# 有二次涡的激波/边界层干扰流动的壁判据验证

刘升平, 申义庆, 高智

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室,北京海淀区 100190)

摘要 随着入射激波强度的增加,在平板激波/边界层干扰的流动中将出现二次涡现象。本文利用数值模拟与网格收敛性分析和壁判据方法对这一现象进行对比研究,结果表明:在足够细化的网格下,动量壁判据能很好的吻合,能量判据吻合不是太好。同时本文研究了壁判据代替网格收敛性分析的可靠性以及能量判据不能很好吻合的问题。

关键词 二次涡,壁判据,网格收敛性分析

# 引言

计算流体力学(CFD)数值模拟受很多因素的影响,使得 CFD 数值结果的可靠性研究成为一大难点。基于流体理论,高智<sup>[1]</sup>提出针对 CFD 仿真可信度问题的壁判据,用来验算 NS 方程组近壁数值解的计算精度和 CFD 近壁数值解的可信度。

平板激波/边界层干扰流动由于计算区域及 边界处理简单,而又包含了复杂的流动现象, 因而常用来检验各种理论及算法的有效性及精 度等<sup>[2-4]</sup>。在平板激波/边界层干扰流动中,随 着入射激波强度的增加,激波引起的分离区内 的流动将变得更加复杂,如分离区增大、分离 区内壁面摩阻出现起伏式的分布<sup>[2]</sup>以及在主涡 中出现二次涡等现象<sup>[3]</sup>。

文献[5,6]利用不同的数值算例验算了不可 压与可压流动下壁判据的适用情况以及文[7]中 的相关评述,在无分离的区域,壁判据符合较 好,而在分离涡区域则显示出不同的差异。本 文针对平板激波/边界层干扰流动中的二次涡现 象,首先进行网格收敛性分析,以得到网格无 关解,然后利用粗细两种网格验证壁判据,考 察壁判据在有二次涡的激波/边界层干扰流动中 的应用情况以及使用壁判据代替网格上收敛性 分析的可靠性。

#### 1 数值方案

#### 1.1 控制方程与离散格式

本文使用加权 TVD(WTVD)<sup>[3]</sup>求解二维 Navier-Stokes 方程组,时间离散分别在流向(x 方向)与法向(y 方向)使用显式与隐式格式,网 格在壁面作了加密变换。

# 1.2 计算条件与边界设置

文[3,9]中模拟并分析了来流马赫数与入射激波角度的变化对二次涡生成的影响: 当来流马赫数为 2.0,入射激波角度大于 34.047 度时,流场中开始出现二次涡。随来流马赫数与入射角度的增加,主涡与二次涡的涡高、涡长均会增加。

本文为了较好分析二次涡附近壁判据的吻合效果,选定计算区域 x: [0,0.32], y: [0,0.1215],平板前沿点与激波入射点分别位于(0.03,0),(0.03,0.1215)。

无量纲化参考长度 L=0.16:

来流马赫数 Ma = 2.0;

雷诺数  $Re = 2.96 \times 10^5$ ;

激波入射角  $\theta = 35^{\circ}$ ;

其余参数设置及边界处理方法参考文献[3.9]。

#### 2壁判据

# 2.1 可压缩流动的壁判据

对可压缩流体,文献[1,6]提出如下的壁面 判据:

1: 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{w} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2: 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

3: 
$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{yy} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

其中判据 1、2 为壁面动量判据(WMC), 判据 3 为壁面能量判据(WEC)。

# 2.2 壁判据无量纲化

本文使用文献[3]中的二维 NS 方程组所选 定的无量纲参数,对壁判据进行无量纲化,得 到无量纲形式的壁判据如下:

1: 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{w} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
  
2:  $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{w} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$   
3:  $\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\mu \Pr(\gamma - 1) M^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}$ 

其中,k 为热传导系数, $\gamma$  为气体比热比,Re 为雷诺数,Pr 为普朗特数。

#### 2.3 壁判据数值离散格式

坐标变换后的壁判据具有如下形式:

1: 
$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{w} = J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu J \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$
  
2:  $\operatorname{Re}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_{w} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu J \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$   
 $J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(kJ \frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{w} =$   
3:  $-\mu \operatorname{Pr}(\gamma - 1) \operatorname{M}^{2} \left(J \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2}$ 

