

# 材料的应力应变曲綫对于塑性平面 应力問題的解的影响\*

李 敏 華

(中國科学院力学研究所)

## 提 要

本文首先將以前所得到的关于两个軸对称塑性平面应力問題(薄圓环和旋轉盤)的有关方程和計算結果作了一个簡單的敘述。这些計算結果是根据两种不同硬化特性的材料和一种理想塑性材料的应力应变曲綫在不同載荷下計算得到的。这些結果指出这三种不同材料的应力应变曲綫和載荷对于这两个問題的主应力比值和比例应变<sup>1)</sup>的影响很小,而对于比例应力<sup>1)</sup>的影响則很大。之后,分析了二維的塑性平面应力問題的方程;这些方程考慮了大应变,但不包括体積力(body force)。分析这些方程中的包括材料应力应变曲綫項和載荷参数項的結果,認為假若在边界上的主应力的比值和比例应变不变,則材料的应力应变曲綫和載荷对于主应力比值和比例应变的分布的影响可能不大,而对于比例应力的影响則很大。这种边界条件在实际問題中的普通加载下,滿足的可能性是很大的。薄圓环和旋轉盤的边界条件及所得的結果和这分析的結果是完全一致的。从这些結果并可提出一个簡單而相当准确的近似解。最后并將本文所得的結果和依留辛(Ильюшин)的理論——关于小应变下三維問題形变理論的应用条件——作了比較。

## 1. 引 言

設計受有高应力的机械零件和結構时,为了比較准确的估計安全因素,需要了解塑性变形状态下应力和应变的分布。由于在塑性区內的非線性的应力应变的关系,求塑性的应力和应变的解要比彈性的困难得多。在許多数学力学的塑性理論中,漢蓋-納达依(Hencky-Nadai)的形变理論<sup>[1]</sup>是其中最簡單的一个用來解塑性大形变問題。但是这一理論是將米塞斯(von Mises)的理論推廣到硬化材料并在“加载过程物体内部各点的应力分量成比例的增加”的条件下得到的。依留辛(Ильюшин)<sup>[2,3]</sup>、布拉格(Prager)<sup>[4]</sup>

\* 本文中大部分材料曾在第九屆國際力学会議中宣讀。

1) 比例应变和比例应力是分別代表应变和应力被它們的相对应的最大值除。

和掘勒克 (Drucker)<sup>[6]</sup> 亦都將這條件或和這條件有關的部分提出討論。同時，由於塑性區的非線性的應力應變關係，對於某一材料的某一零件在某一載荷下的應力分布和應變分布，一般的來講，是不和另一材料在另一載荷下的應力分布和應變分布成比例的。這遠沒有像在彈性區內那樣簡便，可以利用一已知的結果成比例地得到另一結果。從前面所提的這些，可以看出，研究在什麼情況下形變理論可以應用以及尋找一組問題的解的一般性的結果是非常重要的。利用這一般性的結果，就有可能得到簡單而相當準確的近似解。本文是從事對於塑性平面應力問題的這方面的工作。

在塑性平面應力問題的工作方面，納達依和唐納爾 (Nadai 和 Donnell)<sup>[6,7]</sup> 在 1929 年得到理想塑性材料的薄圓環和旋轉盤的解。格來才爾 (Gleyzal)<sup>[8]</sup> (1948) 以及密林生和曼生 (Millenson 和 Manson) (1948 及 1952)<sup>[9]</sup> 用逐次接近法得到圓形薄膜和旋轉盤在硬化區的應力和應變的分布，他們都採用了小應變概念。斯多威爾 (Stowell)<sup>[10]</sup> 給了硬化材料的圓孔薄板受單向拉力的近似解。此外尚有很多其他的理想塑性材料的平面應力問題的解或應力分布。1950 年作者得到了一組硬化材料的軸對稱的平面應力問題的解<sup>[11,11]</sup>，它包括旋轉盤、薄圓環和受壓力的圓形薄膜。考慮大應變概念，即用瞬時尺寸。由於所選擇的參數和引進的一個任意常數使解法簡化，避免了逐次接近法，解答可直接從數值積分求得。從所計算的理想塑性材料和兩種不同硬化特性的材料在不同載荷下的結果看出：對於這幾個問題，這些材料的  $\tau(\gamma)$  曲線和載荷對於主應力的比值的分布和比例應變的分布的影響很小，而對於比例應力的影響則大。這些結果不但證明形變理論可以應用在這兩種材料的這些問題上，並且指示了有可能得到一般性的結果，因為理想塑性材料以及所選擇的兩種材料的硬化特性都很不相近。因此將薄圓環<sup>[12]</sup> (1951) 和旋轉盤<sup>[13]</sup> (1951) 的解分別部分的線性化，而證明了上述的結論適合於這兩個問題的一般的工程材料。

本文的目的是要解釋為什麼得到這樣的結果，並且要分析在二維的平面應力問題中是否有得到這種結果的可能。首先將參考文獻 [11]—[13] 中有關的方程以及結果作一簡單的敘述並加以解釋，然後給出用主應力和主應變表示的二維的平面應力問題的平衡方程（考慮瞬時尺寸，但不包括體積力）。並將平衡方程寫成用主應力比值參數  $a$ ，八面體面的剪應力和剪應變  $\tau$  和  $\gamma$ ，來表示的形式。其中特別提出討論了和材料的  $\tau(\gamma)$  曲線有關的部分，並解釋了材料的  $\tau(\gamma)$  曲線對主應力比值、比例應變和比例應力的影響。根據所得的結果，提出了一個簡單而相當準確的近似解。最後並將本

1) 作者已綜合參考文獻 [11]、[12]、[13]、[14] 及其他的一些材料，寫成“硬化材料的軸對稱塑性平面應力問題”的專刊，不久即將發表。

文所得的结果和依留辛关于小形变下形变理論应用于三維問題的条件的理論作了比較。

## 2. 符号

<i>a</i> 圆孔的半徑;	<i>b</i> 外徑;
<i>h</i> 瞬时厚度;	<i>h<sub>i</sub></i> 初始厚度;
<i>k</i> 任意的未知常数;	<i>r</i> 径向坐标;
<i>r/a, r/b</i> 比例半徑;	<i>s</i> 弧長;
<i>u</i> 径向位移;	<i>α</i> 主应力比值参数或主应变比值参数;
<i>γ</i> 八面体面剪应变;	<i>ε</i> 对数应变,采用瞬时尺寸;
<i>γ/γ<sub>0</sub></i> 比例应变;	<i>θ</i> 角坐标;
<i>σ</i> 法应力,單位瞬时面積上的法線方向的力;	<i>σ/σ<sub>0</sub></i> 比例应力;
下角註标:	<i>τ</i> 八面体面剪应力;
<i>b</i> 在半徑 <i>b</i> 处;	0 在实心体的圆心或在有孔体的孔的内徑;
1, 2, 3 一般性的主軸方向;	
<i>r, θ, z</i> 圆柱坐标的主軸方向.	

