配船计划的优化模型与算法

罗长童

中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室（筹），北京 100190

摘要 配船计划是经济管理中遇到的一个实际问题．某公司用 M 艘油轮给 W 个位于不同海港的储气罐供应液化天然气．每艘油轮的容量已知，每个储气罐的消耗率可以预测．储气罐需要维持一定的库存水平（比如 50%）才能最小化库存成本．配船计划的目标就是要在一定时期内（比如一个季度）寻找一个最优的运输方案，使得总的库存成本最低．本文首先提出配船计划的组合优化模型，然后提出两方面的改进将模型简化为仅含有线性约束的 0-1 规划模型．最后，针对该 0-1 规划模型，我们提出了专门的遗传算法．数值结果表明，本文提出的模型和算法对配船计划的优化是切实有效的．

关键词 配船计划，组合优化，整数规划，遗传算法，启发式

引 言

配船计划是经济管理中遇到的一个实际问题．某公司用 M 艘油轮给 W 个位于不同海港的储气罐供应液化天然气．每个储气罐有不同的容量限制v_w, 其中$w=1,2,\cdots,W$, $M<W$．由于过低的库存可能引发供货不足问题，而过高的库存会增加库存维护成本，因而理想状态下希望这些储气罐的库存量维持在一个合理水平f_0（比如，50%）． 在一段时间T内(比如一年，$T=365$)，每天会有m_t艘油轮运来不同数量的液化天然气g_{it}，其中
$m_t\le M, i=1,2,\cdots,m_t, t=1,2,\cdots,T$．并且储气罐的初始库存和每个储气罐的日消耗量均已知，分别为$f_{w,0}$和$c_{w,t}$． 决策者需要将每天到来的油轮指派到合适的储气罐，使其库存量尽量接近理想库存水平f_0．

配船计划是一个新的复杂优化问题，一方面每天需要指派的油轮数目m_t可能大于 1, 另一方面储气罐在不同时间段的库存量互相关联，决策者要做出的是一段时期内的一系列决策（本文称之为运输方案或指派序列）．相似的问题有序列指派问题[3]、序列选择与指派问题[2]等等，但模型及其求解方法均不能适用于本文的配船计划问题．

当问题规模很小(时间段T很小, 同时油轮数M和储气罐数W也很小)时，自然可以通过枚举方法解决． 注意到枚举需要搜索的空间点数为$\prod_{t=1}^{T} P_W^{m_t}$，其中$P_W^{m_t}$为排列数．可见对稍大规模的问题, 枚举法是不现实的．

本文首先给出配船计划问题的优化模型及其改进方案，然后针对该问题给出其遗传算法及其启发式加速策略．最后给出配船计划问题的数值模拟结果．

1 配船计划的优化模型

1.1 基本模型

配船计划的目标是通过优化决策序列，使得各储气罐在不同时间段的库存量都尽可能地接近其合理水平f_0． 因而决策者需要一个合理的评价函数来评价一个指派序列的优劣． 本文中我们首先用罚函数的方法来定义关于库存水平f的评价函数(或称为成本函数)$g(f)$，其中库存水平=库存量/储气罐容量． 显然当库存水平f恰好为其合理水平f_0时，应当有 g(f)=0，否则增加一定的罚值． 罚值的大小取决于库存水平f偏离其合理水平f_0的距离和实际成本情况． 一般地，成本函数$g(f)$可定义如下：

$$g(f)=\begin{cases} \mathrm{p}_5(|f-f_0|), & f<0; \\ \mathrm{p}_3(|f-f_0|), & 0<f<f_1; \\ \mathrm{p}_1(|f-f_0|), & f_1<f<f_0; \\ 0, & f=f_0; \\ \mathrm{p}_2(|f-f_0|), & f_0<f<f_2; \\ \mathrm{p}_4(|f-f_0|), & f_2<f<1; \\ \mathrm{p}_6(|f-f_0|), & f<1. \end{cases}$$

其中 $0<f_1<f_0<f_2<1$，$0\le \mathrm{p}_1(|f-f_0|)\le \mathrm{p}_2(|f-f_0|)\le \mathrm{p}_3(|f-f_0|)\le \mathrm{p}_4(|f-f_0|)\le \mathrm{p}_5(|f-f_0|)\le \mathrm{p}_6(|f-f_0|)$．

