

翼截面柱体的弯曲問題*

林 同 驥

(中國科學院力学研究所)

提 要

本文討論一系列对称翼截面柱体的聖維南弯曲問題，柱体懸空端所加外力的方向与柱体的对称面垂直。这問題一般可簡化为尋找三个平面調和函数，其中两个函数給出边界值，另一函数給出边界上法向的微商。我們設法將这些調和函数的边界值表达为複变函数的实数或虛数部分，这样所得的复变函数在柱体截面內常会發現有奇异点。本方法中的一个重要內容为：如何消去这些奇异点。本文求得問題的精确普遍解，其中含有一个参数，可用來調節截面的厚度。本文最后給出一个例子，闡明求应力函数、扭轉剛度及弯曲中心的步驟；并給出受扭轉和弯曲时沿截面边界上剪切应力的分布情况。

1. 引 言

本文討論一个具有对称翼截面的懸臂梁的弯曲問題。外力加在懸臂梁的懸空端，力的方向和梁的对称面垂直，如圖 1 所示。我們假設梁的材料是均匀的、各向同性的，并假設体力可略去不計。这类懸臂梁在一般情况下將会弯曲并扭轉。

本文討論的懸臂梁的截面，是將双曲线經過逆变换而得的一类对称翼截面，所以也称为双曲线型翼截面，^[1]和儒可夫斯基截面^[2]相比，这类截面有一好处，就是尾角不为零。本文討論的翼截面含有一个参数，可用來調整截面的厚度。这类截面的一些形狀見圖 2。

在彈性力学里，大家都知道：这类懸臂梁的弯曲問題早已由聖維南^[3]簡化为求一个平面調和函数的边界值問題，可是那边界条件还比較復雜。以后斯蒂芬生^[4]將这聖維南的弯曲問題分化为求六个边界条件比較簡單的調和函数。斯蒂芬生指出：当截面有一对称軸，外力并垂直于該軸时，这問題只包括三个調和函数，其中之一就是那截面的扭轉函数。本文所討論的問題就屬於这一类。

我們引用复变函数來求这三个調和函数，先設法將这些調和函数的边界值寫成复

* 本文曾在 1956 年國際力学会議中宣讀。

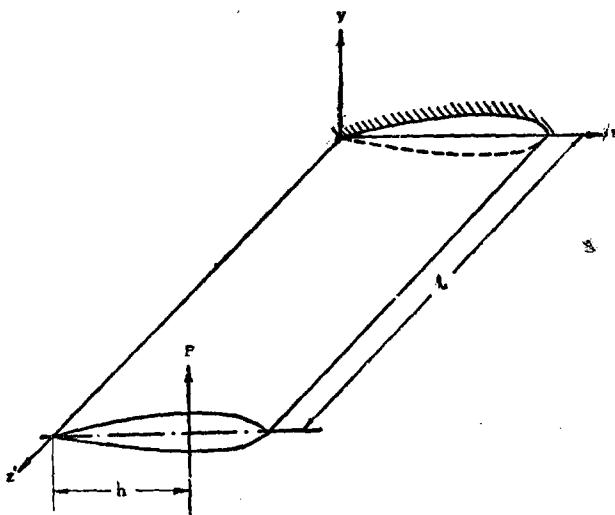


圖 1. 懸臂梁

变函数的实数或虚数部分。这样所得的复变函数在截面内常会发现有奇异点，不合乎要求。所以如何消去奇异点便成为本方法中的一个重要内容。

2. 問題的叙述

令 (x, y, z') 代表笛卡尔的直角坐标， z' 軸和梁的縱軸平行， x 軸在梁的固定端并和截面的对称軸相合。設外力相当于一个和 y 軸平行的集中力 P ，通过截面重心， $x=h$, $y=0$ ，作用于梁的懸空端 $z'=l$ 处。这类問題已由斯蒂芬生^[4]