## 3. 塑性形变下的平面应力問題的基本方程

根据漢蓋-納达依的形变理論<sup>[1]</sup>,塑性变形下的平面应力問題 ( $σ_3=0$ ) 的应力应变方程为:

$$ε_1 + ε_2 + ε_3 = 0; \quad (1)$$

$$ε_1 = \frac{1}{3} \frac{γ}{τ} \left( σ_1 - \frac{1}{2} σ_2 \right), \quad (2a)$$

$$ε_2 = \frac{1}{3} \frac{γ}{τ} \left( σ_2 - \frac{1}{2} σ_1 \right), \quad (2b)$$

$$ε_3 = \frac{1}{3} \frac{γ}{τ} \left[ -\frac{1}{2} (σ_1 + σ_2) \right] = - (ε_1 + ε_2); \quad (2c)$$

$$τ = \frac{\sqrt{2}}{3} (σ_1^2 - σ_1 σ_2 + σ_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3a)$$

$$γ = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} (ε_1^2 + ε_1 ε_2 + ε_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad (3b)$$

$$\tau = \tau(\gamma). \quad (4)$$

方程(2a), (2b), (2c)中的常数  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$  分别由方程(1)和方程(3a), (3b)决定的。因此, 方程(2a), (2b)和(2c)以及(3a)和(3b)中各有一个不独立的方程。方程(4)中,  $\tau$  和  $\gamma$  的关系是材料的从实验得到的关系。

本文考虑硬化区的塑性变形问题, 因此采用大应变概念, 也就是考虑微小体积极元素的瞬时尺寸。在大应变概念下, 应力等于力被瞬时面積除, 应变则按照下列方程的定义:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

上式中  $l$  是元素沿着任一主轴方向的瞬时长度, 它的原有长度为  $l_0$ 。在简单加载的情况下, 应变可从初始的和最后的状态决定, 因此

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{dl}{l}, \quad \text{即} \\ \varepsilon &= \ln \frac{l}{l_0} \quad \text{或} \quad e^\varepsilon = \frac{l}{l_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

对于平面应力问题, 汉盖-纳达依的形变理论的加载函数[方程(3a)]如用主应力表示, 则为一椭圆方程。为方便起见, 用下列的椭圆的参数方程<sup>1)</sup>表示应力

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha), \quad (6a)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha), \quad (6b)$$

方程(6a)及(6b)满足方程(3a)的关系。从这两个方程和方程(2a), (2b)得到应变的参数方程如下:

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha), \quad (7a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha). \quad (7b)$$

方程(7a)及(7b)同时满足方程(3b)的关系。

引用了方程(6a), (6b), (7a)和(7b), 可使问题中的六个未知数  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\tau$  和  $\gamma$  减少到三个未知数  $\alpha$ ,  $\gamma$  和  $\tau$ 。这样, 不但可使问题的解法简化很多, 并且所用的未知变数对于所考虑的问题都有特殊的物理意义。参变数  $\gamma$  和  $\tau$  各为八面体面的剪应变和剪应力, 根据汉盖-纳达依的形变理论,  $\gamma$  直接指示了在某载荷下物体内某一点的

1) 对于理想塑性材料的薄圆环问题, 纳达依用了方程(6a)和(6b)的变换。在理想塑性问题中,  $\tau$  是一个已知常数, 並且可以不考虑应变。本文所考虑的是硬化材料, 因此  $\tau$  是  $\gamma$  的函数。在物体内的不同点和在不同截面上, 方程(6a)和(6b)中的  $\tau$  和方程(7a)和(7b)中的  $\gamma$  都是不同的。

塑性变形的程度，而  $\tau$  表示了某載荷下物体内某一点的材料的加载函数 (loading function 或称 yielding function)。參变数  $\alpha$  是一个指示主应变比值和主应力比值的参数，这从下列的方程可以顯明地看出：

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha}{\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha}, \quad (8a)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha}. \quad (8b)$$

物体内任意一点如主軸方向不变，在加载过程中假如  $\alpha$  保持不变，则該点的主应变及主应力的比值也保持不变。因此，在不同載荷下的解中所得到的物体内各点的  $\alpha$  的数值，指示了形变理論对于該問題的能否应用。

#### 4. 薄圓环和旋轉盤

在討論二維的塑性平面应力問題以前，首先將軸对称平面应力問題中的薄圓环和旋轉盤中有关的方程和計算結果作一簡單的介紹。圖1(a)和(b)分別表示在形变状态下的薄圓环和在圓环半徑  $(r+u)$  处的一微小元素。这个微小元素是用  $\Delta\theta$  和  $\Delta(r+u)$  來描寫的，它的瞬时厚度及所受的应力亦表示在圖中。在未受形变的状态下，这元素在半徑  $r$  处，用  $\Delta\theta$  和  $\Delta r$  來描寫。

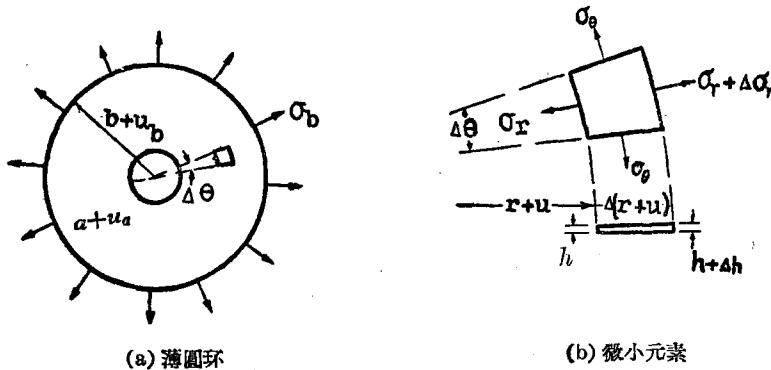


圖 1. 在变形状态下的受有应力的薄圓环及其元素

由于軸对称，这問題的方程可用極坐标  $r$  和  $\theta$  來表示，并且主应力和主应变方向都和徑向  $r$  和切向  $\theta$  重合。方程 (1) 到 (7b) 中的  $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  可分別用  $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r$  和  $\varepsilon_\theta$  替代。

从圖 1 和方程 (5) 可以得到下列的元素的应变和位移的关系：

$$e^{\varepsilon_r} = \frac{d(r+u)}{dr}, \quad (9a)$$

$$e^{\varepsilon_\theta} = \frac{r+u}{r}, \quad (9b)$$

$$e^{\varepsilon_\theta} = e^{-(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)} = \frac{h}{h_i}. \quad (9c)$$