上述$g(f)$定义了一个储气罐在一个小的时间段内（1 天）的成本，而对于整个决策序列而言，总的成本应当是所有储气罐在各个时间段的成本的总合,即
$G=\sum_{t=1}^{T}\sum_{w=1}^{W}g(f_{w,t})$． 注意到$f_{w,t}$的取值不仅依赖于当前指派方案$x_{w,t}$，而且依赖于之前的指派方案$x_{w,\tau}$，$\tau<t$． 其中
$w=1,2,\cdots,W$，$x_{w,t}\in\{1,\cdots,m_t\}$，
$x_{w,t}=i$表示在第t日第i辆油轮为第w个储气罐供货，$x_{w,t}=0$表示在第t日第w个储气罐没有供货．

于是配船计划问题描述为以下优化问题:

$$
\text{(P1)}\quad
\begin{aligned}
&\min G=\sum_{t=1}^{T}\sum_{w=1}^{W}g(f_{w,t}),\\
&\text{s.t. } f_{w,t}v_w=f_{w,t-1}v_w-c_{w,t}\\
&\qquad\qquad +\operatorname{sgn}(x_{w,t})g_{x_{w,t},t},\\
&\qquad x_{i,t}\neq x_{j,t}, i\neq j,\\
&\qquad w,i,j=1,2,\cdots,W,\\
&\qquad t=1,2,\cdots,T.
\end{aligned}
$$

可见，问题(P1)属于组合优化问题，是一种有约束的非线性整数规划．

1.2 模型改进

改进 1：约束的处理

问题(P1)中的约束比较复杂,为问题的求解带来了很大困难．注意到其中的库存量守恒的约束可以改写为:

$$
\begin{aligned}
&f_{w,t}-f_{w,t-1}=-c_{w,t}/v_w+\operatorname{sgn}(x_{w,t})g_{x_{w,t},t}/v_w\\
&f_{w,t-1}-f_{w,t-2}=-c_{w,t-1}/v_w\\
&\qquad\qquad +\operatorname{sgn}(x_{w,t-1})g_{x_{w,t-1},t-1}/v_w\\
&\quad\cdots\cdots\\
&f_{w,1}-f_{w,0}=-c_{w,1}/v_w+\operatorname{sgn}(x_{w,1})g_{x_{w,1},1}/v_w
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
f_{w,t}=f_{w,0}+1/v_w\cdot\textstyle\sum_{k=1}^{t}[-c_{w,k}\\
\qquad +\operatorname{sgn}(x_{w,t})g_{x_{w,t},t}]
\end{aligned}
$$

代入到目标函数中即可将问题(P1)的约束减少$W\cdot T$个，即:

$$
\text{(P2)}\quad
\begin{aligned}
&\min G=\sum_{t=1}^{T}\sum_{w=1}^{W}g(f_{w,t}=f_{w,0}+1/v_w\\
&\qquad\cdot\textstyle\sum_{k=1}^{t}[-c_{w,k}+\operatorname{sgn}(x_{w,t})g_{x_{w,t},t}]),\\
&\text{s.t. } x_{i,t}\neq x_{j,t}, i\neq j,\\
&\qquad w,i,j=1,2,\cdots,W,\\
&\qquad t=1,2,\cdots,T.
\end{aligned}
$$

应当指出，当使用遗传算法求解时,可以设定编码方案和进化算子，使其满足非冲突条“$x_{i,t}\neq x_{j,t}, i\neq j$”，此时问题(P2)就相当于一个无约束规划．

改进 2：决策变量的简化

问题(P1)和(P2)中,决策变量取整数，即$x_{w,t}\in\{1,\cdots,m_t\}$．因而问题为整数规划问题，注意到如果引入变量$a_{w,t}\in\{0,1\}$，其中$a_{w,t}=0$表示在第$t$日第$w$个储气罐不接受供货，$a_{w,t}=1$则表示在第$t$日第$w$个储气罐接受供货． 当$m_t>1$时按启发式规则将载货量较大的油轮指派给当日接受供货储气罐中的剩余容量较大储气罐． 但要注意，此时变量的非冲突条件变为$\sum_w a_{w,t}=m_t$． 经过上述处理后，问题(P1)转化为

$$
\text{(P3)}\quad
\begin{aligned}
&\min G=\sum_{t=1}^{T}\sum_{w=1}^{W}g(f_{w,t}),\\
&\text{s.t. } \textstyle\sum_w a_{w,t}=m_t\\
&\qquad a_{w,t}\in\{0,1\},\\
&\qquad w=1,2,\cdots,W,\\
&\qquad t=1,2,\cdots,T.
\end{aligned}
$$

