

混合格式在高超声速气动热模拟中的特性研究

李康, 胡宗民, 姜宗林

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190)

摘要 混合差分格式在高超声速气动热模拟中得到了广泛的应用。本文系统调研了差分格式的发展历程, 结合文献数值研究中出现的问题, 提出了本文的两个关注的问题, 即: 两类混合格式(H-CUSP 和 E-CUSP)在高超声速气动热模拟中的特性和网格不匹配对混合格式的影响。采用数值方法对这两个问题进行了深入的研究, 对比了壁面热流、压力以及沿驻点线的压力温度分布等典型的流动区域。数值方法考虑了热化学非平衡效应, 并采用 LU-SGS 隐式格式对数值程序进行加速收敛。数值结果表明: 1) 所选取的混合格式对壁面传热模拟的差别来源于马赫数分裂形式和声速的选择, 由于粘性耗散小, 在驻点附近均会出现不同程度的振荡; 2) 网格不匹配因素对混合格式的影响有限, 或者说即使网格不匹配时, 混合格式对间断的捕捉仍有很高的精度。

关键词 高超声速流动, 钝头体, 混合格式, 气动热, 数值特性

0 引言

气动热预测是高超声速飞行器设计的关键问题之一。壁面传热由壁面处温度的一阶梯度和组分扩散决定, 这也决定了网格分辨率和数值方法均会对气动热预测产生很大的影响。对于高超声速来说, 除壁面温度、速度梯度的捕捉外, 另一个重点关注的问题是强激波间断的捕捉。激波间断要求数值格式有更高的稳定性, 而壁面处一阶梯度的捕捉需要更高的准确性。一般来讲, 这两个相互对立的方面难以同时满足。因此, 在高超声速气动热数值预测中, 数值格式在稳定性和准确性之间的自适应调整成为数值构造的一个有效的方法。

差分格式作为计算流体力学(CFD)中最为核心和活跃的因素, 一直是 CFD 发展的主线。最初的差分格式多为中心差分型, 依靠人工粘性来抑制激波的不稳定性, 比如 MacCormack 格式[1]和 Jameson 格式[2]。人工粘性的添加要求使用者具有一定的工作经验, 并且添加的人工粘性很容易污染流场的物理解, 影响计算的精度。从构造机理上

讲, 这类格式所采用的中心差分是对称的, 不具有方向性, 这与波的单方向传播不一致。迎风类差分格式克服了这样的问题。FVS 格式, 即矢量通量分裂格式, 是 20 世纪 80 年代提出的一类迎风类格式。它是根据波传播方向的正负来对通量进行分裂, 针对分裂项的正、负采用前差、后差格式。构造过程与波的传播方向相一致。FVS 格式比较有代表性的为 Van Leer 格式[3]和 Steger-Warming 格式[4]。近年的研究表明, FVS 差分格式在捕捉边界层温度、速度梯度时会产生很大的耗散, 且在高超声速流动中尤其严重。与 FVS 相对应的, 另一类迎风格式为 FDS, 即矢量通量差分格式。这类迎风类格式由 Godunov 方法发展而来。比较著名的为 Roe 格式[5]。Roe 格式对激波和接触间断都有较高的分辨率, 但是其在声速点和接触间断处雅克比矩阵趋于 0, 违反熵条件, 会产生非物理解。同时 Roe 格式还有严重的稳定性问题。

