Navier-Stokes 方程的高精度数值模拟方法

申义庆

中国科学院力学研究所，高温气体动力学国家重点实验室（筹），北京海淀区 100190

摘要 本文介绍作者及合作者近年来发展的关于 Navier-Stokes 方程的高精度数值模拟方法，包括提出无参数激波判别方法，并在此基础上构造的高精度低耗散的激波捕捉格式，以及与传统方法不同的粘性项高精度守恒算法。

关键词 计算流体力学，高精度低耗散激波捕捉格式，激波判别方法，复杂流场数值模拟

引 言

随着计算流体力学在各个相关学科的广泛应用和不断发展，特别是当前在可压缩流动的大涡模拟、直接数值模拟、计算气动声学等方面的应用研究，对计算流体力学数值方法提出了两方面的要求：一方面，要求数值方法能无振荡高分辨地捕捉激波，另一方面，又要能高精度低耗散地模拟流场中的小尺度结构。这两个要求正好是发展数值方法的两个对立面：捕捉激波需要引入数值耗散，而引入的数值耗散在无激波的光滑区域又会掩盖真实的物理耗散而影响计算的精度。自然地，很多研究学者因此提出了发展高分辨激波捕捉格式与高精度低耗散格式的杂交格式，即在激波区域，使用高分辨率激波捕捉格式，而在光滑区域使用高精度低耗散格式。由此提出了一个关键而且非常具有挑战性的问题，即怎样在求解过程中准确有效地识别激波。

Adams & Shariff[1]利用局部极值条件判断激波而发展了 ENO 格式与紧致格式的杂交格式；Pirozzoli[2]利用一阶差分变化的大小作为开关函数，发展了守恒的 WENO 与紧致格式的杂交格式；Ren 等[3]利用加权思想构造了 WENO-紧致格式的加权格式，使两个格式计算的通量能够光滑过度；Zhou 等[4]发展了 WENO-广义紧致格式的杂交格式，使用了与 Ren 等相同的激波判别函数；申义庆等通过将间断当作一内边界，提出有限紧致格式的概念，并发展了有限紧致 TVD 格式、有限紧致 ENO 格式[5]，进一步利用改进的限制器作判断发展了有限紧致-WENO 杂交格式[6]。数值算例表明在这些杂交格式具有无振荡捕捉激波的能力，在光滑区具有与紧致格式相应的高精度低耗散性质，其局限性主要是需要引入人为的、问题相关的参数来判断激波区域。

Hill & Pullin[7]利用 WENO 格式的光滑因子发展了调谐的中心差分-WENO 杂交格式；Pantano 等[8]利用压力和密度的曲率变化进一步发展了中心差分-WENO 杂交格式；Costa & Don[9]发展了中心格式-WENO 杂交方法，其中利用了 Harten 的多分辨过程[10]来确定解的光滑性。另外，将高精度低耗散数值计算与滤波过程相结合也是一种有效的流场模拟方法。在这方面，Yee 等人[11]对空间离散采用中心差分格式或紧致格式，在激波区域利用人工压缩方法来判断是否需要利用特征基过滤器来捕捉激波；Yee & Sjogreen[12]发展了多分辨小波分析方法来确定是否需要利用耗散过滤器来分辨激波，其中需要经验给出 Lipschitz 指数；Bogey 等[13]发展了基于压力的高频激波探测器，在激波区将过滤器转换为低阶过滤器来抑制激波振荡；Darian 等[14]引入整体尺度和局部尺度来标度激波的强度，同样需要引入经验阈值才能判断激波。总的说来，不管是中心-WENO 杂交格式或是高精度低耗散数值计算+过滤方法，一个共同的问题仍然是需要引入人为（经验）的、问题相关参数来判断是否需要利用数值耗散来捕捉激波，因此大大限制了方法的使用。