其中,J为变换雅可比函数,由于本文只在 法向对壁面进行了加密变换,因此有  $J = \partial \eta / \partial y$ 。

在数据分析中,对壁面上的一阶导数采用 一阶偏心格式,对二阶导数采用二阶中心格 式。

# 3 计算结果及分析

#### 3.1 网格收敛性分析

图 1 给出了 256×128 网格下的流场分布,可以清晰地看出本文数值模拟很好的捕捉了流场中的各种波系结构及二次涡现象。

从流线图中可以发现,在此网格下,流场中还有更小的涡存在,这些小涡是不稳定的,如图 1(c)中二次涡右下角的小涡随着计算推进会发生变化,即在加密网格的计算中,流场整体上出现非定常性。尽管如此,本文计算中,壁面摩阻系数与压力系数均能较好收敛。

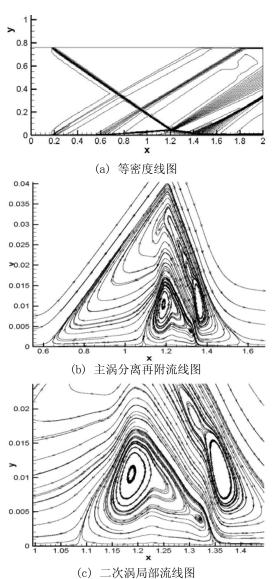


图 1 256×128 网格计算结果

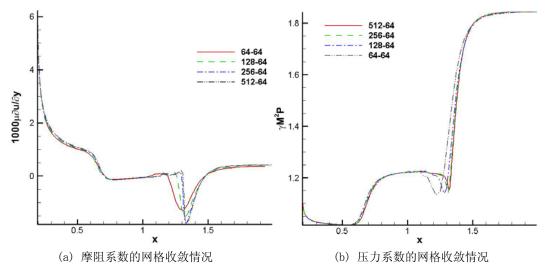


图 2 x 方向加密网格收敛性分析

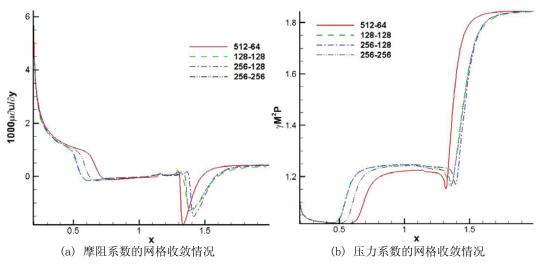


图 3 x、y 方向加密网格收敛性分析

图 2 和图 3 给出不同网格加密情况下所得的摩阻系数与压力系数分布。通过比较分析,可以认为本文数值解在网格 128×128 下基本达到了网格无关。

#### 3.2 壁判据验证

根据 3.1 节的分析,本节选用 64×64 与 128×128 两套网格验证壁判据。下文将动量判据 1、2分别记为 WMC-X 与 WMC-Y,能量判据 3记为 WEC。绝对误差为判据等式左右差的绝对值,相对误差为绝对误差与判据等式左边项的比值。

从图 4-9 中可以看出壁判据 1、2 在细网格下吻合的会更好,如在 128×128 下,壁判据

1、2 的相对误差大部分在 0.15 以下区域,而 64×64 网格下的相对误差大部分在 0.4 左右。 对判据 3,两种网格下的结果无明显差别,其 相对误差基本都在 0.45 附近。

比较图 5、7 与图 10,可以发现相对误差与绝对误差波动大的地方正好位于主涡与二次涡的分离、再附点附近。由图 10 可知,平板前沿点 0.1875 附近,主涡分离区 0.5 附近,主涡再附区 1.6 附近,二次涡分离区 1.35 附近,二次涡再附区 1.05 附近正好是判据 1、2 吻合相对较差的地方。