圖 1(b) 所示的元素的徑向的平衡方程为:

$$(r+u) \frac{d\sigma_r h}{d(r+u)} = (\sigma_\theta - \sigma_r) h. \quad (10)$$

用方程 (9a), (9b) 和 (9c) 的关系消去上式中的  $u$  和  $h$ , 则平衡方程成为

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_r r \frac{d(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{dr} = (\sigma_\theta - \sigma_r) e^{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}. \quad (11a)$$

协调方程可从方程 (9a) 和 (9b) 得到, 即

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = e^{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)} - 1. \quad (11b)$$

从方程 (11a) 可以看出, 当应用大应变概念(即考虑瞬时尺寸)时, 平衡方程不独包括应力, 并且包括应变; 协调方程则只包括应变。因此, 当应用大应变概念时, 在解答中, 应变分布较应力分布更起决定性的作用。

将方程 (6a), (6b), (7a) 和 (7b) 代入方程 (11a) 和 (11b)。描写問題的方程简化为下列的两个方程和一从实验决定的材料的  $\tau(\gamma)$  的关系:

$$Ar \frac{d\alpha}{dr} + B \frac{r}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} = C, \quad Dr \frac{d\alpha}{dr} + E \frac{r}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} = F; \quad (12)$$

$$\tau = \tau(\gamma), \quad (4)$$

式中系数函数  $A, C, D, E$  和  $F$  是  $\alpha$  和  $\gamma$  的函数(詳細函数可参考文献 [11]); 系数  $B$  是  $\alpha, \gamma$  和  $\tau$  的函数,

$$B = (\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha) \left( \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \frac{\gamma \sin \alpha}{\sqrt{2}} \right). \quad (12a)$$

这里应当指出, 对于薄圆环問題, 因为没有体積力, 在平衡方程和协调方程中[方程(12)], 只有在系数函数  $B$  中的一项包括变数  $\tau$ , 并且  $\tau$  是和  $\gamma$  组成  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}$ , 亦即  $\frac{d \ln \tau}{d \ln \gamma}$ . 在有体積力的問題中, 如旋转盤, 则除了  $B$  中的  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}$  项外, 另有包括体積力的一项也还含有  $\tau$ , 但可用适当的近似关系代入。

从方程 (12) 解  $r \frac{d\alpha}{dr}$  和  $\frac{r}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr}$ , 并以  $\frac{r}{a}$  替代  $r$ , 得到

$$\left( \frac{r}{a} \right) \frac{d\alpha}{d\left( \frac{r}{a} \right)} = \frac{CE - FB}{AE - DB}, \quad \left( \frac{r}{a} \right) \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\left( \frac{r}{a} \right)} = \frac{FA - CD}{AE - DB}. \quad (13)$$

薄圓環問題的解可以直接从对于方程(13)的數值積分求得。对于旋轉盤，平衡方程和協調方程以及系数函数  $A, B, D, E$  和  $F$  与薄圓環問題的完全相同，除了用  $b$  代替  $a$  外，只有系数函数  $C$  多了包括轉速的一項。因此，为了避免逐次接進法引進了一个未知的任意常数，这常数在計算过程中可从边界条件决定<sup>[11]</sup>。

以上是根据形变理論以及材料的均匀性和連續性的假定下的准确解。以下是將解中有关材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫和載荷的部分綫性化，將系数函数  $A, B, C, D, E$  和  $F$  的  $\alpha$  和  $\gamma$  的函数代入方程(13)，并忽略微量的高次項，則方程(13)的等号右边除了  $\alpha$  的三角函数外还包括  $\tau$  和  $\gamma$  的項，并且只有一种組合項，即

$$\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{J} = \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0, \quad (14)$$

式中  $\gamma_0$  是薄圓環或旋轉盤中在某一載荷下的最大  $\gamma$  值； $J$  为  $\alpha$  的三角函数

$$J = \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha,$$

而

$$\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{d \ln \tau}{d \ln \gamma},$$

即材料的  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲綫在  $\gamma$  处的切綫斜度。对于一般的材料，它的  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲綫相当接近于直綫，因此薄圓環或旋轉盤中在某一載荷下的最小  $\gamma$  值， $\gamma_0$ ，到最大  $\gamma$  值， $\gamma_0$ ，的一段  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲綫是非常接近于直綫的。如用一直綫來近似这段曲綫，并用它的斜度  $m$  來代表这載荷下的  $\frac{d \ln \tau}{d \ln \gamma}$ ，則这种近似所引起的誤差是非常小的。在另一載荷下，则用另一直綫近似另一段  $\gamma_0$  到  $\gamma_0$  的  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲綫，得到另一个  $m$  值。因此，对于同一材料，在不同的載荷下，即不同的  $\gamma_0$  值， $m$  值是不同的；而在同一載荷下，物体内各点的  $m$  是相同的。因此組合項  $\left( \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{J} \right)$  中在求解时（即求在某載荷下的  $\alpha$ ， $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  和  $\frac{r}{a}$  的关系）， $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}$  可用一常数  $m$  替代。組合項中的  $\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{J} = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0$  的數值，一般講來，比較方程中的其他項為小，而  $\left( \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0$  的數值較方程中的其他項則更小。并且  $\left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)$  只包括  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$ ，而材料和荷載对它們的數值的影响不大<sup>[11]</sup>，因此可以用一常数  $c$  来替代  $\left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)$  而不引起很大的誤差。引用了这些近似以后，得到薄圓環和旋轉盤的部分綫性化解。薄圓環問題的方程，即方程(13)成为

$$\frac{d\alpha}{d \ln \left( \frac{r}{a} \right)} = \left( \frac{2H}{L} \right) \frac{1 + \sqrt{3} \left( \frac{J}{L} \right) (m - c\gamma_0)}{1 + \left( \frac{J}{L} \right)^2 (m - c\gamma_0)}, \quad (15a)$$

$$\frac{d \ln \gamma}{d \ln \left(\frac{r}{a}\right)} = \left(-\frac{8H^2}{L^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{J}{L}\right)^2 (m - c_1 \gamma_0)}; \quad (15b)$$

旋转盤問題的方程則成為

$$\frac{d\alpha}{d\left(\frac{r}{a}\right)} = \frac{2H}{L} \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{L} J (m - c_1 \gamma_0) - \frac{K_1}{2H} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \left[1 - 2\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0}\right)(m - c_1 \gamma_0)\right]^{-1}}{\left[1 + \left(\frac{J}{L}\right)^2 (m - c_1 \gamma_0)\right] \left(\frac{r}{k}\right)}, \quad (16a)$$