本文从函数可导的定义出发，提出无人为、问题相关参数的激波判别方法，在此基础上构造了高精度低耗散的激波捕捉格式。

Navier-Stokes 方程的高精度数值模拟，不仅需要对对流项使用高精度离散，同样对粘性项也需要使用高精度格式，因此在本文中也介绍了作者及合作者在这方面的研究工作。文中给出了一些典型算例的计算结果。

1 激波判别方法

从函数导数的定义出发，我们知道，f 在 x_i 点可导的充分必要条件是：极限 $\lim_{\Delta x^+\to 0}\frac{f_i^+ - f_i}{\Delta x^+}$ 和 $\lim_{\Delta x^-\to 0}\frac{f_i - f_i^-}{\Delta x^-}$ 存在且相等。

在数值计算中，网格步长总是有限的，理论上不可能趋于 0，因此我们把上述理论上的条件“推广”应用于数值计算，提出离散情况下函数不可导的判别方法。

1.1 三点不可导判别方法

在三点模板 $S^3=(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$ 上，令

$\beta_0=(f_{i+1}-f_i)^2$，$\beta_1=(f_i-f_{i-1})^2$，

以及 $\tau=|\beta_0-\beta_1|$，如果

$$\tau>\min(\beta_0,\beta_1), \tag{1}$$

则函数 f 在模板 S^3 上不可导。

利用反证法及条件 $\Delta x=\Delta x^+=\Delta x^-$ 即可证明上述结论。

事实上，假设 f 在模板 S^3 上是可导（充分光滑）的，利用 Taylor 级数展开，有

$$\beta_0=(f_i'\Delta x+\frac{1}{2}f_i''\Delta x^2+\frac{1}{3!}f_i'''\Delta x^3+\cdots)^2,$$

$$\beta_1=(-f_i'\Delta x+\frac{1}{2}f_i''\Delta x^2-\frac{1}{3!}f_i'''\Delta x^3+\cdots)^2,$$

由上式可见，β_0,β_1 总有相同的首项，因此 τ 总是比 β_0 和 β_1 低一阶的小量，即有 $\tau\le\min(\beta_0,\beta_1)$。

1.2 五点不可导判别方法

将 1.1 节的思想推广到在五点模板 $S^5=(x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2})$ 上，令

$$\beta_0=\frac{1}{4}(f_{i-2}-4f_{i-1}+3f_i)^2,$$

$$\beta_1=\frac{1}{4}(3f_i-4f_{i+1}+f_{i+2})^2,\quad \tau=|\beta_0-\beta_1|,$$

如果

$$\tau>\min(\beta_0,\beta_1), \tag{2}$$

那么函数 f 在 S^5 上不可导。

其中 β_0 和 β_1 可分别看作是函数在 x_i 点的一阶导数的左、右二阶差分近似的平方。在光滑区，通过 Taylor 级数展开分析可知，

$$\beta_0=\frac{1}{4}(2f_i'\Delta x-\frac{4}{3!}f_i'''\Delta x^3+\frac{12}{4!}f_i^{(4)}\Delta x^4+\cdots)^2$$

$$\beta_1=\frac{1}{4}(-2f_i'\Delta x+\frac{4}{3!}f_i'''\Delta x^3+\frac{12}{4!}f_i^{(4)}\Delta x^4+\cdots)^2$$

由此可见：当 $f_i'\ne 0$ 时，τ 是一个五阶小量，远远小于 β_0 和 β_1（二阶小量）；当 $f_i'=0$ 时，τ 是一个七阶小量，而 β_0 和 β_1 为六阶小量。

在文[17]中，我们提出利用 WENO 格式[15,16]中光滑因子之间的关系来判断一个五结点模板是否光滑的引理，即

令 $\tau_5=|IS_0-IS_2|$，当

$$\tau_5>\min(IS_0,IS_1,IS_2)$$

成立时，模板 S^5 则认为是不光滑的，在此模板上需要使用激波捕捉格式；否则，S^5 则是光滑的，可利用一般的线性格式。

1.3 激波判别方法

当函数 f 在模板上不可导（或不光滑）时，构造此模板上的数值通量函数只能使用激波捕捉格式。在这个意义上，我们可以利用上述原则来判断激波，即

在数值计算中，当（1）或（2）成立时，可认为 f 在模板 S^3 或 S^5 上表现为一个“激波”解。

2 高精度低耗散激波捕捉方法

考虑如下的双曲守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{3}$$

其半离散方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=-\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2}-h_{i-1/2}) \tag{4}$$