问题（P3）是仅含有线性约束的 0-1 规划问题，约束条件的个数为T．

本文推荐采用经过上述两种改进方案的 0-1 规划模型（P3）进行配船计划优化． 尽管改进后的 0-1 规划相对简单,但传统的优化方法仍难以求解．因而本文给出求解该问题的遗传算法．

2 配船计划问题的遗传算法

1969 年，Holland 在 Darwin 关于生物进化适者生存思想的启发下提出遗传算法(genetic algorithm，简称 GA)，随后他的学生 De Jong 将其应用于最优化问题[4]，发展至今，遗传算法已经广泛应用于求解各种困难的优化问题[1][5]，尤其是组合优化问题．而配船计划问题是一种困难的组合优化问题，因此我们希望遗传算法可以用来处理该问题．显然，标准的遗传算法并不能求解该问题．为此，必须根据问题特点，对编码、解码、进化算子等遗传算法的基本要素重新进行设计，才能用于求解配船计划问题．

2.1 基本要素

本小节中，我们给出求解配船计划问题的遗传算法的编码方案、适应度度量和进化算子等基本要素．

(1) 0-1 矩阵编码

一段时期内的决策变量$a_{w,t}$（其中$w=1,2,\cdots,W$. t= 1;2;¢¢¢;T :)构成决策矩阵$A=(a_{w,t})_{W\times T}$自然地作为遗传算法的个体．

(2) 适应度函数

注意到问题(P1)是一个极小化问题，而适应度通常定义在最大化问题基础上． 本文定义$\text{Fitness}(A)=1/(1+G)$，其中为G 为总的库存成本.

(3) 进化算子

交叉算子采用按列多点交叉，假设有两个交叉点,分别位于T_1,T_2，将父代个体A,B分别写成分块形式：

$A=[A1_{W\times T1}\ A2_{W\times(T2-T1)}\ A3_{W\times(T-T2)}]$

$B=[B1_{W\times T1}\ B2_{W\times(T2-T1)}\ B3_{W\times(T-T2)}]$

则交叉后的个体为：

$A'=[A1_{W\times T1}\ B2_{W\times(T2-T1)}\ A3_{W\times(T-T2)}]$

$B'=[B1_{W\times T1}\ A2_{W\times(T2-T1)}\ B3_{W\times(T-T2)}]$

变异算子采取按列均匀变异，假设个体A在第j列发生了变异,则随机地选择该列上两个0、1 元素进行置换.

2.2 启发式规则

类似于贪婪算法，配船计划问题也有相应的贪婪解(局部最优解)，即以时间先后为序，每天进行当日的最优化指派，形成局部最优指派方案$\hat{a}_{w,t}$． 只要油轮数m_t和储气罐数W不大，每天的最优指派很容易确定，通过枚举法即可实现． 此时当前库存水平已知(不同于前面所讨论情形)，目标是当日指派后当日的成本函数最小，即$\min\sum_{w=1}^{W}g(f_{w,t})$． 整个指派方案的贪婪解为$(\hat{a}_{w,1},\hat{a}_{w,2},\cdots,\hat{a}_{w,T})$.

本文中，我们引入贪婪变异应用以上启发式规则，即变异个体以一定概率取指派方案贪婪解的列片段，即

$B''=[B1'_{W\times T1'}\ \hat{A}2_{W\times(T2'-T1')}\ B3'_{W\times(T-T2')}]$

.