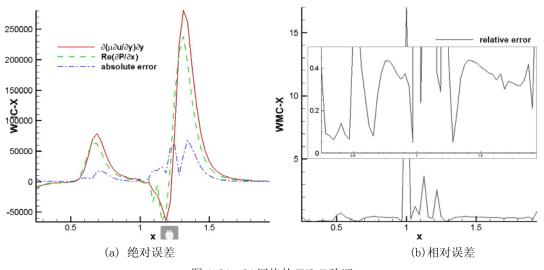
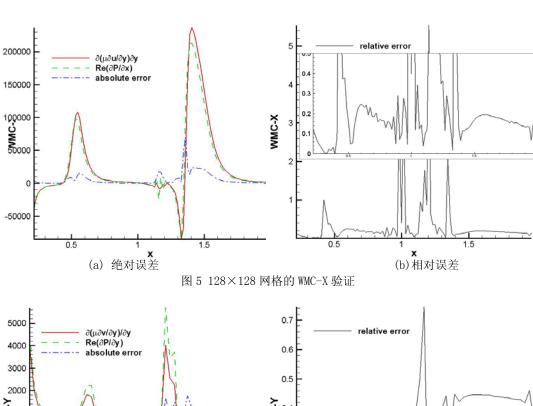
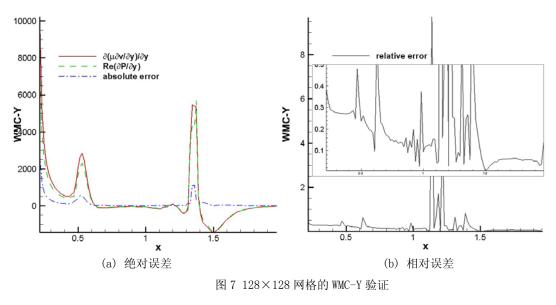
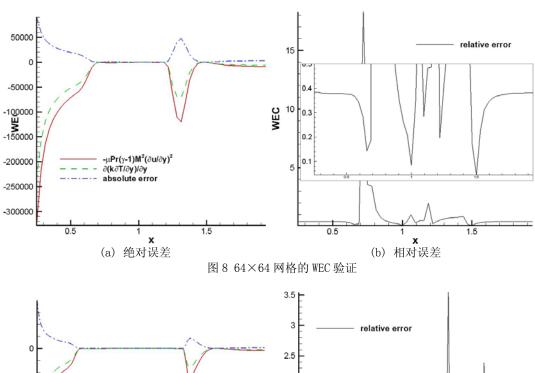


图 4 64×64 网格的 WMC-X 验证



| A000 | Re(aPr/ay) | absolute error | 0.6 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0





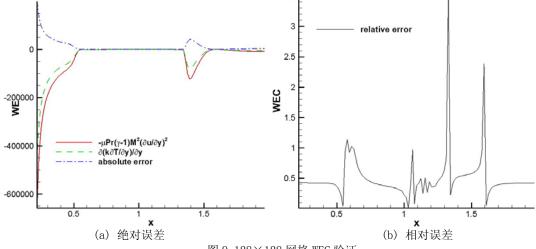


图 9 128×128 网格 WEC 验证

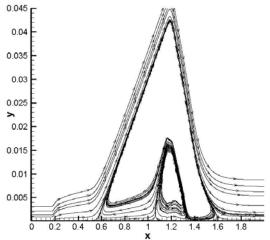


图 10 128×128 网格的边界层局部图

另外,对于判据 2(WMC-Y),由于一般壁面 边界处理会使用镜面反射等,即在壁面上使用  $\partial P/\partial v = 0$ 作为壁面边界条件。胡俊等<sup>[6]</sup>在使 用李新亮的 Open CFD 程序验算激波边界层的 壁判据时,为保证判据 2 的吻合,强制使用判 据 2 作为边界处理方式,本文在壁面使用插值 得到密度、温度项,再通过状态方程求解得到 压力项,两种方法都显示壁判据 2 在无分离的 区域吻合相对较好;但在分离、再附区都不能 很好的吻合。同时,本文与胡俊的计算结果都 表明, 判据 2 与判据 1 的量级相差很大。