其中 $h_{i+1/2}$ 为数值通量函数。

2.1 线性格式

其一般形式可表示为：

$$\sum_{l=-q}^{p}\gamma_l h_{i+1/2+l}=\sum_{k=-m}^{n}a_k f_{i+k} \tag{5}$$

其中$\gamma_0\neq 0$。如果$\gamma_l=0(l\neq 0)$，则$h_{i+1/2}$为通常的显式有限差分格式；否则为紧致有限差分格式。指标p,q,m,n及系数γ_l和a_k可根据不同的要求及 Taylor 级数展开求得。

2.2 WENO 格式

当解中存在大梯度或激波时，一般的高阶线性格式将产生非物理数值振荡，在这种情况下，需要发展非线性的激波捕捉格式。其中，WENO 格式是近年来得到广泛应用的激波捕捉格式，其数值通量函数可表示为：

$$h_{i+1/2}=\sum_{k=0}^{r-1}\omega_k q_k \tag{6}$$

其中ω_k为权函数，q_k为函数f在模板$\mathrm{S}_k=(x_{i+k-r+1},x_{i+k-r+2},\cdots,x_{i+k})$上的$r$阶差分通量函数。权函数$\omega_k$的计算需要引入衡量函数光滑度的光滑因子，如在 Jiang & Shu[15]的 WENO 格式中，

$$\omega_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}}$$

其中

$$\alpha_k=\frac{C_k^r}{(\varepsilon+IS_k)^p},k=0,1,\cdots,r-1$$

其中，C_k^r是(4)式达到$(2r-1)$阶的最优权，IS_k为光滑因子，ε是为了使分母不为 0 的小参数，p为大于或等于 1 的指数。在文[15]中，$\varepsilon=10^{-6}$，$p=2$。

2.3 高精度低耗散激波捕捉格式

基于第 1 节中的激波判别方法，我们可以构造如下的高精度低耗散激波捕捉算法，即，如果条件(1)或(2)成立，那么在当前的模板S^3或S^5上利用激波捕捉格式来构造数值通量，否则可应用高精度低耗散的数值格式（如中心格式、紧致格式等）来给出相应的数值通量。具体算法如下：

1. 利用边界公式计算$h_{1/2}$和$h_{N+1/2}$；

2. M=1 !(搜索第 M 个可导区域)

start_point(M)=1 ！（M 可导区域的起点)

DO i=1,N-1

计算τ

IF $\tau>\min(\beta_0,\beta_1)$ THEN

end_point(M)=i !(M 可导区域的终点)

M=M+1

start_point(M)=i+1

利用激波捕捉格式计算$h_{i+1/2}$

END IF

end_point(M)=N

END DO

3. DO k=1,M !(对 M 个可导的区域，构造高精度低耗散的通量)

DO i=start_point(k),end_point(k)-1

利用（5）计算通量$h_{i+1/2}$

END DO

END DO

说明：第 2 步中，计算$h_{i+1/2}$可用各种激波捕捉格式，如，本文使用的 WENO-Z 格式[16]。第 3 步中计算通量$h_{i+1/2}$时，在计算τ的模板宽度内，可利用各种高精度低耗散格式，如中心差分格式、中心紧致格式等。

3 粘性项高精度守恒算法

Navier-Stokes 方程的高精度数值模拟，也要求对粘性项适用高精度格式。在大多数文献中，对粘性项的离散方法通常都只说明使用了传统的高阶中心格式，而没有给出详细的公式。

在 NS 方程，粘性项包含如下形式的二阶导数项，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial f}{\partial x}),\quad \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial f}{\partial y})$$