为克服上述方法中出现的不足和利用上述方法中的优点, CFD 计算方法中产生了

另一类的迎风格式，即混合格式。根据混合方式的不同，目前比较主流的混合格式可以分为两类：旋转混合格式 (Rotated hybrid schemes) 和对流迎风分裂压力格式 (Convective Upwind and Split Pressure schemes) CUSP。旋转混合格式的构造方法为：根据流动特征，将网格旋转至流动特征方向和正交方向，并在特征方向和正交方向采用不同的应分格式。这类方法的优点为利用两个方向的不同格式的优点，并将其融合为一种方法。它的缺点为若两个方向采用不同的格式，计算量较大，且容易出现膨胀波，产生非物理解。这类格式如 Rotated Roe 's flux[6], Rotated hybrid RR flux[7] 和 Rotated hybrid RHL flux[7]。近年来，对流迎风分裂压力格式同样取得了很大的进展，并得到了广泛的应用。CUSP 格式可以分为两类：H-CUSP 和 E-CUSP。H-CUSP 为对流项中含有总焓项的混合格式，比如 Liou' s AUSM-Type[8-12] 格式和 Edwards' s LDF(Low Diffusion Flux)[13]。E-CUSP 为对流项中含有总能项的混合格式，比如 LDE(Low Diffusion E-CUSP) 格式 [14-16]。CUSP 格式具有 FVS 和 FDS 的共同优点，这源于其马赫数分裂项：在超声速流动区域，呈现 FVS 的特性，具有很高的稳定性；在亚声速流动区域，呈现 FDS 的特性，对接触间断和剪切层的捕捉有很高的精度。基于其构造方法，CUSP 也会产生紧靠激波后处和声速线处的振荡。CUSP 类格式引入了马赫数和压力修正函数来抑制振荡。因此，混合类差分格式在不断出现的问题中得到发展。

至此，需要注意一个问题：H-CUSP 和 E-CUSP 的差别在于对流项中是总焓项还是总能项，那么哪一种符合物理规律？宏观运动控制方程的导出来源于控制体思想并基于牛顿定律，压力可以看出流动的驱动力 (E-CUSP)，也可以看做是流体由于可压缩性而产生的流体的做功能力 (H-CUSP)。从这一方面讲，两类混合格式并无违背物理规律。因此，H-CUSP 和 E-CUSP 在高超声速气动热

模拟中会产生什么样的差异值得深入的研究。

本文所关注的另一个问题是 AUSM-type 格式的气动热预测中出现的问题。Men' shov[17] 等人采用数值和实验的方法研究了高速非平衡流动问题。结果显示：其所模拟的三种情况下的气动热数值结果均不符合标准的余弦变化趋势。这一结果与文献[18]的结果并不一致。AUSM-type 格式在高超声速气动热的模拟中与实验值很接近，并得到了广泛的应用。因此，有必要探究这一问题出现的原因。

第二部分给出本文所采用的数值方法。数值结果在第三部分给出。数值结果对比了不同格式的 Mach 数、压力的分裂的差别，并比较了壁面传热和沿驻点线的温度压力分布。第四部分给出研究的结论。

1 数值方法

1.1 数值离散方法

流动求解的轴对称控制方程为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{y} H = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{1}{y} H_v + W$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_{ns} \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ E_v \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho_1 u \\ \dots \\ \rho_{ns} u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \\ E_v u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho_1 v \\ \dots \\ \rho_{ns} v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \\ E_v v \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho_1 v \\ \dots \\ \rho_{ns} v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (E + p)v \\ E_v v \end{bmatrix},$$

$$E_v = \begin{bmatrix} \rho D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} \\ \dots \\ \rho D_{ns} \frac{\partial C_{ns}}{\partial x} \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x \\ q_{vx} \end{bmatrix}, F_v = \begin{bmatrix} \rho D_1 \frac{\partial C_1}{\partial y} \\ \dots \\ \rho D_{ns} \frac{\partial C_{ns}}{\partial y} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + q_y \\ q_{vy} \end{bmatrix},$$

$$H_v = \begin{bmatrix} \rho D_1 \frac{\partial C_1}{\partial y} \\ \dots \\ \rho D_{ns} \frac{\partial C_{ns}}{\partial y} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} - \tau_{\theta\theta} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + q_y \\ q_{vy} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dots \\ \dot{\omega}_{ns} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_v \end{bmatrix}$$

其中，ns 为混合气体中的组分个数； ρ, ρ_i, C_i, D_i 为混合气体密度及组分 i 的密度、质量分数和扩散系数； $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{\theta\theta}$ 为应力张量的各分量； $\dot{\omega}_i$ 为 i 组分的质量生成率， S_v 为振动源项。

化学反应考虑了五种组分 (ns=5)，即 O_2, N_2, O, N, NO ；化学反应模型和参数采用 Dunn&Kang 提供的参数。振动模型考虑 Park 双温模型。组分的热传导系数由 Eucken 半经验公式计算，混合气体的粘性系数、热传导系数由 Wilke 的半经验公式计算。

