保证极值点精度的高阶保单调格式

李理，李新亮

中国科学院力学研究所，高温气体动力学国家重点实验室（筹），北京海淀区 100190

摘要 本文提出了一类适用于守恒方程数值计算的高精度保单调算法。该方法通过临点高阶插值并对其限制得到界面上的值，在原保单调限制器的基础上，将保单调区间的精度扩展到四阶，实现了相邻极值问题的识别，达到了同时保证计算在间断处保单调特性以及极值处高精度的目的。本文应用该方法进行了一系列算例的计算，如一维黎曼问题、Shu-Osher 问题、二维双马赫反射和三维可压缩湍流的直接数值模拟等数值算例，验证了格式的高精度、良好的激波分辨率。

关键词 保单调，激波捕捉 ，极值点，高分辨率

引 言

在高超声速复杂流体的数值模拟（比如 DNS、LES）中，高精度的有限差分法起着重要的作用。湍流的直接数值模拟或者大涡模拟要求差分格式具有高分辨率及低耗散的特点，以识别小尺度结构，而可压缩流体中出现的激波又需要格式在激波附近具有一定的耗散，以消除激波附近的数值震荡。因此，构造在光滑流动区域具有高分辨率、低耗散，在激波附近无振荡的高精度激波捕捉格式在模拟可压缩湍流中起着重要的作用[1]。

在高精度激波捕捉格式中，WENO 格式[2,3]是一类应用最为广泛的格式。众多的数值算例都证明了 WENO 格式拥有良好的激波捕捉能力和稳定性，但是他也有他固有的缺点，即耗散偏大[1]，过多的耗散掉了湍流中的小尺度结构，因此 WENO 格式并不是可压缩湍流直接数值模拟中最为理想的格式。由于这个原因，很多新的数值格式应运而生。他们之中，一类方法是采用混合格式[4]，在激波附近使用 WENO 格式，在光滑区域使用耗散小的格式；另一类是修改 WENO 格式的加权方式[5]，以减小耗散。

当然也有人另辟蹊径，从经典 TVD 格式出发，构造高阶激波捕捉格式。例如，Colella 和 Woodward 提出了分段抛物插值方法[6]，即 PPM，通过限制器来控制间断处的振荡。采用通常的限制器的会引起极值点附近的精度降阶，增加了耗散。Suresh 和 Huynh 提出了一类高精度保单调格式[7]，提高了极值点附近的精度，这类格式具有很高的分辨率和激波捕捉能力，且他的计算效率较大部分 WENO 格式也高很多。但 Suresh 和 Huynh 提出的格式在计算三维问题的时候，耗散依然很大，因此，本文在其基础上进行了进一步的改进。

本文在 Suresh 和 Huynh 提出的限制器方法的基础上，改进了格式在两个相邻极值点处降阶的问题，使格式可以正确模拟两相邻极值点附近的物理量，减小了不必要的耗散。

本文结构如下：第一部分介绍了控制方程及其离散方法，第二部分介绍了通量重构的方法，包括：1.对原有限制器的简介；2.对原限制器的改进。第三部分通过三个数值算例，验证了修正的格式的精度和激波捕捉能力。第四部分为总结。

1 控制方程和离散方法

为了方便描述，我们首先采用线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (1)$$
$$u(x,0)=u_0(x)$$

作为模型方程，其中 a 为常数，t 为时间坐标，x 为空间坐标，$u_0(x)$为初始条件。

将方程写成半离散形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{a}{h}\left[u\left(x_{j+1/2},t\right)-u\left(x_{j-1/2},t\right)\right]=0 \qquad (2)$$

其中$u(x_{j-1/2},t)$及$u(x_{j+1/2},t)$为界面的数值通量。

在离散过程中，时间方向和空间方向分开处理，空间离散通过对数值通量的重构实现，而时间方向采用三阶龙格库塔法推进。

2 通量重构

我们在光滑区采用六阶中心格式，其对应的界面通量的重构形式为

$$u_{j+1/2}=\frac{1}{60}\left[u_{j-2}+u_{j+3}-8\left(u_{j-1}+u_{j+2}\right)+37\left(u_j+u_{j+1}\right)\right]$$