如利用传统的$2r$阶中心差分格式对第一项进行离散，则有，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial f}{\partial x})|_i=\frac{1}{\Delta x}\sum_{k=-r}^{r}a_k\mu_k\frac{\partial f}{\partial x}|_{i+k}+O(\Delta x^{2r})$$

其中，$\frac{\partial f}{\partial x}|_l=\frac{1}{\Delta x}\sum_{k=-r}^{r}a_k f_{l+k}+O(\Delta x^{2r})$

其中，a_k 是常数，可根据需要达到的精度及 Taylor 展式求得。由此可知，粘性项 $\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial f}{\partial x})$ 的 $2r$ 阶中心差分格式需要使用 $(4r+1)$ 点。如四阶精度需要使用 9 个点，六阶精度需要 13 个点。使用较多的结点既给边界上的处理带来较大的困难，而且从精度上来讲也不是最好的。

为此，我们提出了一组关于粘性项计算的高精度守恒算法[18,19]：

首先，将粘性项写成守恒的形式

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}(\widetilde{R}_{i+1/2}-\widetilde{R}_{i-1/2}) \tag{7}$$

为了得到 $2r$ 阶的精度，数值通量 $\widetilde{R}_{i\text{-}1/2}$

$$\widetilde{R}_{i\text{-}1/2}=\sum_{I=i-r+1/2}^{i+r-3/2}\alpha_I R_I \tag{8}$$

这里，I 为不同单元间的界面，α_I 为常数（表 1 给出四阶和六阶公式的值），R_I 中含有 $\mu\frac{\partial f}{\partial x}|_I$，$\mu\frac{\partial f}{\partial y}|_I$，$\mu\frac{\partial f}{\partial z}|_I$ 等项。

传统算法中，在不同的界面 I 上利用不同的点对 μ_I，$\frac{\partial f}{\partial x}|_I$ 等作高阶近似，因此大大增加了离散模板的宽度。在文[18,19]中，我们提出，在(8)式中不同的界面 I $(i-r+1/2,i-r+3/2,\cdots,i+r-3/2)$ 上都利用涉及到的所有点来逼近，即

$$\begin{cases}\mu_I=\sum_{l=m}^{n}C_l^I\mu_{i+l}+O(\Delta x^{(n-m+1)})\\ \frac{\partial f}{\partial x}|_I=\frac{1}{\Delta x}\sum_{l=r}^{s}D_l^I f_{i+l}+O(\Delta x^{(s-r)})\\ \frac{\partial f}{\partial y}|_I=\frac{1}{\Delta x}\sum_{l=m}^{n}C_l^I\frac{\partial f}{\partial y}|_{i+l,j}+O(\Delta x^{(n-m+1)},\Delta y^{(q-p)})\end{cases} \tag{9}$$

其中，

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{i,j}=\frac{1}{\Delta y}\sum_{l=p}^{q}C_l^C f_{i,j+l}+O(\Delta y^{(q-p)})$$

指标 (m,n)，(r,s)，(p,q) 以及常数 C_l^I，D_l^I，C_l^c 可根据不同的精度要求来确定。表 2-5 给出四阶和六阶精度的取值。

从公式上即可看出，我们所发展的格式用较少的结点就能达到传统格式的精度，如六阶格式只需要使用 9 个结点。

表 1 公式(8)中 α_I 的值

格式	α_I				
	i-5/2	i-3/2	i-1/2	i+1/2	i+3/2
四阶格式		-1/24	26/24	-1/24	
六阶格式	9/1920	-116/1920	2134/1920	-116/1920	9/1920

表 2 格式中模板节点的宽度

格式	（m，n）	（r，s）	（p，q）
四阶格式	(-2, 1)	(-3, 2)	(-2, 2)
六阶格式	(-3, 2)	(-4, 3)	(-3, 3)