3 数值模拟

3.1 可视化结果

实际问题通常需要优化的时间段较长(1 季度$T=90$，半年$T=180$, 或 1 年$T=365$)，为图示方便，以下仅以$W=6,T=50,m_t\in\{1,2\},f_0=50\%,$ $f_1=20\%,f_2=80\%$为例，给出算法的数值模拟结果(见图 1)．从图中结果可见，应用本文提出的优化模型和遗传算法所得到的最优序列指派方案基本上可以保证储气罐的库存水平维持在20%到80%之间，并且多数时间段上储气罐的库存水平在50%左右． 这一结果完全符合经济管理的需要.

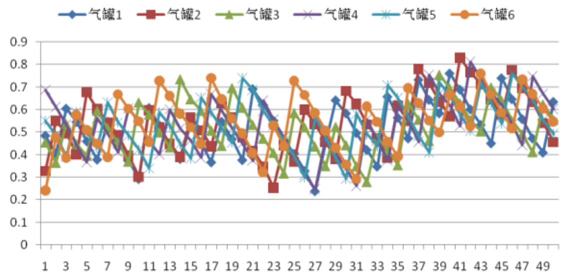

图 1 配船计划的优化结果

（优化后 50 日间 6 个储气罐的库存水平）

3.2 对优化结果

考虑 2 艘油轮、6 储气罐的情况，以半年（180 天）为优化周期．采用模型(P1),运用动态规划的方法，在 128 核 （Intel CPU 1.8 GHz）小型机群上需要 42 天才能得到优化结果。采用模型(P3)，运用本文的遗传算法，在双核 PC 机(Intel CPU 2.0 GHz)上只需要 5—6 分钟即可得到相同质量的优化结果。

4 结　论

配船计划问题是我们在经济管理中遇到的新问题，本文首先给出了配船计划问题的组合优化模型． 由于该模型的决策变量取值为整数且约束条件比较复杂,求解困难，因此我们提出了两个改进方案：减少约束，简化决策变量． 改进后的模型为 0-1 规划问题,仅含有 T 个线性约束．简化的模型用传统的优化算法仍难以求解，于是本文针对该问题给出其特殊的遗传算法．应当指出,从理论上是可以证明该遗传算法是依概率收敛到问题最优解的[6]． 但由于算法收敛速度缓慢,不能满足经济管理的实际需要,因而我们提出在进化过程中融入贪婪变异这一启发式算子,使得算法能很快收敛到问题的可接受解． 数值结果表明我们提出的优化模型和遗传算法对求解配船计划问题是切实有效的．总之,本文为经济管理中的配船计划优化提供了一套比较完整的解决方案.

References

[1] T. Cakar, R. Koker, H.I. Demir, *Parallel robot scheduling to minimize mean tardiness with precedence constraints using a genetic algorithm*, Advances in Engineering Software, vol.39, pp.47-54, 2008.

[2] Y.H. Chun, R.T. Sumichrast, A rank-based approach to the sequential selection and assignment problem, European Journal of Operational Research, vol.174, pp.1338-1344, 2006.

[3] C. Derman, G.J. Lieberman, S.M. Ross, A sequential stochastic assignment problem, Management Science, vol.18, pp.349-355, 1972.

[4] J.H. Holland, *Adaption in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, Cambridge, 1992.

[5] A.J. Nebro, G. Luque, F. Luna, E. Alba, *DNA fragment assembly using a grid-based genetic algorithm*, Computers & Operations research, vol.35, pp.2776-2790, 2008.

[6] G. Rudolph, *Convergence analysis of canonical genetic algorithms*, IEEE Trans. Neural Network, vol.5, pp.96-101, 1994.

Optimization Models and Algorithms for Cargo Planning

LUO Changtong

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract Cargo planning (CP) is a real-world problem we met. A company has M tankers to supply liquid gas to W tanks located in different ports every day. The capacity of each tanker is known, and the consumption-rate of each tank can be predicted. A tank needs to keep a balanced stock level (e.g., 50%) to minimize its inventory cost. The objective of CP is to find an optimal shipment schedule during a period of time (e.g., one year) to minimize the total inventory cost. First, we provide a combinatorial optimization model for CP. Then we suggest two modifications to reduce the model to a 0-1 integer programming with linear constraints. Finally, we provide a problem-specific genetic algorithm for the 0-1 programming problem. Numerical results show that the proposed model and algorithm are effective for cargo planning optimization.

Key words Cargo planning, combinatorial optimization; integer programming; genetic algorithm; heuristics