在间断处使用这种重构方式会产生数值振荡，为了抑制这些数值振荡，需要将界面通量值限制在一个特定的区间中，也就是说我们需要对重构出的界面通量值进行约束。

2.1 保单调限制器

首先介绍在极值点仅有一阶精度的限制器，为了保证格式的保单调特性，需要对界面通量$u(x_{j+1/2},t)$做如下限制，

第一，假设$u(x_{j+1/2},t)\in[u_j,u_{j+1}]$ （3）

第二，设$u^{UL}=u_j+\alpha\left(u_j-u_{j-1}\right)$， （4）

限制$u(x_{j+1/2},t)\in[u_j,u^{UL}]$，其中$\alpha=4$。

取两个区间的交集即为对界面通量的限制区间。

此限制器可以实现数值计算的保单调特性，但在极值点附近，计算将降低为一阶精度。因此 Suresh 和 Huynh [7]对此限制器做了较大程度的改进。

首先，对于上述限制的第一个区间，基本思想是采用线性插值的方法，得到界面通量的一个低阶近似，然后采用这个插值结果扩展限制器区间。

其次，在极值点附近，对第二个区间做与曲率相关的修正，这样第二个区间也有所扩展，使得在极值点附近的重构更接近真值。

通过以上两步，得出了极值点不降阶的保单调格式，具体计算公式如下。

$$d_j=u_{j-1}+u_{j+1}-2u_j$$

$$d_{j+1/2}^{M4}=\min\mathrm{mod}\left(4d_j-d_{j+1},4d_{j+1}-d_j,d_j,d_{j+1}\right)$$

$$u^{FL}=u_j+\frac{1}{2}\left(u_j-u_{j-1}\right)$$

$$u^{FR}=u_{j+1}+\frac{1}{2}\left(u_{j+1}-u_{j+2}\right)$$

$$u^{FL}=\frac{1}{2}\left(u_j+u_{j+1}\right)$$

$$u^{MD}=median\left(u^{AV},u^{FL},u^{FR}\right)$$

$$u^{LC}=u_j+\frac{1}{2}\left(u_j-u_{j-1}\right)+\frac{4}{3}d_{j-1/2}^{M4}$$

$$u^{\min}=\max\left[\min\left(u_j,u_{j+1},u^{MD}\right),\min\left(u_j,u^{UL},u^{LC}\right)\right]$$

$$u^{\max}=\min\left[\max\left(u_j,u_{j+1},u^{MD}\right),\max\left(u_j,u^{UL},u^{LC}\right)\right]$$

那么，$u_{j+1/2}\in\left[u^{\min},u^{\max}\right]$。

但是，此修正可以保证数值格式在极值点的精度，但当遇到两个相邻的极值时，仍会降阶，甚至会与真实值产生较大的偏离。以下面一种相邻极值为例来说明这个问题，如图 1 所示，我们在构造 j+1/2 处的数值通量时，如果采用 Suresh 和 Huynh 修正的保单调限制器，则$d_j=0$,这使得$d_{j+1/2}^{M4}=0,u^{MD}=u_j,u^{LC}=u_j$,因而导致$u^{\min}=u^{\max}=u_j$，对界面上的通量产生了多余的限制，使计算在这种相邻极值点的附近降阶。

这种相邻极值问题看似很少遇到，其实在计算高频振荡问题以及湍流的直接数值模拟时经常会碰到这种问题，因此我们有必要针对这种问题对保单调格式进行进一步的修正。

2.2 保证连续极值点精度的保单调限制器

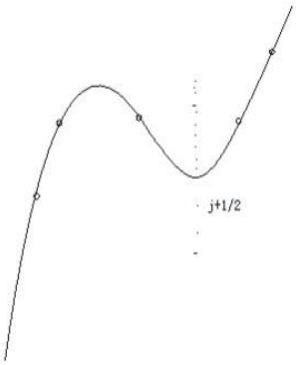

图 1 相邻极值情况一

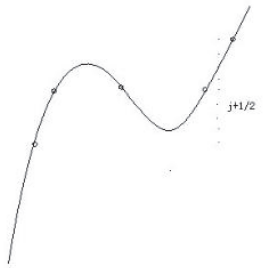

图 2 相邻极值情况二

在图 1 和图 2 两种情况下，应用上文提到的保单调限制器都会产生精度损失，为了解决这个问题，我们对于 Suresh 和 Huynh 扩展后的限制区间继续进行扩展，使得对于单调数据及有孤立极值点的数据，这些区间保持不变，而在具有两相邻极值的数据点上，区间有所扩大，使之能包含真值。