表 3 格式中系数 C_l^c

格式	C_{-3}^c	C_{-2}^c	C_{-1}^c	C_0^c	C_1^c	C_2^c	C_3^c
四阶格式		1/12	-8/12	0	8/12	-1/12	

六阶格式	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60

表 4 格式中的 C_l^I

格式	I	C_{-3}^I	C_{-2}^I	C_{-1}^I	C_0^I	C_1^I	C_2^I
四阶格式	i-3/2		5/16	15/16	-5/16	1/16	
	i-1/2		-1/16	9/16	9/16	-1/16	
	i+1/2		1/16	-5/16	15/16	5/16	
六阶格式	i-5/2	63/256	315/256	-105/128	63/128	-45/256	7/256
	i-3/2	-7/256	105/256	105/128	-35/128	21/256	-3/256
	i-1/2	3/256	-25/256	75/128	75/128	-25/256	3/256
	i+1/2	-3/256	21/256	-35/128	105/128	105/256	-7/256
	i+3/2	7/256	-45/256	63/128	-105/128	315/256	63/256

表 5 格式中的 D_l^I

I	D_{-4}^I	D_{-3}^I	D_{-2}^I	D_{-1}^I	D_0^I	D_1^I	D_2^I	D_3^I
四阶格式								
i-3/2		71/1920	-141/128	69/64	1/192	-3/128	3/640	
i-1/2		-3/640	25/384	-75/64	75/64	-25/384	3/640	
i+1/2		-3/640	3/128	-1/192	-69/64	141/128	-71/1920	
六阶格式								
i-5/2	3043/107520	-5353/5120	4731/5120	733/3072	-239/1024	597/5120	-167/5120	143/35840
i-3/2	-143/35840	185/3072	-1185/1024	1175/1024	-125/3072	-51/5120	5/1024	-5/7168
i-1/2	5/7168	-49/5120	245/3072	-1225/1024	1225/1024	-245/3072	49/5120	-5/7168
i+1/2	5/7168	-5/1024	51/5120	125/3072	-1175/1024	1185/1024	-185/3072	143/35840
i+3/2	-143/35840	167/5120	-597/5120	239/1024	-733/3072	-4731/5120	5353/5120	-3043/107520

4 数值算例

4.1 对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad -1\le x\le 1,$$

初始条件为：

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{6}(G(x,\beta,z-\delta)+G(x,\beta,z+\delta)\\ +4G(x,\beta,z), & -0.8\le x\le -0.6;\\ 1, & -0.4\le x\le -0.2;\\ 1-|10(x-0.1)|, & 0\le x\le 0.2;\\ \frac{1}{6}(F(x,\alpha,a-\delta)+F(x,\alpha,a+\delta)\\ +4F(x,\alpha,a), & 0.4\le x\le 0.6;\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中，

$G(x,\beta,z)=e^{-\beta(x-z)^2}$

$F(x,\alpha,a)=\sqrt{\max(1-\alpha^2(x-a)^2,0)}$.

$a=0.5$，$z=-0.7$，$\delta=0.005$，$a=10$，$\beta=\log 2/36\delta^2$ 为常数。图 1 和图 2 给出时间 $T=8$ 时的解。可以看出，利用激波判别后，5p-6Pade-W5 格式比五阶 WENO-Z 格式，无论是在极值点或在激波附近，数值逼近精度都得到了改善。图 3 和图 4 还给出了文[2]和[3]中带人为参数的激波判断方法给出的解，可见人为参数极大地影响了解的性质，人为参数过大[2]（或过小[3]）则产生剧烈的数值振荡，而即使在这种情况下，在极值点的精度也不如本文的格式；人为参数过小[2]（或过大[3]），则数值精度又接近 WENO 格式的精度，从而不能达到格式设计的目的。