通过本文的计算结果分析可知: 网格无关 解能较好的吻合壁判据,但由于分离、再附区 的流动的特殊性,能否直接使用壁判据来代替 网格收敛性分析还需要进一步的研究。

# 3.3 能量判据改进方案

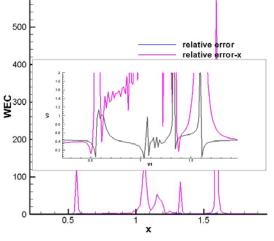
徐新文[10]在使用壁判据时,认为压力项在 分离再附区量级很大,会对判据结果产生明显 的影响,因此能量判据不应该忽略压力项的影 响,并以此提出可改进能量判据形式如下[10]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{w} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{2} + P \frac{\partial v}{\partial y}$$

图 12 给出本文使用 128×128 网格验证徐 新文的新能量判据(在之前命名规则后加 x 表示 徐新文的能量判据所得量)。从图中可知,尽管 压力项对结果的影响在分离、再附区影响很 大,但是新的能量判据吻合的结果反而没有原 来的好。对比本文的计算结果发现,原先的能 量判据中左右两边相差(绝对误差)基本稳定

在 1.4 倍左右, 因此可考虑加入这一因子的判 别条件(下式),图13给出其分析结果。

(a) WEC 与 WECX 的绝对误差



(b) WEC 与 WECX 的相对误差

图 12 128×128 网格的 WECX 验证

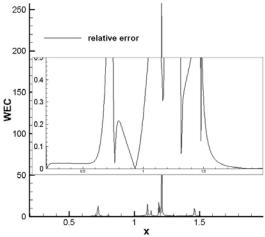


图 13 加入因子 1.4 后的能量判据相对误差

# 4 结 论

对于有二次涡的激波/边界层干扰流动,在 网格足够细化的情况下,壁判据 1、2 能较好的 吻合,仅分离、再附区存在一些差异。而壁判 据 3 则差别较大,加密网格后也无明显改善。 网格无关解能较好的吻合壁判据,但由于分 离、再附区的流动的特殊性,能否直接使用壁 判据来代替网格收敛性分析还需要进一步的研 究。

#### 参考文献

- 1 高智. 壁判据用于计算流体力学 (CFD) 可信度评估. 空气动力 学学报, 2008, 26(3): 378~383
- 2 MacCormack RW. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. In: AIAA  $13^{\rm th}$  Aerospace sciences meeting, Pasadena, calif, 1975– 1--20--22.

- 3 Yiqing Shen, Ruquan Wang, Hongzhi Liao. A new numerical study of the shock/boundary-layer interaction. International journal for numerical methods in fluids, 2000, 33:23-34
- 4 Liou M-S. A newton/upwind method and numerical study of schock wave/boundary-layer interactions. International journal for numerical methods in fluids, 1989, 9:153-163
- 5 Yu Yong. New CFD validation method with application to verify computations of near wall flows. Journal of Beijing institute of technology, 2010, 19(3):259-263
- 6 胡俊. 壁判据检验激波/层流边界层干扰流动的数值计算. 北京 理工大学学报, 2012, 32(8): 781~785
- 7 高智. "高智" 壁判据方法能替代通常的网格收敛分析方法 吗?. 2012 年度夏季学术研讨会文集,2012. 113~122
- 8 高智. 干扰剪切流动(ISF)和边界层流动及 ISF 理论在计算流 体力学(CFD)中的应用. 力学进展, 2008, 38(1): 114~115
- 9 申义庆,高智,王汝权.有二次涡的激波边界层干扰流动的 DPNS 和 NS 方程计算.空气动力学学报,2000,18(4):407~4
- 10 徐新文. 壁判据——一种 CFD 可信度评估方法的初步分析与应用研究. 北京理工大学,硕士论文,2012

# THE WALL-SURFACE CRITERIA WITH APPLICATION TO EVALUATING CREDIATABILITY OF SCHOCK-WAVE/BOUNDARY LAYER FLOW WITH SECONDARY VORTICES

LIU Shengping SHEN Yiqing GAO Zhi

( Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

**Abstract** The secondary vortices will be found in the flat plate shock/boundary layer interactions with the strength of shock wave increased. In this paper, the wall-surface criteria and grid convergence analysis are used to study these phenomena. It is shown that numerical results with fine enough mesh can satisfy the wall-surface momentum criteria well, but do not satisfy the energy criteria. How to improve WEC is also discussed

Key words secondary vortices; wall-surface criteria; grid convergence analysis