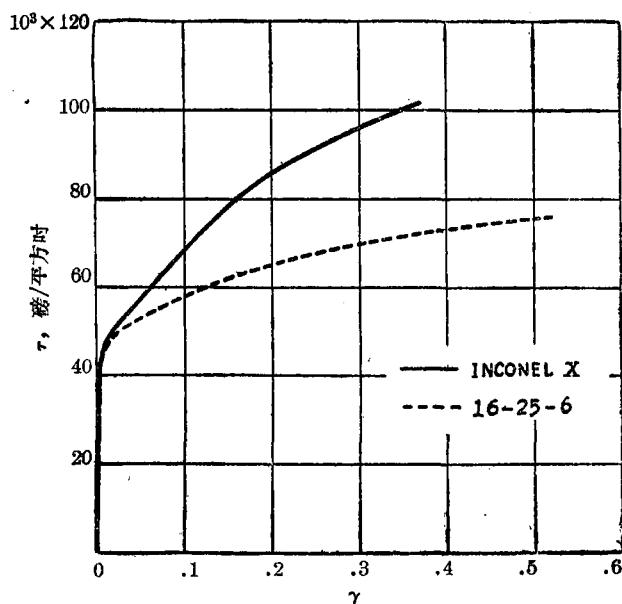
$$\frac{d\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)}{d\left(\frac{r}{k}\right)} = -\frac{8H^2}{L^2} \frac{\left\{1 - \frac{JK_1}{8H^2} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \left[1 - 2\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0}\right)(m - c_1 \gamma_0)\right]^{-1}\right\} \frac{\gamma}{\gamma_0}}{\left[1 + \left(\frac{J}{L}\right)^2 (m - c_1 \gamma_0)\right] \left(\frac{r}{k}\right)}; \quad (16b)$$

式中

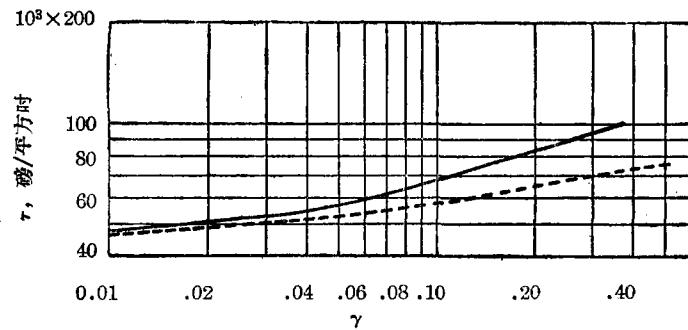
$$H = \cos \alpha, \quad L = \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha.$$

根据綫性化前的方程即方程 (13) 計算了三种材料的薄圓環和旋轉盤的解。这三种材料是高温金屬 Inconel X, 16-25-6 及理想塑性材料。材料 Inconel X 和 16-25-6 的  $\tau$ - $\gamma$  曲線和  $\ln \tau$ - $\ln \gamma$  曲線分別表示在圖 2(a) 和 2(b)。選擇這些材料是因为它們有很不相同的硬化特性，并且从圖 2(b) 可以看出，它們的应力并不是应变的指數函數<sup>[8]</sup>。所以根据這些材料的应力应变关系所計算的結果是比較帶有一般性的。圖 3(a), (b); 圖 4(a), (b); 圖 5(a), (b) 分別表示了計算所得的薄圓環和旋轉盤的  $\frac{\sigma_r}{\sigma_e}$ ,  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  及  $\frac{\sigma_e}{(\sigma_e)_0}$ ,  $\frac{\sigma_r}{(\sigma_r)_0}$  沿着半徑分布的曲線。在每一圖中，包括了理想塑性材料的一條曲線和 Inconel X 及 16-25-6 在不同載荷下的几條曲線。从这些圖中可以看出：不同材料在不同載荷下沿着比例半徑的  $\frac{\sigma_r}{\sigma_e}$  和  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  的分布曲線都相当接近，而不同材料在不同載荷下沿着比例半徑的  $\frac{\sigma_e}{(\sigma_e)_0}$  的分布曲線則相當分散。这些結果不但說明了形變理論可以应用在 Inconel X 和 16-25-6 的薄圓環和旋轉盤上，并且指示了这两种材料和理想塑性材料的  $\tau(\gamma)$  曲線对这两个問題的主应力比值  $\frac{\sigma_r}{\sigma_e}$ ，和比例应变  $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}, \frac{\varepsilon_e}{(\varepsilon_e)_0}\right)$  及  $\left(\frac{\varepsilon_r}{(\varepsilon_r)_0}\right)$  的影响很小，但对于比例应力  $\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\sigma_e}{(\sigma_e)_0}\right)$  和  $\left(\frac{\sigma_r}{(\sigma_r)_0}\right)$  的影响則很大。

在参考文献 [12] 和 [13] 中，將以上的結果和部分綫性化的解，即方程 (15a) 和 (15b) 及 (16a) 和 (16b)，作了比較，二者的結果非常接近。这說明了用  $(m - c_1 \gamma_0)$  近似  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J} \frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \gamma_0$  所引起的誤差是非常小的。关于旋轉盤的部分綫性化解所得結果的一部分，在文献 [13] 中并和实验数据比較，相当接近。这些結果因和本文的討論的关系較小，不加重述。



(a)



(b) 对数軸

圖 2. 大应变(瞬时尺寸)的八面体面的剪应力和八面体面的剪应变的曲线

## 5. 塑性平面应力問題的平衡方程

本文所討論的塑性平面应力問題是考慮大应变但不包括体積力，并且主应力的方向在加載過程保持不变或近乎不变。关于这一点以后当再討論。

前面已經提过，用了方程 (6a), (6b), (7a) 和 (7b)，不但能使未知变数减少，并且新引進的变数都有特殊意义。如果要將这些方程应用到二維的塑性平面应力問題中，则它們的方程必須用主应力和主应变來表示。因此需考慮沿着主应力軌線(stress trajectories) 所取的微小正交曲綫元素(orthogonal curvilinear element) 較为适合。