圖 2. 翼截面

归纳为求三个调和函数的边界值問題。为便于参考及应用起見，我們將斯蒂芬生的主要結果概述如下：設这类懸臂梁沿 x , y 和 z' 軸方向的位移 u , v 和 w 为：

$$\left(\frac{EI}{P}\right)_v = \nu(l-z')y(x-h) - \left(\frac{TEI}{P}\right)yz', \quad (1)$$

$$\left(\frac{EI}{P}\right)_v = -\frac{1}{2}\nu(l-z')[{(x-h)^2-y^2}] + \frac{1}{2}lz'^2 - \frac{1}{6}z'^3 + \left(\frac{TEI}{P}\right)(x-h)z', \quad (2)$$

$$\left(\frac{EI}{P}\right)_w = (1+\nu)\left(\phi_2 - \frac{y^3}{6}\right) - \left(lz' - \frac{1}{2}z'^2\right)y +$$

$$+\nu\left(\phi_1-h\phi_3+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}h^2y\right)+\left(\frac{TEI}{P}\right)(\phi_3+hy). \quad (3)$$

和 z' 軸垂直平面上的剪切应力沿 x 和 y 軸方向的分力 $\tau_{xz'}$ 和 $\tau_{yz'}$, 以及和 z' 軸垂直的平面上的張应力 σ_z' 各为:

$$\left(\frac{EI}{GP}\right)\tau_{xz'}=(1+\nu)\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-h\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x}-y\right)\right]+\left(\frac{EIT}{P}\right)\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x}-y\right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{ET}{GP}\right)\tau_{yz'} &= (1+\nu)\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}-y^2\right)+\nu\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial y}+x^2-h\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial y}+x\right)\right]+ \\ &+ \left(\frac{EIT}{P}\right)\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial y}+x\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left(\frac{I}{P}\right)\sigma_{z'}=-(l-z')y. \quad (6)$$

其中 I 为截面对 z 軸的主慣性矩; E , G 和 ν 各为柱体的楊氏彈性模數, 剪切彈性模數和泊松比; T 为單位長度的扭轉角, T 的表达式見后面公式(13); ϕ_1 , ϕ_2 和 ϕ_3 是三个調和函数. 除上列三个分应力外, 其余应力皆为零.

上式中的三个函数 ϕ_1 , ϕ_2 和 ϕ_3 可寫成复变函数的实数部分如下:

$$\omega_1=\phi_1+i\psi_1, \quad (7)$$

$$\omega_2=\phi_2+i\psi_2, \quad (8)$$

$$\omega_3=\phi_3+i\psi_3, \quad (9)$$

其中 ω_1 , ω_2 和 ω_3 都是复数 $z=x+iy$ 的函数. 这些 ϕ 和 ψ 都是平面調和函数, 是二維的拉普拉斯方程的解, 它們是由下列边界条件决定的:

$$\psi_1=\frac{1}{3}x^3+\text{const}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=\frac{1}{3}\frac{\partial y^3}{\partial n}, \quad (11)$$

$$\psi_3=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\text{const}, \quad (12)$$

其中 $\partial/\partial n$ 代表沿着与边界垂直的方向微商, 从物理条件上看來, 梁的位移和应力都應該是有限的、單值的和連續的, 所以这些函数和它們的第一次微商在截面內边界上都應該是有限的單值的和連續的.

公式(4)和(5)中單位長度的扭轉角度 T 的定义如下:

$$\left(\frac{EIM_3}{P}\right)T=(1+\nu)(M_2-2hI)-\nu(M_1-hM_3). \quad (13)$$

扭轉剛度 R 和弯曲中心 $(f_0, 0)$ 各为:

$$R = GM_3, \quad (14)$$

$$f_0 = [M_2 + \mu(M_1 - hM_3)]/(2I), \quad (15)$$

其中 $\mu = \nu/(1+\nu)$ 是廣义平面应力状态中的泊松比。上式中的 M_1, M_2, M_3 定义如下:

$$M_1 = \iint_S \left(x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dS + \iint_S x^3 dS, \quad (16)$$

$$M_2 = \iint_S \left(x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) dS - \iint_S xy^2 dS, \quad (17)$$

$$M_3 = \iint_S \left(x \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - y \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right) dS + \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad (18)$$

積分遍及截面的面積。

从以上的敘述可看出,我們的問題可歸納為求三个函数 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 及求三个力矩 M_1, M_2 和 M_3 。

本文所考慮的梁的截面是一个对称的翼截面, 它是由双曲线的一支反形轉換而來的。讓我們分析下式所定的曲綫坐标 ξ, η ,

$$z = c' \operatorname{sech} \zeta, \quad (z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta), \quad (19)$$

其中 c' 是个常数。令 $z = re^{i\theta}$ 代入上式, 再分开实数和虛数部分, 得

$$r \cos \eta \cosh \xi = c' \cos \theta, \quad r \sin \eta \sinh \xi = -c' \sin \theta, \quad (20)$$