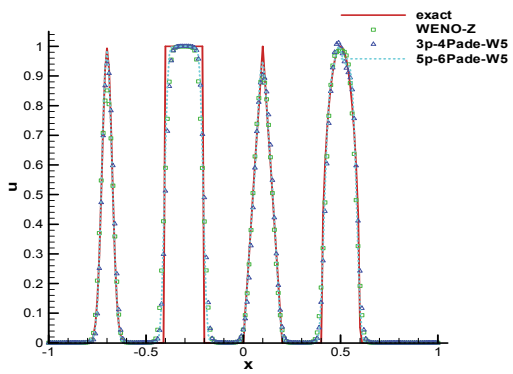

图 1 数值结果比较

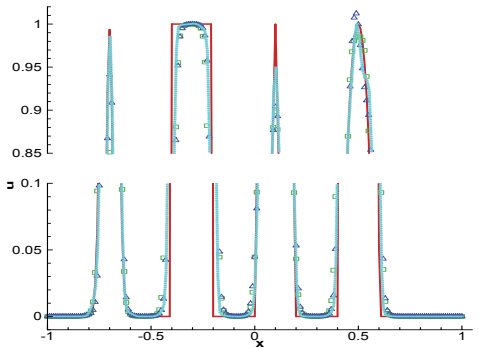

图 2 局部放大图

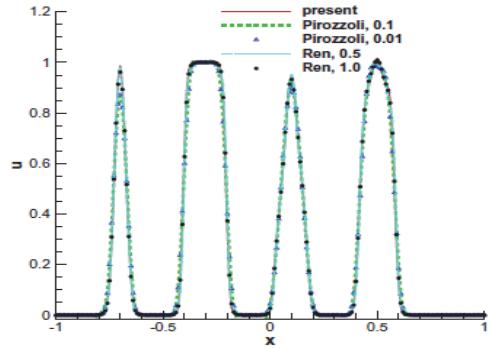

图 3 不同激波判断方法的数值结果比较

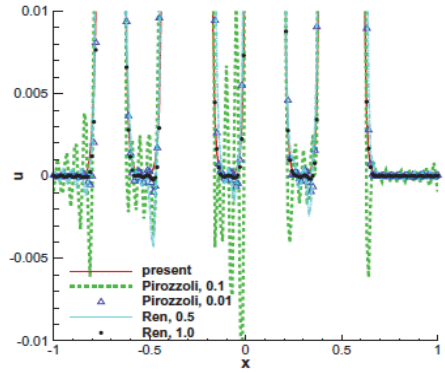

图 4 局部放大图

4.2 激波管 Shu-Osher 问题

求解一维 Euler 方程及如下边界条件：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(3.857143,2.629369,10.333), & x<-4\\ (1+\varepsilon\sin(5x),0.0,1.0), & x\ge -4\end{cases}$$

其中 $\varepsilon=0.2$。图 5 给出 $T=1.8$，网格点 $N=300$ 的结果。本文发展的算法在极值点比 WENO-Z 得到明显提高。

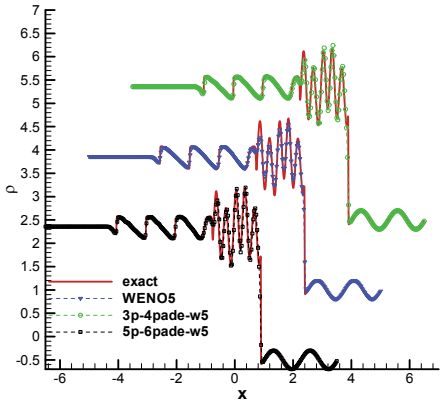

图 5 激波管 Shu-Osher 问题

4.3 粘性项格式的精度验证

与可压缩 NS 方程中的粘性项相对应，我们利用函数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial f}{\partial x})$$

来检验所发展格式的精度，测试了如下两种情况

(1) $\mu = \mathrm{A}e^{-2x}$， $f(x)=\dfrac{1-e^{-Rx}}{1-e^{-R}}$， $0\le x\le 1$。其中 $A=0.01$， $R=20$， $f(x)$ 具有类似于边界层流动中的速度分布。