对流项分别采用 LDE、AUSMPW+ 和 LDF 格式进行数值模拟。

LDE 格式 (E-CUSP)：

$$E = E^c + E^p = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ Eu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ pu \end{bmatrix} = Mc \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ pcM \end{bmatrix}$$

$$= c_{1/2} \mu^+ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}_L + c_{1/2} \mu^- \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}_R + p_{1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mu^+ c_L + \mu^- c_R \end{bmatrix}$$

马赫数的分裂方式 μ^+, μ^- 和压力的表达式 $p_{1/2}$ 参考文献 [14-16]。

AUSMPW+ 格式 (H-CUSP)：

$$E = E^c + E^p = aM \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{1/2} \mu^+ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ H \end{bmatrix}_L$$

$$+ a_{1/2} \mu^- \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ H \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} 0 \\ p_L^+ p_L + p_R^- p_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

马赫数的分裂方式 μ^+, μ^- 和压力的分裂方式 p_L^+, p_R^- 参考文献 [8-12]。

LDF 格式 (H-CUSP)：

$$E = E^c + E^p = \rho a M \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \rho_L a_L \mu^+ \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{bmatrix}_L$$

$$+ \rho_R a_R \mu^- \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} 0 \\ p_L^+ p_L + p_R^- p_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

马赫数的分裂方式 μ^+, μ^- 和压力的分裂方式 p_L^+, p_R^- 参考文献 [13]。

LDE 格式和 LDF 格式所采用的马赫数和压力的分裂方式基本一致，不同之处为对流项中所含是总能还是总焓。LDF 和 AUSMPW+ 格式均属于 H-CUSP 类格式，但马赫数分裂和声速项的选择不同。

为提高计算的精度，采用 MUSCL 格式对流动原始变量进行重构。限制器采用 Van Albada 限制器。数值结果表明，Van Albada 显示其的耗散性小于 Minmod 限制器，但仍可以保证计算的稳定性。

为提高计算的速度，程序采用 LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Relaxation) 隐式格式对控制方程进行加速迭代收敛。LUSGS 隐式格式的时间精度只有一阶。然而已有的研究表明：在定常问题的计算中，物理量随时间的变化没有明显的物理意义，即使时间精度不高，也不会影响最终的结果。隐式方法的引入是计算不受 CFL < 1 稳定性条件的限制，流动可以达到稳定状态。

1.2 旋转格式的引入

对于守恒型 Euler 方程，将坐标旋转后的守恒量分解为两个方向：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$E_{1/2}(\vec{n}) = \alpha_1 E_{1/2}^1(\vec{n}_1) + \alpha_2 E_{1/2}^2(\vec{n}_2)$$

式中， \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 分别为流动特征方向及其垂直方向（如图 1）， $\vec{n}_{x1} = (n_x^1, n_y^1), \vec{n}_{x2} = (n_x^2, n_y^2)$ ；系数的定义为： $\alpha_1 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}, \alpha_2 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}$

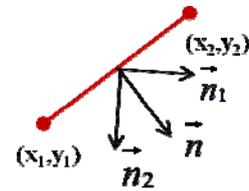


图 1 网格的垂直方向坐标分解

利用坐标旋转的相关特性，将 Euler 方程转换为下列形式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \{T^{-1}[n_x E_{1/2}^1(\vec{n}_1) - n_y F_{1/2}^1(\vec{n}_1)]\}}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \{T^{-1}[n_x E_{1/2}^2(\vec{n}_2)] - n_y F_{1/2}^2(\vec{n}_2)\}}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial \{T^{-1}[n_y E_{1/2}^1(\vec{n}_1) + n_x F_{1/2}^1(\vec{n}_1)]\}}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial \{T^{-1}[n_y E_{1/2}^1(\vec{n}_2) + n_x F_{1/2}^1(\vec{n}_2)]\}}{\partial y} = 0$$