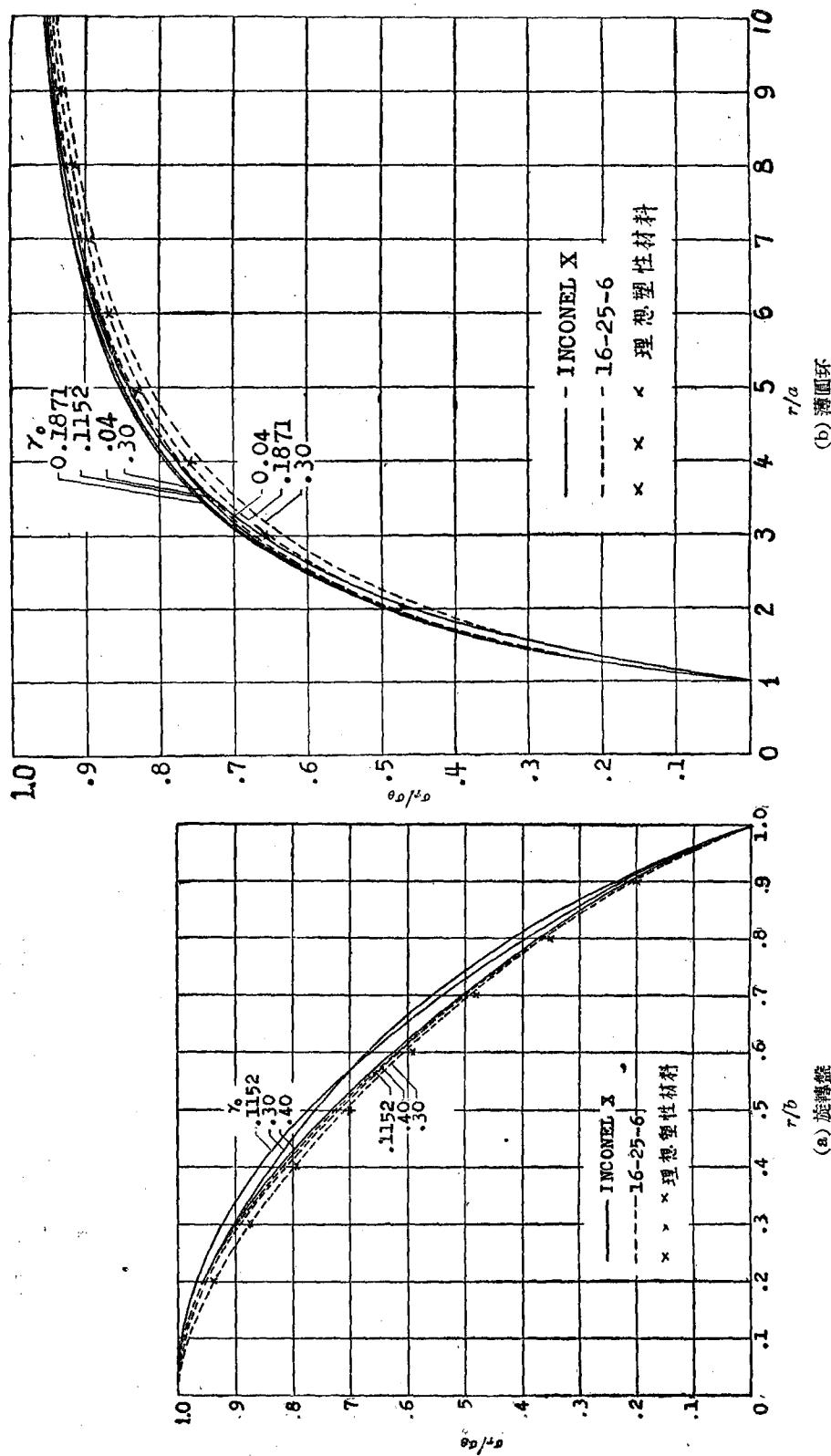


图3. 沿着比例半径的主应力之比,  $\sigma_r/\sigma_y$ , 的变化

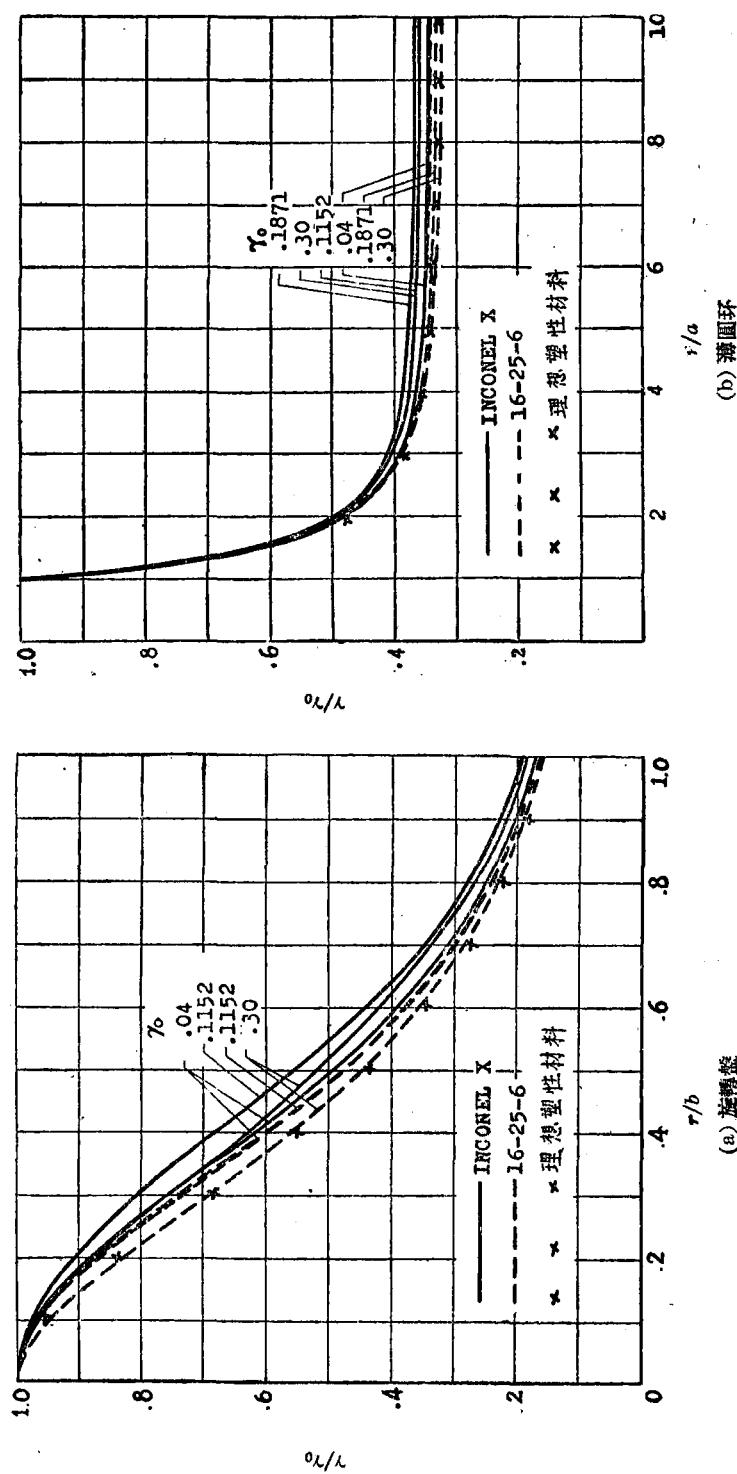


圖4. 沿着半徑的比例應變  $\gamma/\gamma_0$  的變化

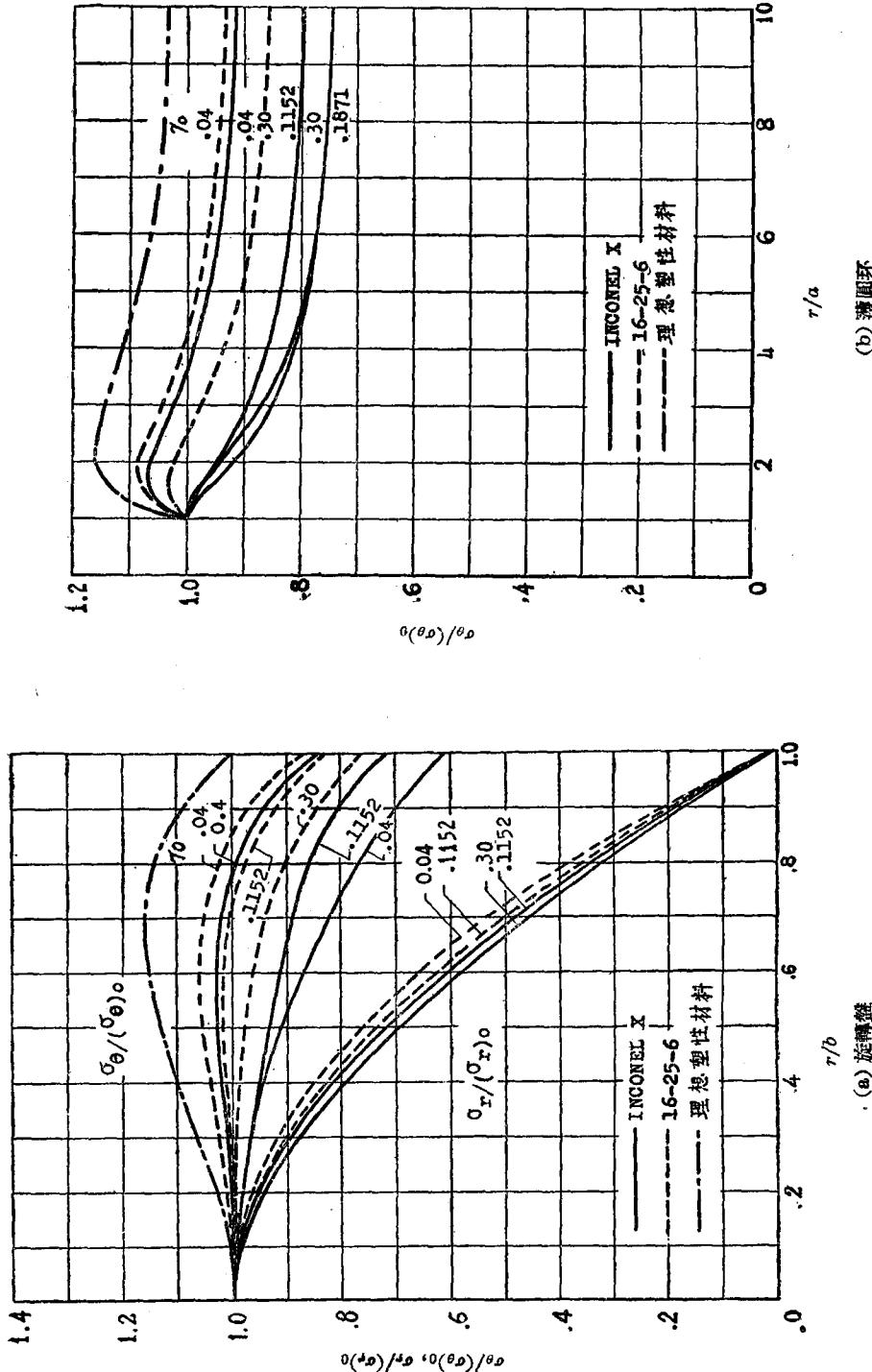


圖 5. 沿着比例半徑的比例應力  $\sigma_0/(\sigma_0)_0$  的變化

(b) 滾圓環

(a) 旋轉盤

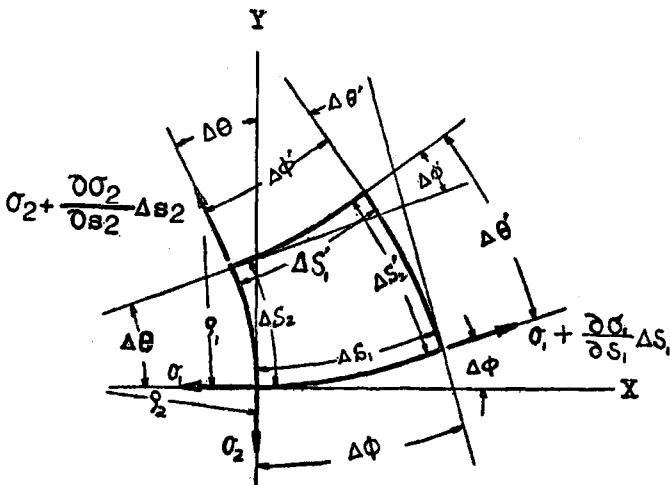


圖 6. 变形前的正交曲綫微小元素

圖 6 表示該元素在变形前的情况。在变形状态，曲率半径 (radii of curvature)  $\rho_1$  和  $\rho_2$  分别改变为  $\rho_1+u_1$  和  $\rho_2+u_2$ ，元素的厚度以及元素边的弧長亦都相应的改变。考慮元素的瞬时尺寸和忽略三級及三級以上的微量后，得到下列的平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} - \sigma_1 \frac{\partial(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\partial s_1} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\rho_2} e^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} = 0, \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} - \sigma_2 \frac{\partial(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\partial s_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{\rho_1} e^{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = 0. \quad (17b)$$