消去 ξ , 則当

$$\eta = \eta_0 = \text{const}, \quad (21)$$

$$\left(\frac{r}{c'} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin \eta_0} \right)^2, \quad 0 \leq \eta_0, \quad (22)$$

其中

$$c = c' \sec \eta_0. \quad (23)$$

公式(22)給出在極坐标下对称翼截面的边界綫: 截面的弦長为 c' , 尾角为 $2\eta_0$ 。如令

$$z = \frac{c'}{z_1}, \quad (24)$$

則式(19)可寫为

$$z_1 = \cosh \zeta. \quad (25)$$

从公式(25)可以看出, 当 $\eta = \eta_0 = \text{const}$ 时, z_1 平面上画出一双曲线。因为 z 是 z_1 的反形, 所以 z 平面上的对称翼截面是 z_1 平面上双曲线的反形, 翼截面的尾角或厚度由参数 η_0 来調整。

从公式(19), x 和 y 可寫为曲綫坐标 ξ 和 η 的函数如下：

$$x = \frac{2c' \cos \eta \cosh \xi}{\cos 2\eta + \cosh 2\xi}, \quad y = \frac{-2c' \sin \eta \sinh \xi}{\cos 2\eta + \cosh 2\xi}. \quad (26)$$

这曲綫坐标的优点为在边界上, η 是常数, 只有 ξ 是变数。

3. 应力函数

我們引用复变函数來求这三个应力函数 ϕ_1 , ϕ_2 和 ϕ_3 . 先設法將这些函数的边界值寫成复变函数的实数或虚数部分, 这样得到的复变函数在截面內常会發現有奇异点, 不合乎要求. 設法消去这些奇异点, 即得所需要的函数。

第一步我們先將这三个函数的边界值寫成曲綫坐标 ξ 和 η 或 ζ 的函数. 为了使結果簡單, 我們先將方程(10)和(11)改寫为

$$\psi_1 = \frac{1}{4}x(x^2+y^2) + \frac{1}{12}\operatorname{Im}(iz^3) + \text{const}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \eta}[y(x^2-y^2)] + \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial \eta}[\operatorname{Re}(iz^3)], \quad (28)$$

其中 $z=x+iy$, Re 和 Im 各代表实数和虚数部分. 利用公式(26)和(19), 边界条件(12), (27)及(28)可寫为

$$\psi_3 = \frac{c'^2}{\cos 2\eta + \cosh 2\xi} + \text{const}, \quad (29)$$

$$\psi_1 = \frac{c'^3 \cos \eta \cosh \xi}{(\cos 2\eta + \cosh 2\xi)^2} + \frac{c'^3}{12} \operatorname{Im}(i \operatorname{sech}^3 \zeta) + \text{const}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = \frac{\frac{1}{2} c'^3 \cos \eta (6 \cos^2 \eta - 7) \sinh \xi - \sinh 3\xi}{(\cos 2\eta + \cosh 2\xi)^3} + \frac{c'^3}{12} \frac{\partial}{\partial \eta} [\operatorname{Re}(i \operatorname{sech}^3 \zeta)]. \quad (31)$$

如果不利用公式(27)和(28), 直接將公式(26)代入公式(10)和(11), 亦可將边界值寫为 ξ 及 η 的函数, 但結果較複雜。

在截面的边界上我們可以寫

$$\eta = \eta_0 = \frac{\pi}{4k}, \quad \zeta = \zeta_0 = \xi + i\eta_0; \quad (32)$$

其中 k 是个实数. 当 k 是正整数时, 我們有

$$\cosh 2k\xi = i \sinh 2k\zeta_0 = 2|\cosh k\zeta_0|^2 = 2|\sinh k\zeta_0|^2. \quad (33)$$

当 k 是單数时, $\cosh k\zeta_0$ 中可劈出因子 $\cosh \zeta_0$; 当 k 是双数时, $\sinh k\zeta_0$ 中包含有同样的因子. 所以当 k 是任何正整数时, 公式(33)可寫为

$$\cosh 2k\xi = 2 |\cosh \zeta_0|^2 \sum_{r=0}^{k-1} C_r \cosh 2r\xi \quad (34)$$

或

$$\frac{1}{\cos 2\eta_0 + \cosh 2\xi} = \operatorname{sech} 2k\xi \sum_{r=0}^{k-1} C_r \cosh 2r\xi, \quad (35)$$