流动的特征方向有多种选取方法，比如流动速度方向、压力梯度方向、速度梯度方向和速度差方向。文献[6]的研究结果表明，速度差方向更接近于物理流动规律。因此 \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 的方向如下：

$$\vec{n}_1 = \begin{cases} \vec{n}, & \Delta V_e \leq \varepsilon \\ \frac{\Delta u_{1/2} \vec{i} + \Delta v_{1/2} \vec{j}}{\Delta V_e}, & \Delta V_e > \varepsilon \end{cases}, \Delta V_e = \sqrt{\Delta u_{1/2}^2 + \Delta v_{1/2}^2}$$

$$\vec{n}_2 = \frac{(\vec{n}_1 \times \vec{n}) \times \vec{n}_1}{|(\vec{n}_1 \times \vec{n}) \times \vec{n}_1|}$$

$$= [-n_y^1(n_x^1 n_y - n_y^1 n_x), n_x^1(n_x^1 n_y - n_y^1 n_x)]$$

为了验证 AUSM-type 格式受网格不匹配因素的影响，本文在 \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 两个方向均采用 AUSMPW+格式。数值结果在 2.4 部分给出。

Table 1 来流参数

Case 1[19]	$U_\infty = 5.94 \text{ km/s}, p_\infty = 660 \text{ Pa}, T_\infty = 1140 \text{ K}, f_N = 4.6 \times 10^{-9}, f_O = 0.178, f_{NO} = 0.0293, f_{N_2} = 0.745, f_{O_2} = 0.047, T_w = 300 \text{ K}$
Case 2[17]	$U_\infty = 5.94 \text{ km/s}, \rho_\infty = 1.56 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3, T_\infty = 705 \text{ K}, f_N = 0, f_O = 0.171, f_{NO} = 0.032, f_{N_2} = 0.762, f_{O_2} = 0.035, T_w = 300 \text{ K}$
Case 3[17]	$U_\infty = 2160 \text{ m/s}, \rho_\infty = 1.9 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3, T_\infty = 86.74 \text{ K}, M_\infty = 11.58, f_N = 0, f_O = 0.027, f_{NO} = 0.076, f_{N_2} = 0.729, f_{O_2} = 0.168, T_w = 295.72 \text{ K}, \text{Re}_\infty = 4.92 \times 10^5$
Case 4[17]	$U_\infty = 5150 \text{ m/s}, \rho_\infty = 5.8 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3, T_\infty = 708 \text{ K}, M_\infty = 9.66, f_N = 0, f_O = 0.040, f_{NO} = 0.069, f_{N_2} = 0.733, f_{O_2} = 0.158, T_w = 300 \text{ K}, \text{Re}_\infty = 3.64 \times 10^4$

2 数值结果

2.1 数值方法验证

AUSM-type 混合格式在捕捉激波间断和模拟壁面传热有很高的精确性。为了解其对壁面热流模拟的特性，首先进行了数值方法的验证。图 2 给出了本文数值结果（红线）与文献[19]CFD 结果（黑线与蓝线）的对比。来流条件参见 Table1: Case1; 模型为半径为 0.045m 的柱。结果显示 AUSM-type 格式在激波间断捕捉方面有更大的优势。图 3 给出了钝头体数值模拟与实验[17]壁面热流有量纲值的对比。来流条件参见 Table1: Case2; 模型为半径为 0.02m 的球头。结果显示，AUSM-type 对壁面处温度梯度的捕捉有很高的精度。但在钝头体的滞止区域，壁面热流的捕捉不是光滑的，这可能与格式的特性有

关。

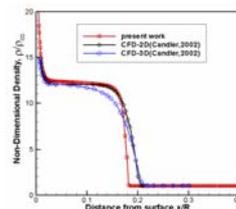


图 2 与 CFD[19]沿驻点线密度分布的对比

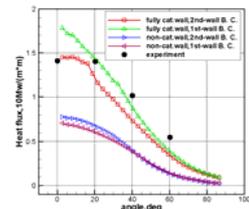


图 3 与实验[17]壁面传热结果的对比

2.2 马赫数和压力分裂对比

混合格式的特性在一定程度上取决于其马赫数分裂形式的构造，而 AUSM-type 格式、LDE 格式和 LDF 格式的马赫数分裂形式是基于 Van Leer 马赫数分裂的修正。马赫数分裂

