

于新格式的数值粘性较小，分辨出更多的近壁面结构。

与文献[17](图1)的结果相比较可以得出，WGVC-M5和WGVC-M7的结果近似等于经典WENO9在网格 961×241 上的结果。显示出新的格式对于小尺度结果的良好分辨能力。

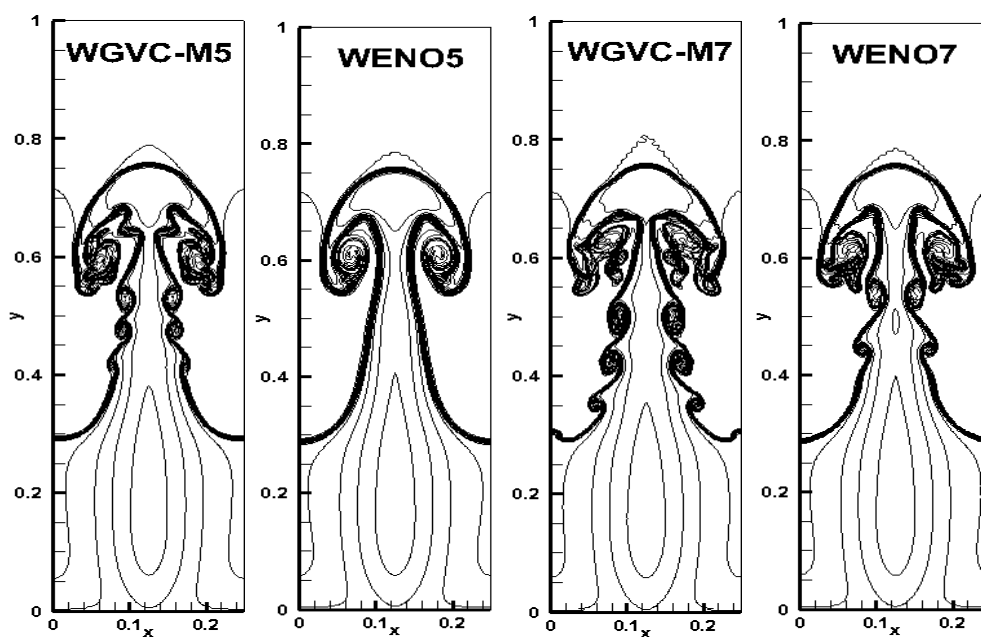


图9 网格点数 481×121 。15 条等值线从 $\rho=0.952269$ 到 $\rho=2.14589$

4.4 瑞利-泰勒不稳定

计算条件设置如下[17]：计算区域为 $[0, 0.2] \times [0, 1]$ 。初始流场为：

当 $0 \leq y < 0.5$ 时， $\rho=2$ ， $u=0$ ， $p=2y+1$ ， $v=-0.025c \cdot \cos(8\pi x)$ 。

当 $0.5 \leq y \leq 1$ 时， $\rho=1$ ， $u=0$ ， $p=y+1.5$ ， $v=-0.025c \cdot \cos(8\pi x)$ 。

其中 c 是声速 $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, 并且 $\gamma = \frac{5}{3}$ 。

除此之外, Euler方程的第三个方程加一个源项 ρ , 第四个方程加一个源项 ρv 。计算的最终时间为 $t = 1.95$ 。

图 9 给出了 5 阶和 7 阶 WGVC-M 格式和同阶经典 WENO 格式在网格 481×121 上的数值结果。从图中可以看出新格式的耗散要明显小于

同阶的经典 WENO 格式, 分辨出了更多的小尺度结构。

同文献[17](图 2)的结果相比。7 阶的 WGVC-M 格式在网格 481×121 上给出的数值结果相当于 9 阶经典 WENO 格式的结果。对于 5 阶 WGVC-M 格式, 在网格 481×121 上给出的结果要远优于同阶的 WENO5 的在相同网格条件下的数值结果。

5. 结论

在本文中, 我们给出了如何定量地构造慢格式和混合格式; 如何通过加权实现群速度控制; 最后给出了一类名为修正加权群速度控制格式(WGVC-M)。通过一些典型的数值试验表明

新格式在具有良好的激波捕捉能力的同时具有了优于同阶 WENO 格式的对小尺度结构的分辨能力。因为新格式适合于对复杂流动的数值模拟。

附录

附录给出了 WGVC-M 中各种系数和参数的值。

表 3 系数 $a_l (l = -(N+1), \dots, N)$ 的值

	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3
N=2	—	σ	$\frac{1-60\sigma}{12}$	$\frac{2(-1+15\sigma)}{3}$	-10σ	$\frac{2+15\sigma}{3}$	$-\frac{1}{12}-\sigma$	—
N=3	σ	$\frac{-1-420\sigma}{60}$	$\frac{3(1+140\sigma)}{20}$	$\frac{-3-140\sigma}{4}$	35σ	$\frac{-3(-1+28\sigma)}{4}$	$\frac{-3+140\sigma}{20}$	$\frac{1}{60}-\sigma$