(2) $\mu = \mathrm{A}e^{2x}$， $f(x)=\sin(Bx)$， $0\le x\le 1$。其中 $A=0.1$， $B=10$， $f(x)$ 类似于一个具有高频率的波。

表 6、7 给出四阶和六阶格式对问题（1）和（2）的计算精度，可见构造的格式分别获得了期望的四阶和六阶精度。

表 6 两种格式对问题（1）的精度验证

精度	N	L_∞		L_1	
		误差	阶	误差	阶
4 阶	20	2. 7556e-2		2. 0653e-3	
	40	1. 8554e-3	3. 893	1. 0964e-4	4. 236
	80	1. 1753e-4	3. 981	6. 1103e-6	4. 165
	160	7. 3680e-6	3. 996	3. 5846e-7	4. 091
	320	4. 6085e-7	3. 999	2. 1676e-8	4. 048
6 阶	20	5. 2509e-3		3. 9354e-4	
	40	8. 4762e-5	5. 953	5. 0090e-6	6. 296
	80	1. 3271e-6	5. 997	6. 8999e-8	6. 182
	160	2. 0741e-8	6. 000	1. 0091e-9	6. 095
	320	3. 2409e-10	6. 000	1. 5274e-11	6. 046

表 7 两种格式对问题（2）的精度验证

精度	N	L_∞		L_1	
		误差	阶	误差	阶
4 阶	20	1. 9647e-2		6. 8659e-3	
	40	1. 2169e-3	4. 013	4. 2900e-4	4. 000
	80	7. 5868e-5	4. 004	2. 6950e-5	3. 993
	160	4. 7388e-6	4. 001	1. 6895e-6	3. 996
	320	2. 9628e-7	3. 999	1. 0575e-7	3. 998
6 阶	20	7. 9318e-4		2. 5760e-4	
	40	1. 2556e-5	5. 981	4. 1441e-6	5. 958
	80	1. 9699e-7	5. 994	6. 5585e-8	5. 982
	160	3. 0843e-9	5. 997	1. 0316e-9	5. 990
	320	5. 1379e-11	5. 908	1. 6836e-11	5. 937

4.4 二维激波/剪切层干扰问题

求解二维 Navier-Stokes 方程，计算区域取 $[x,y]=[0:200,-20:20]$，来流速度为一个双曲正切的剖面， $u=2.5+0.5\tanh(2y)$，上层流动密度和压力为 $\rho_u=1.6374, p_u=0.3327$；下层流动的密度及压力为 $\rho_l=0.3626, p_l=0.3327$。一个 12° 角的激波从左上角射入流场中。在 y 方向的速度分量 v 中引入一个脉动场为：

$$v'=\sum_{k=1}^{2}a_k\cos(2\pi kt/T+\phi_k)\exp(-y^2/b)$$

其中 $T=\lambda/u_c$， $\lambda=30$， $u_c=2.68$， $b=10$， $a_1=a_2=0.05$， $\phi_1=0$， $\phi_2=\pi/2$。计算中 Reynolds 数 $\mathrm{Re}=500$， Prandtl 数 $\mathrm{Pr}=0.72$。粘性项采用四阶中心差分格式。

图 6 给出网格点为 321×81，时间 $T=120$ 的压力等值线图。在光滑区，3p-4Pade-W5 格式只有四阶精度，因此对后面几个涡的分辨不如 WENO-Z 格式，而 5p-6Pade-W5 格式则比