的表达式直接影响在低速区域格式的特性。图 4 给出了 LDF 格式、AUSM-type 格式和 Van Leer 格式马赫数分裂的对比。其中 AUSM+ 格式马赫数分裂参数 β 取 1/8。结果显示，LDF 格式（红线）在马赫数为 0 时，马赫数正负项分裂项平滑过渡，而 AUSM-type 格式和 Van Leer 格式在马赫数为 0 时正负马赫数分裂存在间断。这样的特点将影响其在低速、弱间断和边界层内流动捕捉的特性。图 5 分别给出了 LDF 格式、AUSMPW+ 格式和 AUSM+ 格式压力项的对比。对于 AUSM+ 格式和 AUSMPW+ 格式压力分裂参数 α 取 3/16。结果显示，本文所采用的 LDF 格式、AUSM 格式和 LDE 格式压力分裂形式基本一致，对气动热的影响较小；而对数值结果产生较大影响的为马赫数分裂。在 2.3 部分给出此三类格式下沿壁面气动热的对比。

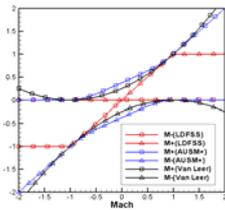


图 4 LDFSS（红线）、AUSM+（蓝线）和 Van Leer（黑线）格式马赫数分裂形式的对比

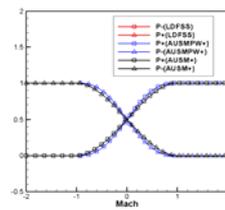


图 5 LDFSS（红线）、AUSMPW+（蓝线）和 AUSM+（黑线）格式压力分裂形式的对比

2.3 半球物面热流和沿驻点线温度、压力对比

图 6(a) 给出了轴对称球体的沿壁面热流分布，横坐标为起始于来流方向的角度，

纵坐标为有量纲热流值。球头半径为 3.8cm；来流条件参见 Table 1: Case 3。结果显示三类混合格式的数值结果都与实验值接近，但在驻点处，热流值的差别较大，并显示出了不同程度的振荡。这种振荡可能与在驻点处马赫数接近于 0 有关。另外 LDFSS 格式和 LDESS 格式采用了相同的声速形式，这或许会导致在壁面热流有相同的变化趋势。图 6(b)、图 6(c) 分别为相应的沿驻点线压力分布和温度分布。由此结果知，虽然压力的变化趋势基本一致，但在靠近滞止区域的物面处，三类格式有一定的差别。三类格式在温度间断面的捕捉上产生了明显的差别，AUSMPW+ 格式与 LDF 格式的温度间断面捕捉一致，但与 LDE 格式不同。其原因为 AUSMPW+ 和 LDFSS 格式属于 H-CUSP 类型，而 LDE 格式属于 E-CUSP 类型，温度间断面的即由此产生。

Case 3 来流条件为高马赫数、低总焓条件。此条件接近于目前使用的大多数激波风洞，其所对应的雷诺数也较高。下面再次考察三类数值格式在高马赫数、高总焓的特性。在这样的条件下，激波后的流动将发生热化学反应，来流条件如 Case4 所示。图 7(a)、(b) 分别给出了在 Case 4 来流条件下壁面热流、压力的分布。结果显示沿壁面压力分布的变化趋势几乎一致，但热流分布有一定的偏差，且在驻点附近热流分布同样存在振荡。对比 Case3 和 Case4 的壁面热流分布可知，三类混合格式对于边界层温度间断的捕捉均有很高的精度，但是在驻点附近的热流分布不光滑。图 7(c)、(d) 分别给出了高马赫数、高总焓条件下的沿驻点线的压力、温度分布。结果与高马赫数、低总焓条件下的结果基本一致。