表 4 系数 $b_l (l = -N, \dots, N)$ 的值

	b_{-3}	b_{-2}	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3
N=2	—	$-\sigma$	$\frac{-1+48\sigma}{12}$	$\frac{7-72\sigma}{12}$	$\frac{7+48\sigma}{12}$	$-\frac{1}{12}-\sigma$	—
N=3	$-\sigma$	$\frac{1+360\sigma}{60}$	$\frac{-2-225\sigma}{15}$	$\frac{37+1200\sigma}{60}$	$\frac{37-900\sigma}{60}$	$\frac{2(-1+45\sigma)}{15}$	$\frac{1}{60}-\sigma$

表 5 参数 $\sigma_m, \sigma_s, \sigma_0$ 的值和最优权重 C_m, C_s 的值

	σ_m	σ_s	σ_0	C_m	C_s
N=2	$-\frac{7773}{100000}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{10000}{23319}$	$\frac{13319}{23319}$
N=3	$\frac{441}{20000}$	0	$\frac{1}{140}$	$\frac{1000}{3087}$	$\frac{2087}{3087}$

表 6 系数 $d_l(\sigma)$ 的值

	$d_0(\sigma)$	$d_1(\sigma)$	$d_2(\sigma)$	$d_3(\sigma)$
N=2	-3σ	$\frac{1-6\sigma}{2}$	$\frac{1+12\sigma}{2}$	—
N=3	4σ	$\frac{1+100\sigma}{5}$	$\frac{3-60\sigma}{5}$	$\frac{1-60\sigma}{5}$

表 7 $g_l = \omega_m d_l(\sigma_m) + \omega_s d_l(\sigma_s)$ 的值

	g_0	g_1	g_2	g_3
N=2	$\frac{23319}{100000} \omega_m$	$\frac{1}{2} + \frac{23319}{100000} \omega_m$	$\frac{1}{2} - \frac{46638}{100000} \omega_m$	—
N=3	$\frac{441}{5000} \omega_m$	$\frac{1}{5} + \frac{441}{1000} \omega_m$	$\frac{3}{5} - \frac{1323}{5000} \omega_m$	$\frac{1}{5} - \frac{1323}{5000} \omega_m$

参考文献

- 1 G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, J. Comput. Phys. 126 (1996) 202 - 228.
- 2 D. Balsara, C.W. Shu, Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order accuracy, J. Comput. Phys. 160 (2000) 405 - 452.
- 3 S. Pirozzoli, Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction, J. Comput. Phys. 178 (2002) 81 - 117.
- 4 Y.X. Ren, M. Liu, H. Zhang, A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 192 (2003) 365 - 386.
- 5 G. Li, J. Qiu, Hybrid weighted essentially non-oscillatory schemes with different indicators, J. Comput. Phys. 229 (2010) 8105 - 8129.
- 6 A.K. Henrick, T.D. Aslam, J.M. Powers, Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points, J. Comput. Phys. 207 (2005) 542 - 567.
- 7 M.P. Martin, E.M. Taylor, M. Wu, V.G. Weirs, A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence, J. Comput. Phys. 220 (2006) 270 - 289.
- 8 X.Y. Hu et al., An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme, J. Comput. Phys. 229 (2010) 8952 - 8965.
- 9 D.X. Fu, Y.W. Ma, T. Kobayashi, Non-physical oscillations in numerical solutions: reason and improvement, CFD J. 4 (4) (1996) 427 - 450.
- 10 R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W.S. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 227 (6) (2008) 3101 - 3211.
- 11 Marcos Castro, Bruno Costa, Wai Sun Don, High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 230 (2011) 1766 - 1792.
- 12 Y. W. Ma and D. X. Fu, Fourth order accurate compact scheme with group velocity control (GVC), SCIENCE IN CHINA SERIES A: MATHEMATICS. 9(44) 2001: 1197-1204.
- 13 X.L. Li, D. X. Fu and Y. W. Ma, Optimized group velocity control scheme and DNS of decaying compressible turbulence of relative high turbulent Mach number, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2005; 48:835 - 852.
- 14 Q. Zhu, Y. Li, An upwind compact approach with group velocity control for compressible flow fields, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2004; 44:463 - 482.
- 15 C.W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, J. Comput. Phys. 77 (1988) 439 - 471.
- 16 C.W. Shu, S. Osher, Efficient implement of essentially non-oscillatory shock-wave schemes, II, J. Comput. Phys. 83 (1989) 32 - 78.
- 17 J. Shi, Y.T. Zhang, C.W. Shu, Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures, Journal of Computational Physics 186 (2003) 690 - 696.

Modified weighted group velocity control schemes for hyperbolic conservation laws

HE Zhiwei¹ LI Xinliang¹ FU Dexun² MA Yanwen²

(1 State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Rd, Beijing 100190, China)

(2 the State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

Abstract Based on group velocity control theory (GVC), a new class of schemes named modified weighted group velocity control schemes (WGVC-M) is presented. The schemes are designed to maximize the resolution of short waves and to minimize numerical dissipation. Through systematic tests including shock/wave interaction problem, two-dimensional double-Mach reflection problems and Rayleigh-Taylor instability problem and comparison with the classical WENO schemes, the new schemes show good resolution for the small scales structures and fine shock-capturing capability, and are suitable for simulations of compressible complex flows.

Keywords High order accuracy; Hyperbolic conservation laws; Group velocity control; WENO