对于区间（3）的扩展，Suresh 的格式只会在图 1 的情形失效，Suresh 使用线性插值来确定限制区间，这种方法是无法识别出连续极值情况的，我们可以考虑使用二次插值来构造这个区间，这样既可以充分利用到六阶格式模板上的所有点，又可以提高极值点附近的精度。我们利用如下二次插值公式来确定边界

$$u^{FL} = 1.875u_j - 1.25u_{j-1} + 0.375u_{j-2}$$

$$u^{FR} = 1.875u_{j+1} - 1.25u_{j+2} + 0.375u_{j+3}$$

$$u^{AV} = 0.5\left(u_j + u_{j+1}\right)$$

之后的步骤与 Suresh 和 Huynh 相同，取 $u^{MD} = median\left(u^{AV}, u^{FL}, u^{FR}\right)$，则扩展后的区间为

$$u_{j+1/2} \in I[u_j, u_{j+1}, u^{MD}] \qquad (5)$$

如图 2 所示，扩展的区间为极值点上的真值提供了足够的空间，改进了原限制器在相邻极值处降阶的情形。同时，读着可能会有疑问，采用高阶的限制器，会不会引起不稳定性。下面作者给出解释，如果区间附近存在间断，那间断所在模板的插值会与另外两个值有很大偏差，如果取三个数是中位数，是取不到这个值的，限制器区间并没有因为激波而出现过多的放大，因此，格式的稳定性并没有下降。

下面我们讨论如何对区间（4）进行扩展，区间（4）在图 1 和图 2 两种情形下都会失效，导致这种情形主要是图 1 和图 2 中相邻极值区间的三个点作祟，这三个点的存在使得格式中的 dj 或 dj-1 为零值，这使得 Suresh 对限制器的修正 dm4 部分也为零值，本文使用了一个很简单的方法来改进这个缺陷，既然这三个点的存在会导致计算的偏差，那么我们在计算的时候，如果判断出连续极值的情形，就可以抛弃这三个点的信息，使用其他点的信息来计算限制区间。具体方法如下：

当我们遇到图一的情形时，$d_j = 0$，这时我们强制令 $d^{MM} = d_{j-1}$

当我们遇到图二的情形时，$d_{j-1} = 0$，这时我们强制令 $d^{MM} = d_j$

从图 1 与图 2 中我们可以看到，采用这种方法可以解决在连续极值处降阶的问题，同时计算量并没有增加。

3 数值算例

3.1Shu-Osher 问题[8]

Shu-Osher 问题描述的是一个马赫 3 的激波与密度扰动相互作用的现象。它是同时检验格式分辨率和激波捕捉能力的很好的例子。这个问题的控制方程为一维欧拉方程，计算区域为 $x \in [0,10]$。初始条件为

$$\begin{cases} \rho = 3.857143, u = 2.629369, p = 10.33333 \\ (x < 1) \\ \rho = 1 + 0.2\sin(5x), u = 0, p = 1 \\ (x \geq 1) \end{cases}$$

计算采用了 200 个网格点，求得了 t=1.8 时刻的密度分布。由于这个问题并没有解析解，我们采用 4000 个网格点的计算结果来代替精确解。修正的保单调格式(CMP6)与 Suresh 和 Huynh 保单调格式(SMP6)的对比见图 3。