从方程 (17a) 和 (17b) 可以看出，考慮大形变时的平衡方程，不但包括应力，并且包括应变。协调方程則只包括应变。因此对于物体在大形变时的解，应变較应力起更大的决定性作用。在方程 (17a) 中，除了  $\partial\sigma_1/\partial s_1$  以外，所有項 [ 或是方程 (17b) 中除了  $\partial\sigma_2/\partial s_2$  以外的所有項 ] 都只包括  $\sigma$  的一次項。因此，当平衡方程中的变数  $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  用方程 (6a), (6b), (7a) 和 (7b) 变換为变数  $\alpha, \gamma$  和  $\tau$  后，所有的項除了包括  $\frac{d\tau}{d\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial s_1}$  和  $\frac{d\tau}{d\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial s_2}$  項外，都包括  $\tau$  的一次項。再將平衡方程的两边除以  $\tau$ ，則最后的形式用  $\alpha, \gamma$ ，和  $\tau$  来表示的平衡方程，各只有一項包括  $\tau$ ，并且都和  $\gamma$  組合成为  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}) \frac{1}{\gamma}$  的組合項。第一方程中的这一組合項  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}) \frac{1}{\gamma}$  是从方程 (17a) 中的  $\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}$  推演得來的，第二方程中的这一組合項是从方程 (17b) 中的  $\frac{\partial\gamma_2}{\partial s_2}$  推演得來的。至于协调方程，因为只包括应变，因此在变换变数后只包括  $\alpha$  和  $\gamma$ 。