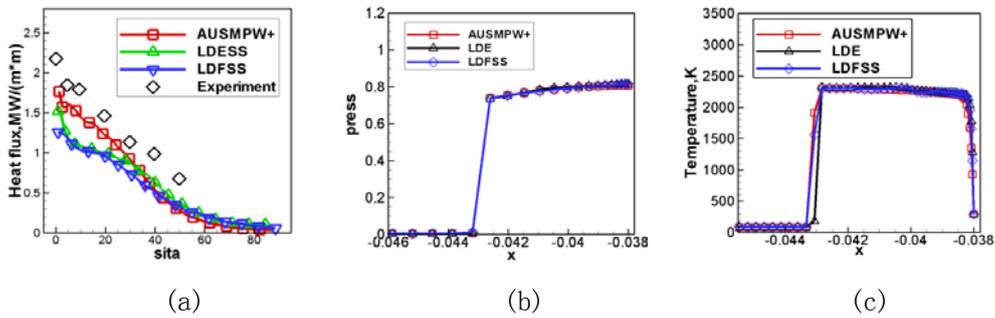


图6 AUSM-type (红线)、LDESS (黑线) 和 LDFSS (蓝线) 格式在 Case3 来流条件下的壁面传热(a)、沿驻点线压力(b)和温度(c)对比

总结来说，三类格式(AUSM-type、LDE和 LDFSS)采用了不同的马赫数分裂形式和不同的声速项，对激波间断和壁面热流都会有一定的影响，但这种影响较小。由于粘性耗散小，三类格式在驻点线附近均出现了不同程度的振荡。针对本文所关注的第二的问题，及混合格式所得出的沿壁面热流分布并非标准的余弦分布，其原因为数值格式的粘性较小引起。根据马赫数的分裂形式值，在马赫数为0 或为1时数值格式最为不稳定，而偏离余弦分布的区域恰为滞止点附近区域。因此，这种热流的非标准余弦分布形式或许是此类混合格式的一个特性。

2.4 旋转格式的影响

考虑到网格与流动特性的不匹配以及单一格式(FVS 或 FDS)在数值模拟中带来的问题，旋转混合格式得到了重视。这一部分将考察网格与流动特性不匹配对数值结果带来的影响。图8(a)、(b)和(c)分别给出了在 Case3 流动条件下壁面热流、沿驻点线压力和温度分布。结果显示，驻点线压力和温度分布几乎一致；这是由于驻点前缘激波接近于正激波，流动与网格匹配，格式的旋转并未起作用，壁面热流值也基本一致。而在

模型身部和后部，流动特性方向与网格有一定的夹角，即网格与流动特性不匹配，因此热流分布也将产生差异。若考虑数值计算中带来的误差，AUSM-type 格式受一定程度的网格不匹配因素影响。但是这样的影响不会对热流的计算结果产生大的偏差。

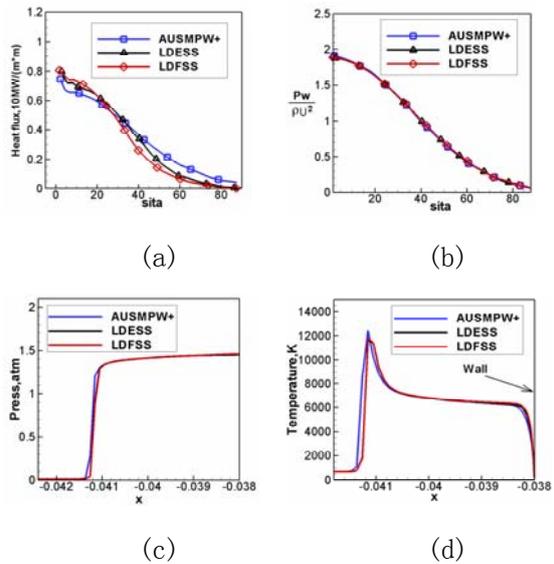


图7 AUSM-type (蓝线)、LDESS (黑线) 和 LDFSS (红线) 格式在 Case4 来流条件下的壁面传热(a)、沿驻点线压力(b)和温度(c)对比

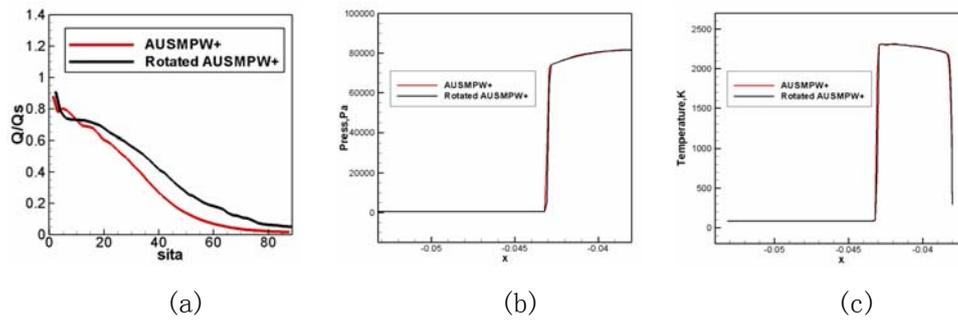


图 8 AUSMPW+ (红线) 与 Rotated AUSMPW+ (黑线) 格式壁面传热 (a)、沿驻点线压力 (b) 和温度分布 (c) 的对比: Case 3