其中系数 C_r 为实数; C_r 的值依 η_0 或 k 的值而改变。

利用公式 (35) 和 (33), 边界值式 (29), (30) 和 (31) 可写为

$$\psi_3 = c'^2 \operatorname{sech} 2k\xi \sum_{r=0}^{k-1} C_r \cosh 2r\xi + \text{const}; \quad (36)$$

$$\psi_1 = c'^3 \cos \eta \operatorname{sech}^2 2k\xi \sum_{r=1}^{2k-1} D_r \cosh (2r-1)\xi + \frac{c'^3}{12} \operatorname{Im} (i \operatorname{sech}^3 \zeta) + \text{const}; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = & \frac{1}{2} c'^3 \cos \eta \operatorname{sech}^3 2k\xi \sum_{r=1}^{3k-1} E_r \sinh (2r-1)\xi + \\ & + \frac{c'^2}{12} \frac{\partial}{\partial \eta} [\operatorname{Re} (i \operatorname{sech}^3 \zeta)]. \end{aligned} \quad (38)$$

公式 (36), (37) 和 (38) 的形式比较简单, 容易将它们表达为复变函数的实数或虚数部分。上式中 C_r , D_r 和 E_r 都是实数, 它们的值由下列各式决定:

$$\sum_{r=0}^{k-1} C_r \cosh 2r\xi = \left| \frac{\cosh k\zeta_0}{\cosh \zeta_0} \right|^2 = \left| \frac{\sinh k\zeta_0}{\cosh \zeta_0} \right|^2, \quad (39)$$

$$\sum_{r=1}^{2k-1} D_r \cosh (2r-1)\xi = \cosh \xi \left| \frac{\cosh k\zeta_0}{\cosh \zeta_0} \right|^4, \quad (40)$$

$$\sum_{r=1}^{3k-1} E_r \sinh (2r-1)\xi = [(6 \cos^2 \eta_0 - 7) \sinh \xi - \sinh 3\xi] \left| \frac{\cosh k\zeta_0}{\cosh \zeta_0} \right|^6. \quad (41)$$

从问题的对称性可以看出: ω_1 , ω_2 和 ω_3 都是 ζ 的偶函数。因此, $\frac{d\omega_2}{d\zeta}$ 是 ζ 的奇函数。从公式 (8) 和 (19), 得

$$\frac{d\omega_2}{d\zeta} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \frac{i}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}. \quad (42)$$

为要找出 ω_3 , ω_1 和 $\frac{d\omega_2}{d\zeta}$, 我们需将 ψ_3 和 ψ_1 表达为 ζ 的偶函数的虚数部分, 将 $-\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$ 表达为 ζ 的奇函数的虚数部分。当 k 为任何正整数, n 为任何实数时, 利用公式 (32), 得

$$\operatorname{sech} 2k\zeta = i \operatorname{csch} 2k\zeta_0, \quad (43)$$

$$\cosh n\zeta = \begin{cases} \operatorname{Im} (\csc n\eta_0 \sinh n\zeta_0), \\ \operatorname{Im} (i \sec n\eta_0 \cosh n\zeta_0), \end{cases} \quad (44a)$$

$$(44b)$$

$$\sinh n\zeta = \begin{cases} \operatorname{Im} (i \sec n\eta_0 \sinh n\zeta_0), \\ \operatorname{Im} (\csc n\eta_0 \cosh n\zeta_0). \end{cases} \quad (45a)$$

$$(45b)$$

公式(44a)和(45a)是 ζ_0 的奇函数，公式(44b)和(45b)是 ζ_0 的偶函数。公式(44)和(45)中a式或b式的選擇視所需要的函数是 ζ_0 的奇或偶函数來決定。利用公式(43)，分別代公式(44a)入公式(36)，代公式(44b)入公式(37)，代公式(45b)入公式(38)，得

$$\text{其中 } \psi_3 = \operatorname{Im} A_3, \quad \psi = \operatorname{Im} A_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = -\operatorname{Im} \frac{dA_2}{d\zeta}; \quad (46)$$

$$A_3 = ie'^2 \operatorname{csch} 2k\zeta \left[ie_0 + \sum_{r=1}^{k-1} C_r \csc 2r\eta_0 \sinh 2r\zeta \right] + \text{const}, \quad (47)$$