在變換了未知数后，平衡方程成为下列的形式：

$$A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + B_1 \frac{\partial \ln \gamma}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_2} C_1, \quad (18a)$$

$$A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} + B_2 \frac{\partial \ln \gamma}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_1} C_2. \quad (18b)$$

上式中  $A_1, C_1, A_2$  和  $C_2$  是  $\alpha$  和  $\gamma$  的函数;  $B_1$  和  $B_2$  是  $\alpha, \gamma$  和  $\tau$  的函数。协调方程中也只包括  $\alpha$  和  $\gamma$ 。因此, 在描写无体積力的塑性平面应力問題的方程中, 只有  $B_1$  和  $B_2$  中包括  $\tau$ , 它們的函数为

$$B_1 = (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) \left[ \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{dy} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0 \right], \quad (19a)$$

$$B_2 = (\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha) \left[ \frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{dy} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0 \right]. \quad (19b)$$

## 6. 材料的 $\tau(\gamma)$ 曲線和載荷对于塑性平面应力問題的影响

在描述本問題的方程中[方程(18a)和(18b)], 变数  $\tau$  包括在系数函数  $B_1$  和  $B_2$  中, 成为  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{dy}$  形式。如前所述, 对于大部分工程上常用的材料,  $\ln \tau$  和  $\ln \gamma$  的关系相当接近于綫性关系, 虽然  $\tau$  是  $\gamma$  的非綫性的函数。在某一載荷下, 在物体内各点的  $\gamma$  值的范围内, 即从  $\gamma_b = \gamma_{\text{最小}}$  到  $\gamma_0 = \gamma_{\text{最大}}$  的范围内,  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲線是非常接近于一直綫。因此,  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{dy}$  可用一常数  $m$  来替代。这常数的数值等于用来近似  $\gamma_b$  到  $\gamma_0$  一段  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲線的直綫的斜度。必须指出, 对于某一材料, 在某一載荷下,  $m$  是一常数; 但是对某一材料, 在不同載荷下, 即在不同  $\gamma_0$  值下,  $m$  值是不同的。在系数函数  $B_1$  和  $B_2$  中的另一項  $\left( -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \gamma \right) = \left( -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \gamma_0$ , 因为包括  $\gamma$ , 它的数值較方程中的其他不包括  $\gamma$  的項为小, 其他的包括  $\gamma$  的項亦是同样的情形。这些包括  $\gamma$  的項可以归併在一起, 用  $(-P\gamma_0)$  替代。由于这些項較其他項为小, 并且是  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的函数, 这些項和  $(-P\gamma_0)$  的差別只是一个高次小量, 因此用  $(-P\gamma_0)$  来近似包括  $\gamma$  的項所引起的誤差不会很大。对于某一个問題,  $P$  是一常数。在这样的替代以后, 描述問題的方程只包括  $\alpha, \gamma/\gamma_0$  和  $(m - P\gamma_0)$ 。

从这些分析可以看出, 假如在边界上的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布相同, 对于  $(m - P\gamma_0)$  同值的材料和載荷,  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的解一定差不多相同。也就是说, 当边界上的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布相同时, 在  $(m - P\gamma_0)$  同值的載荷和材料下, 物体内某一点的主应力的方向和比值近乎相同。实际問題中, 在普通受載状态下, 这种边界条件的滿足的可能性是相当大的。前面所举的例題都属于这种情况。

現在我們应当考慮不同材料在不同載荷下  $(m - P\gamma_0)$  的数值。前面已經提过  $m$  和  $P\gamma_0$  的数值較方程中其他項为小。对于一般工程上常用的材料,  $m$  随着  $\gamma_0$  增加, 并且

$m$  和  $P\gamma_0$  項的符号相反，因此在不同載荷下， $(m - P\gamma_0)$  的數值相差不大。也就是說，當邊界上的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布相同时，在某一問題中的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布相差不大。

前面的分析說明了对于  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的邊界值不变的平面应力問題，材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫和載荷的大小对于主应力之比的参数  $\alpha$  和比例應变  $\gamma/\gamma_0, \varepsilon_1/(\varepsilon_1)_0$  和  $\varepsilon_2/(\varepsilon_2)_0$  的影响可能不大。至于比例应力，它是  $\tau/\tau_0$  和  $\alpha$  的函数的乘積，虽然  $\tau(\gamma)$  曲綫对  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布的影响不大，但是  $\tau$  是  $\gamma$  的非線性的函数。因此，不同材料在不同載荷下的比例应力  $\sigma_1/(\sigma_1)_0$  和  $\sigma_2/(\sigma_2)_0$ ，一般的來說，一定相差很大。也就是說，材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫和載荷对于比例应力分布的影响很大。同时，材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫和載荷对于  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的近乎独立性，說明形变理論可以应用到这些問題。薄圓環和旋轉盤的計算結果，完全和这分析的結果符合。但是这些都屬於一維的平面应力問題。進一步对于个别的二維平面应力問題的解(不論是計算得到的或是實驗得到的)的求得和比較是很重要。这种工作目前正在進行中。

通常常用的以理想塑性材料作为近似而求解时，大多采用小应变概念。在这情况下， $\gamma_0$  較方程中其他項为很小而可以忽略，同时它的  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲綫的斜度等于零。因此， $m - P\gamma_0 = 0$ 。从前面分析的結果可以看出，对于这些平面应力問題，用理想塑性材料所得的比例應变分布和实际工程材料所得的比例應变分布相差不多，而理想塑性材料所得的比例应力分布和实际工程材料所得的比例应力分布，一般的講來，相差是大的。但是理想塑性材料之所以能使解答簡單化是由于加载函数(即应力之間的一定关系)等于一常数。利用这一多加的应力方程而使应力分布直接可从平衡方程和边界条件求得，无需同时求得應变分布。因此，理想塑性材料的解常常只給出应力分布而无應变分布，在这种情况下，我們就必須注意，应当將应力分布中可能包括的誤差估計進去。但是如果利用材料和載荷对于  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的近乎独立性，则可以提出一个很簡單而相当准确的近似解。

这近似解是用某一問題的一已知材料在已知載荷下的已知  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的解(不論是从計算得到或是从實驗得到)，或是用  $m - P\gamma_0 = 0$  时的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的解作为該問題的  $\alpha$  和  $\gamma/\gamma_0$  的近似解，則某一  $\gamma_0$  时的主應变的分布等于  $\gamma/\gamma_0$  乘  $\gamma_0$ 。主应力的分布則可从材料的实际的  $\tau(\gamma)$  曲綫和方程 (6a) 与 (6b) 計算得到。这个近似方法曾应用于一維的塑性平面应力問題中的薄圓環<sup>[12]</sup>和旋轉盤<sup>[18]</sup>。并將計算的結果和根据形变理論所得到的这些問題的准确比解作了比較，二者的結果相当接近。这近似方法对于沿着应力方向綫的材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫为未知的問題，例如不均匀材料的机械另件，更为有用。这近似法曾用在徑向不均匀材料的旋轉盤的解<sup>[14]</sup>，使这極为難解的問題能在几分鐘內