从图 3 可以看出，改进的格式不仅没有降低激波捕捉能力，还提高了其在极值点附近的分辨率。

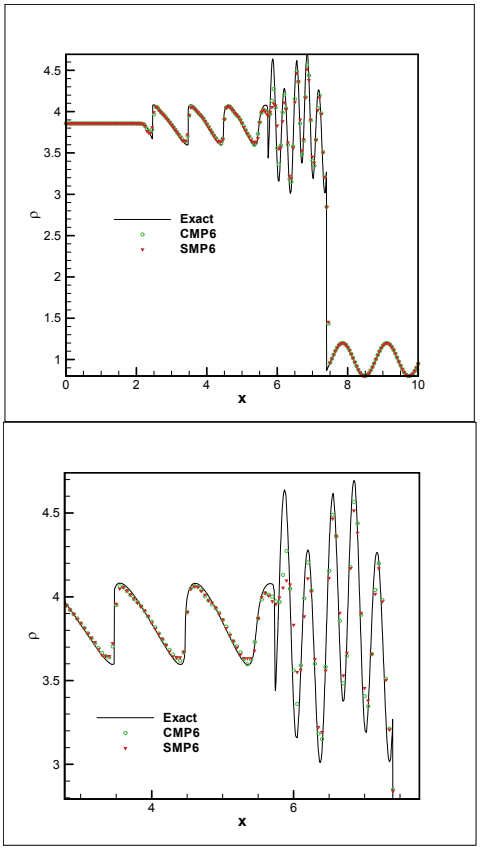

图 3 Shu-Osher 问题 t=1.8 时刻密度分布

3.2 双马赫反射问题[9]

此问题描述了一道马赫数 10 的斜激波在壁面上的反射。这是一个同时包含强间断和多尺度结构的算例。本文采用欧拉方程作为这个算例的控制方程，计算区域为[0,4]×[0,1]。反射壁面位于计算区域的底部。初始时刻，一道 Ma=10 的运动斜激波与壁面相交于 x=1/6,y=0 点，其与壁面的夹角为 60°。上下边界都采用固壁边界。计算网格为 960×240，我们采用不同的格式计算得到了 t=0.2s 时刻的流场。图 4 与图 5 为 Suresh 的保单调格式与修正的保单调格式的密度分布图。

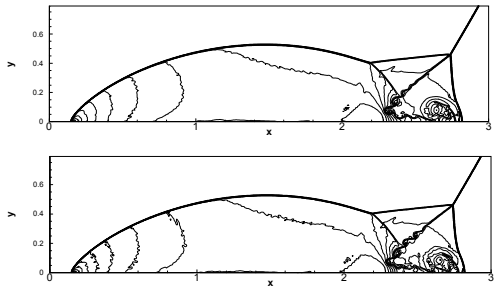

图 4 双 Mach 反射问题密度等值线-全局

（SMP6：上，CMP6：下）

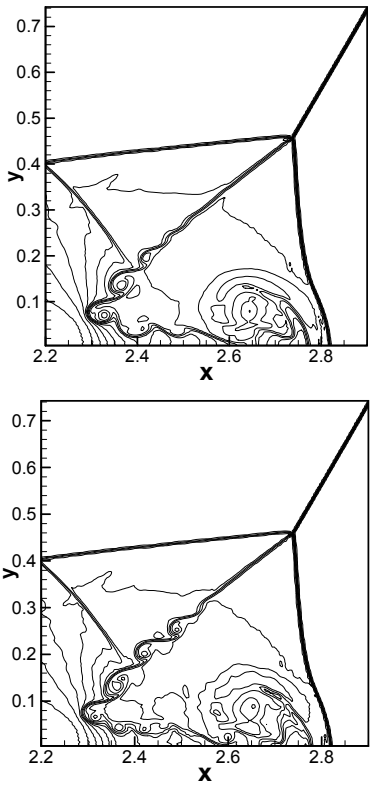

图 5 双 Mach 反射问题密度等值线-局部

（SMP6：上，CMP6：下）

从两个格式的对比可以看出，Suresh 的保单调格式与修正的保单调格式都可以识别出双马赫反射中的主要结构，包括马赫干，滑移线和附壁射流等。而计算结果表明，修正的保单调格式可以更好的识别出第二个三岔点附近的小尺度结构，滑移线附近涡的卷起现象以及马赫干附近的附壁射流都计算的更加清晰。