3 结论

针对数值研究中出现的两个问题, 本文开展了以上的数值研究, 同时也考察了网格不匹配因素对混合格式在高超声速气动热模拟的影响。得到了以下结论:

- H-CUSP 和 E-CUSP 的不同会导致不同格式对激波间断的捕捉有一定的差别, 此差别在一定程度上还会受声速的选择的影响。不同的马赫数分裂形式将影响边界层内的温度梯度的捕捉, 且在钝头体头部滞止区域附近, 这种影响更大。
- 壁面热流分布的非标准余弦分布是由混合格式的粘性耗散小产生的, 此问题多发生于滞止点与声速线附近。边界条件可能也会对这一问题产生影响, 这一部分内容将作为下一步的研究内容。

需要指出的是, 本文所研究问题的差别较小, 但在不同条件下却表现出了一致的特性, 可以认为所研究的问题是此类格式的共性问题。两类数值格式产生差别的内在机理还需进一步的研究。

参考文献

[1] R.W. MacCormack, The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, AIAA 69-354, 1969
 [2] A. Jameson, W. Schmid and E. Turkel, Numerical simulations of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, AIAA, 81-1259, 1981.

[3] Van Leer, Flux splitting for Euler equations, Lecture Notes in Physics, 1982, 70

[4] J. L. Steger, R.F. Warming, Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamics equations with application to finite difference methods, Journal of Computational Physics, 1981, 40(2)

[5] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers parameter vectors and difference scheme, Journal of Computational Physics, 1981, 43:357-372

[6] Y. X. Ren, A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers, Computers and Fluids, vol. 32, pp. 1379-1403, 2003

[7] H. Nishikawa and K. Kitamura, Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers, Journal of Computational Physics, 2008, 227: 22.

[8] Liou, M.S. and C. J. S. Jr., A new flux splitting scheme, Journal of Computational Physics 107: 23-39, 1993.

[9] Liou, M.S., A sequel to AUSM: AUSM+, Journal of computational physics 129: 364-382, 1996.

[10] Kim, K. H., et al., An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions, Computers & Fluids 27(3): 311-346, 1998.

[11] K. H. Kim, C. Kim and Oh-Hyun Rho, Methods for the accurate computations of hypersonic flows I. AUSMPW+ scheme, Journal of Computational Physics, 174, 38-80, 2001

[12] Liou, M. S., A sequel to AUSM, Part II: AUSM+—up for all speeds, Journal of Computational Physics 214(137-170), 2006.

[13] Edwards, J. R., A low-diffusion flux-splitting schemes for Navier-Stokes calculations, Computers and Fluids 26(6): 635-659, 1997.

[14] G. C. Zha, Z. J. Hu, Calculation of transonic internal flows using an efficient high resolution upwind scheme, AIAA J. 2004, 42(2):205-14

[15] G. C. Zha, Y. Q. Shen, B. Y. Wang, An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme, Computers and Fluids 48(2011) 214-220.

[16] Y. Q. Shen, G. C. Zha, Low diffusion E-CUSP scheme

with implicit high order WENO scheme for preconditioned Navier-Stokes equations, Computers and Fluids 55(2012) 13-23

[17] I. S. Men' shov, Y. Nakamura, Numerical simulations and experimental comparisons for high-speed nonequilibrium air flows, Fluid Dynamics Research 27 (2000) 304-334.

[18] M. E. Tauber, A review of high-speed, convective, heat-transfer computation methods, NASA Technical Paper 2914, 1989.

[19] G. V. Candler, I. Nompelis, CFD validation for hypersonic flight: real gas flows, AIAA, 2002.