WENO-Z 格式更好地分辨了后面几个涡的结构。

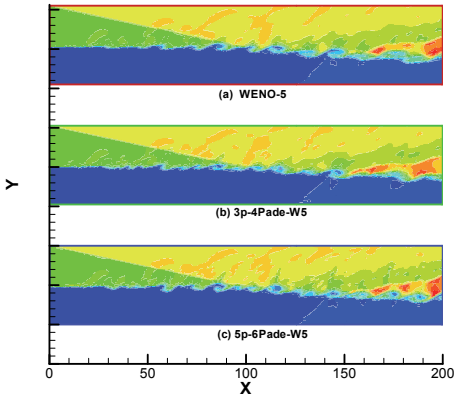

图 6 激波/剪切层干扰问题压力等值线，T=120

5 结　　论

本文介绍了 Navier-Stokes 方程中对流项和粘性项两个方面的高精度构造方法。其中，所提出的激波判别方法不含人为的、问题相关的参数，因此具有更好的适用性和普遍性，在此基础上可构造一类高精度低耗散的激波捕捉格式。与传统方法相比，发展的粘性项高精度差分格式精度高、所使用的模板结点少，因而具有更好的实用性。这两个方面的算法可构成 NS 方程的一致高精度算法。

参考文献

1. Adams N.A., Shariff K., A High-Resolution Hybrid Compact-ENO Scheme for Shock-Turbulence Interaction Problems, Journal of Computational Physics, 1996, 127: 27–51.
2. Pirozzoli S., Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction, J. Comput. Phys., 2002, 178: 81–117.
3. Ren Y.X., Liu M.E., Zhang H.X., A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 2003, 192: 365–386.
4. Zhou Q., Yao Z.H., He F., Shen M.Y., A new family of high-order compact upwind difference schemes with good spectral resolution, Journal of Computational Physics, 2007, 227: 1306 – 1339.
5. Shen Y.Q.,Yang G.W., Gao Z., High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 2006, 216: 114–137.
6. Shen Y.Q.,Yang G.W., Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 53: 531–560.
7. Hill D.J., Pullin D.I., Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks, J. Comput. Phys. , 2004, 194 : 435 – 450.
8. Pantano C., Deiterding R., Hill D.J., Pullin D.I., A low numerical dissipation patch-based adaptive mesh refinement method for large-eddy simulation of compressible flows, J. Comput. Phys. , 2007, 221: 63–87
9. Costa B., Don W.S., High order hybrid central-WENO finite difference scheme for conservation laws, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 204: 209-218.
10. Harten A., ENO schemes with subcell resolution, J. Comput. Phys., 1989, 83: 148 – 184.
11. Yee H.C., Sandham N.D., Djomehri M.J., Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters, Journal of Computational Physics ，1999，150: 199-238.
12. Yee H.C.，Sjogreen B.，Development of low dissipative high order filter schemes for multiscale Navier – Stokes/MHD systems ， Journal of Computational Physics, 2007, 225:910-934
13. Bogey C., Cacqueray N., Bailly C., A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations, Journal of Computational Physics, 2009, 228: 1447 – 1465.
14. Darian H. M., Esfahanian V., Hejranfar K., A shock-detecting sensor for filtering of high-order compact finite difference schemes，Journal of Computational Physics, 2011,230:494-514
15. Jiang G.S., Shu C.-W., Efficient implementation of weighted ENO schemes, J. Comput. Phys., 1996, 126: 202–228
16. Borges R., Carmona M, Costa B., Don W.S., An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 2008, 227: 3191 – 3211.
17. Shen Y.Q., Zha G.C., Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction, Journal of Computational Physics, 2011, 230: 4419-4436.
18. Shen Y.Q., Zha G.C., Chen X.Y., High order conservative differencing for viscous terms and the application to vortex-induced vibration flows, Journal of Computational Physics, 2009, 228: 8283-8300.
19. Shen Y.Q., Zha G.c., Large eddy simulation using a new set of sixth order schemes for compressible viscous terms, Journal of Computational Physics, 2010, 229: 8296-8312.

HIGH ORDER ACCURATE NUMERICAL SIMULATION METHODS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS

SHEN Yiqing

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract This paper introduced the author's recent works of high order accurate numerical methods for Navier-Stokes equations, including the shock detecting method without any artificial, problem-dependent parameters, the high order low dissipation shock capturing scheme based on the shock detecting method, and the high order conservative algorithms for the viscous terms in NS equations.

Key words Computational fluid dynamics, high order low dissipation shock capturing scheme, shock detecting method, numerical simulation of complex flowfield