这个算例说明修正的保单调格式相对于 Suresh 的格式耗散更小，能分辨出更多的小尺度结构，并且同样拥有激波捕捉能力。

3.3 可压缩各向同性湍流算例[10]

下面我们将格式应用到三维问题中，可压缩各向同性湍流的直接数值模拟这个算例是检验格式对小尺度量分辨率的很好的算例。计算区域设定为[0,2π]×[0,2π]×[0,2π]，网格为 128×128×128 的均匀网格。三个方向的边界条件均选用周期边界条件。初始时，湍流马赫数为 $M_t = 0.2$，泰勒雷诺数 $\mathrm{Re}_\lambda = 72$。

本文计算得到 t=1.5 时的湍动能谱，由于这个问题没有精确解，我们把在更密的网格 256×256×256 网格下，利用九阶迎风+十阶中心格

式的计算结果作为精确解与粗网格上的计算结果比较。图 6 为两个结果的对比。

从图中可以看出，修正的保单调格式有良好的分辨率，耗散很小，可以应用在复杂流动的数值模拟中。

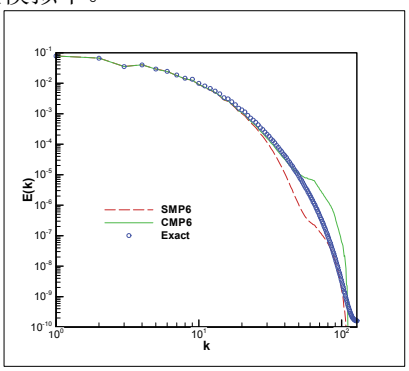

图 6 各向同性湍流能谱分布

4 结　　论

本文设计了一类高精度的保单调格式，它可以识别含有两相邻极值的问题，克服了传统 TVD 格式在极值点处降阶的缺陷。作者进行了一系列的算例测试，包括一维 Shu-Osher 问题，二维双马赫反射问题和三维各向同性湍流的数值模拟。所有的算例都表明，新设计的格式拥有良好的激波捕捉能力，并且有高分辨率、低耗散的特点。可以应用到湍流的直接数值模拟中。

参考文献

1 P. Moin, K. Mahesh, Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annual Fluid Mechanics 1998,30:539–578.
2 X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes, J. Comput. Phys. 1994,115:200–212.
3 G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes. J. Comput. Phys. 1996,126:202-228.
4 N.A. Adams, K. Shariff, A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. J. Comput. Phys. 1996,127: 27-51
5 M.P. Martin, E.M. Taylor, M. Wu, V.G. Weirs, A bandwidth-optimized WENO scheme for effective direct numerical simulation of compressible turbulence, J. Comput. Phys. 2006,220:270–289.
6 P. Colella and P. Woodward, The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations, J. Comput. Phys. 54, 1984,174:174-201
7 A. Suresh, H.T. Huynh, Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping. J. Comput. Phys. 1997,136:83-99.
8 C.W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-wave schemes, Ⅱ. J. Comput. Phys. 1989,83:32-78.
9 P. Woodward, P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. J. Comput. Phys. 1984,54:115-173.
10 R. Samtaney, D.I. Pullin, B. Kosovi, Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. Physics of Fluids 2001,13:1415-1430.

MONOTONICITY-PRESERVING SCHEMES WITH HIGH ORDER ACCURACY NEAR EXTREMA

LI Li, LI Xinliang

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract A new class of monotonicity-preserving schemes for the numerical solution of conservation laws is presented. The interface value in these schemes is obtained by limiting high order interpolation. The accuracy is extended to forth order near extrema, which could precisely simulate problems with adjacent extreme points. As a result, a class of schemes with high order accuracy around extrema and monotonicity-preserving property near discontinuity is constructed. The suitability and accuracy of this new scheme has been tested through a set of one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional tests, including the one-dimensional Shu-Osher problem , the two-dimensional double Mach reflection, and the three-dimensional direct numerical simulation of decaying compressible isotropic turbulence. All numerical tests show that, the new scheme has robust shock-capturing capability and high resolution for the small-scale waves due to fewer numerical dispersion and dissipation errors.

Key words monotonicity-preserving, shock-capture , extreme points, high resolution