$$A_1 = -ie'^3 \cos \eta_0 \operatorname{csch}^2 2k\zeta \sum_{r=1}^{2k-1} D_r \sec (2r-1)\eta_0 \cosh (2r-1)\zeta + \\ + \frac{e'^3}{12} \operatorname{sech}^3 \zeta + \text{const}, \quad (48)$$

$$\frac{dA_2}{d\zeta} = \frac{1}{2} ie'^2 \cos \eta_0 \operatorname{csch}^3 2k\zeta \sum_{r=1}^{3k-1} E_r \csc (2r-1)\eta_0 \cosh (2r-1)\zeta + \\ + \frac{e'^3}{12} \frac{d}{d\zeta} (i \operatorname{sech}^3 \zeta). \quad (49)$$

利用公式(19)，公式(49)可寫为

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{1}{2} ie'^2 \cos \eta_0 \cosh^2 \zeta \operatorname{csch} \zeta \operatorname{csch}^8 2k\zeta \sum_{r=1}^{3k-1} E_r \sec (2r-1)\eta_0 + \\ + \cosh (2r-1)\zeta + \frac{1}{4} ie'^2 \operatorname{sech}^2 \zeta. \quad (50)$$

函数 A_3 ， A_1 和 $\frac{dA_2}{dz}$ 虽然适合我們所需要的边界条件，可是在 $\zeta=0$ 处，它們都有一奇异点，因此并非我們所要求的应力函数。

A_3 在 $\zeta=0$ 处有一个一級的極点，由含有系数 e_0 的一項所產生。为要消去这个奇异点，我們把這項乘以因子 $\zeta/i\eta_0$ 。这因子在 $\zeta=0$ 处有一零点，在边界上实数部分为1，所以在边界上原式的虛数部分不变，因此我們可以寫

$$\omega_3 = i c'^2 \operatorname{sech} 2k\zeta \left[\left(\frac{c_0}{\eta_0} \right) \zeta + \sum_{r=1}^{k-1} C_r \csc 2r\eta_0 \sinh 2r\zeta \right] + \text{const}, \quad (51)$$

这样就消去了在 $\zeta=0$ 处的奇异点。应该指出：当 $n=0$ 时，如果采用极限值，公式 (44a) 给出 $1=\operatorname{Im}(\zeta_0/\eta_0)$ ，所以 $c_0=\operatorname{Im}(c_0/\eta_0)\zeta_0$ ，故在求公式 (51) 中含有 c_0 的一项时，也可用公式 (44a)。

A_1 在 $\zeta=0$ 处有一个二级的极点。为要消去这奇异点，将公式 (48) 加上含有系数 D_a 的一项，因此可写成

$$\begin{aligned} \omega_1 = -ic'^3 \cos \eta_0 \operatorname{csch}^2 2k\zeta & \left[D_a \cosh 2k\zeta + \sum_{r=1}^{2k-1} D_r \sec(2r-1)\eta_0 \cosh(2r-1)\zeta \right] + \\ & + \frac{1}{12} ic'^8 \operatorname{sech}^3 \zeta + \text{const}. \end{aligned} \quad (52)$$

加上的一项在边界上是实数，所以原式虚数部分 ψ_1 的边界条件不改变。令

$$D_a + \sum_{r=1}^{2k-1} D_r \sec(2r-1)\eta_0 = 0, \quad (53)$$

则在 $\zeta=0$ 处，公式 (52) 中方括弧内有一个二级的零点，它和方括弧外的二级柱点相乘而消去那奇异点。

$\frac{dA_2}{dz}$ 在 $\zeta=0$ 处有一个四级的极点。为要消去这奇异点，将公式 (50) 加上含有系数 E_a 和 E_b 的两项，因此可写成

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dz} = -\frac{1}{2} ic'^2 \cos \eta_0 \cosh^2 \zeta \operatorname{csch} \zeta \operatorname{csch}^3 2k\zeta & \left[E_a + E_b \cosh 4k\zeta + \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^{3k-1} E_r \sec(2r-1)\eta_0 \cosh(2r-1)\zeta \right] + \frac{1}{4} ic'^2 \operatorname{sech}^2 \zeta. \end{aligned} \quad (54)$$