得到近似而相当准确的解答。

## 7. 本文的結果和依留辛的小彈塑性 形变理論<sup>[3]</sup> 的比較

在参考文献[3]中，依留辛証明了当物体的体積力和边界力在加载过程成比例的增加而同时材料的  $\tau$  是  $\gamma$  的指数函数时，物体内任一点的应力分量在加载过程成比例的增加。并且比例应变的分布和比例应力的分布在加载过程中保持不变。

本文所考慮的問題和所得的結果是和依留辛的理論有很大的关系。一方面，依留辛从嚴格的推導得到三維問題的一般性的理論，而本文只是近似地得到平面应力問題的一般性的結果。另一方面：(1) 依留辛是考慮物体在小形变下的情况，在这情况下，只需采用小形变概念，即用变形前的尺寸；而本文主要是考慮物体在大形变下的情况，因此需要采用大形变概念，即用瞬时尺寸。本文所得的結果是当某一物体在不同  $\gamma_0$  值（即不同載荷下），当它的  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - P\gamma_0)$  值为一常数，则  $\alpha$  和  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  的解在不同載荷下差不多相同。在小形变情况下， $\gamma_0$  和整数 1 相比較为很小，可以忽略，即  $P\gamma_0$  項比方程中其他項为很小，可以忽略。所以  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - P\gamma_0)$  等于常数的条件在小形变下成为  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma}$  等于常数，也就是  $\tau$  是  $\gamma$  的指数函数。这和依留辛所得到的条件相同。因此，本文所得到的关于主应力比值  $\alpha$  和比例应变  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  的結果，在小应变下是和依留辛的理論一致的。至于比例应力的結果，初看时似乎和依留辛的理論不相一致，但分析后可以看出也是一致的。在大应变下，当物体内各点的主应力比值在加载过程不变，即材料的  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - P\gamma_0)$  为常数，并不要求在不同載荷下比例应力分布相同，但是在小应变下，由于  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} - P\gamma_0)$  等于常数的条件变为  $(\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma})$  等于常数，则在不同  $\gamma_0$  值时，假如  $\alpha$  和  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  的分布相同时，比例应力分布也一定相同。所以在小形变下，本文所得到的关于比例应力分布的結果也和依留辛的理論一致的。(2) 依留辛的理論給出对于某一材料在什么条件下形变理論可以应用，而本文考慮某一問題不同材料的  $\tau(\gamma)$  曲綫和載和对于題解的影响，同时，也可以看出对于某一材料形变理論的能否应用來解某一个平面应力問題。

## 参考文献

- [1] Nádai, A., Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I. *Jour. Appl. Phys.*, 8, No. 3, pp. 205—213(March 1937).
- [2] Ильюшин, А. А., Связь между теорией Сен-Венана, Леви, Мизеса и теорией малых упруго-пластических деформаций, ПММ, 9 (1945), 207—218.
- [3] Ильюшин, А. А., К теории малых упруго-пластических деформаций, ПММ, 10 (1946), 347—356.
- [4] Handelman, G. H., Lin, C. C. & Prager, W., On the Mechanical Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, 1947, pp. 397—407.
- [5] Drucker, D. C., A Reconsideration of Deformation Theories of Plasticity. *A. S. M. E. Trans.*, 71, No. 5, pp. 587—592(July 1939).
- [6] Nádai, A., Plasticity. 1931, McGraw-Hill Book Co., Inc.
- [7] Nádai, A., and Donnell, L. H., Stress Distribution in Rotating Disks of Ductile Material after the Yield Point has been Reached. *A. S. M. E. Trans.*, 51, pt. I, APM-51-16, 1929, pp. 173—180; Discussion, pp. 180—181.
- [8] Gleyzal, A., Plastic Deformation of a Circular Diaphragm under Pressure. *Jour. Appl. Mech.*, 15, No. 3, pp. 288—296(Sept. 1948).
- [9] Millenson, M. B. and Manson, S. S., Determination of Stresses in Gas-Turbine Disks Subjected to Plastic Flow and Creep, NACA Rep. 906, 1948 (Formerly NACA TN 1636).
- [10] Stowell, Elbridge Z., Stress and Strain Concentration at a Circular Hole in an Infinite Plate, NACA TN 2073, 1950.
- [11] 李敏華 (Lee-Wu, M. H.), Analysis of Plane-Plastic-Stress Problems with Axial Symmetry in Strain-Hardening Range, NACA Rept. 1021, 1951 (Supersedes NACA TN 2217, 1950. Presented at the Third Symposium on Plasticity, Brown University, 1950).
- [12] 李敏華 (Lee-Wu, M. H.), Linearized Solution and General Plastic Behavior of Thin Plate with Circular Hole in Strain-Hardening Range, NACA TN 2301, March, 1951.
- [13] 李敏華 (Lee-Wu, M. H.), General Plastic Behavior and Approximate Solutions of Rotating Disk in Strain-Hardening Range, NACA TN 2367, May, 1951.
- [14] 李敏華 (Lee-Wu, M. H.), A Simple Method of Determining Plastic Stresses and Strains in Rotating Disks with Non-Uniform Metal Properties. *Trans. A. S. M. E., J. of Appl. Mech.*, 19, No. 4, pp. 489—495, Dec. 1952.

## EFFECT OF STRESS-STRAIN CURVE OF MATERIAL ON SOLUTION OF PLANE-STRESS PROBLEMS WITH LARGE PLASTIC DEFORMATION

LEE, MING-HUA

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

A brief review of author's previous work on the plastic plane stress problems with axial symmetry is first made. Results obtained for two of such problems, which show that the effects of  $\tau(\gamma)$  of the material and of loading on the distributions of the proportionate strains\* and of the ratios of principal stresses are very small, are summarized. An analysis of the equations is then made and the preceding results are explained. Equations of equilibrium in terms of the principal stresses and of the principal strains are derived for the two-dimensional plane stress problems without body force but considering finite strains. An analysis of these equations leads to the surmise that the effects of  $\tau(\gamma)$  of the material on the distributions of the proportionate strains and of the ratios of the principal stresses are small, provided that the proportionate strains and the ratios of the principal stresses at the boundary remain the same at different loads. On the other hand, the effects of  $\tau(\gamma)$  of the material and of the load on the distributions of proportionate stresses\* are large. A simple approximate method of solution is obtained by using these results. The results obtained in this paper are compared with Ilyushin's theory of small elastic-plastic deformation.

\* The proportionate strain and proportionate stress are defined as the strain and stress divided by their respective maximum values.