这新加的两项在边界上都是实数，所以 $\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$ 的边界条件不变。令

$$E_a + E_b + \sum_{r=1}^{3k-1} E_r \sec(2r-1)\eta_0 = 0, \quad (55)$$

$$E_b(4k)^2 + \sum_{r=1}^{3k-1} E_r(2r-1)^2 \sec(2r-1)\eta_0 = 0, \quad (56)$$

则在 $\zeta=0$ 处，公式 (54) 中方括弧内有一个四级的零点，它和方括弧外的四级柱点相乘而消去那奇异点。

公式(54)給出 ω_2 的一級微商，正是求应力分布所需要的。从 $\frac{d\omega_2}{dz}$ 求 ω_2 ，可利用公式(19)將公式(54)寫成

$$\omega_2 = \frac{1}{2} i c'^2 \cos \eta_0 \int \frac{P(z)}{Q(z)} dz, \quad (57)$$

其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多項式。公式(57)可用部分分式積分而得 ω_2 ，固然在一般情況下 $\frac{d\omega_2}{dz}$ 已够用。我們所需要的 ϕ_1 , ϕ_2 和 ϕ_3 就是 ω_1 , ω_2 和 ω_3 的實數部分，这样我們就求得所需要的三个应力函数。

4. 例題

我們利用下列的例題來闡明求应力函数、扭轉剛度和弯曲中心的步驟。

例一 $k=1$:

这是本文所討論的一系列翼截面中最簡單的一种；因为求系数 C_r , D_r , E_r 等步驟都一样，这簡單的例子就可作为代表。此外关于这个特例的应力函数，斯蒂芬生曾用不同的方法求得，可作比較。

当 $k=1$ 时，从公式(32)得 $\eta_0=\frac{\pi}{4}$ ，將 k 及 η_0 代入公式(39), (40), (41), (53)(55)和(56)，得 $C_0=1$, $D_1=1$, $D_a=-\sqrt{2}$, $E_1=7$, $E_2=-1$, $E_a=7\sqrt{2}$, $E_b=\sqrt{2}$ 。將这些系数代入公式(51), (52) 和 (54)，得

$$\omega_3 = \frac{4}{\pi} i c'^2 \zeta \operatorname{csch} 2\zeta + \text{const}, \quad (58)$$

$$\omega_1 = -i c'^3 \operatorname{esch}^2 2\zeta (\cosh \zeta - \cosh 2\zeta) + \frac{1}{12} i c'^3 \operatorname{sech}^3 \zeta + \text{const}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dz} = & -\frac{1}{2} i c'^2 \cosh^2 \zeta \operatorname{csch} \zeta \operatorname{csch}^3 2\zeta (7 - 7 \cosh \zeta - \\ & - \cosh 3\zeta + \cosh 4\zeta) + \frac{1}{4} i c'^2 \operatorname{sech}^2 \zeta. \end{aligned} \quad (60)$$

利用公式(19), 公式(60)給出

$$\omega_2 = \frac{1}{4} i \left[\frac{1}{3} z^3 - c' z^2 + c'^2 z - 2 c'^3 \ln (z - c') - \frac{c'^4}{z - c} \right] + \text{const}. \quad (61)$$

这些結果和斯蒂芬生^[4]的相同，虽然所用的方法和变数都不一样。应力函数 ϕ_1 , ϕ_2 和 ϕ_3 就是上列 ω_1 , ω_2 和 ω_3 的實數部分。利用这些函数和公式(22)，从公式(16), (17)和(18)得

$$\left. \begin{aligned} M_8 &= \frac{1}{4\pi} (\pi^2 - 8) c'^4, \\ M_1 &= \frac{1}{12} (3\pi - 8) c'^5 = 0.1187 c'^5, \\ M_2 &= \frac{1}{6} (10 - 3\pi) c'^5 = 0.0959 c'^5. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

从公式 (22), 得

$$\zeta = \frac{1}{2} c^2, \quad h = \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi c = 0.555 c, \quad I = \frac{1}{96} (3\pi - 8) c^4 = 0.0148 c'^4. \quad (63)$$

将公式 (62) 和 (63) 代入公式 (13), (14) 和 (15), 得单位长度的扭转角度 T 、扭转刚度 R 和弯曲中心 f_0 如下:

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(\frac{Pc}{EI} \right) (-0.0124467 - 0.0213873\mu), \\ R &= 0.0371946 c^4 G, \\ f_0 &= (0.5709569 - 0.0112036\mu) c. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

例二 $k=2$:

这翼截面的形状见图 2。因为求系数 C_r, D_r, E_r 等步骤和前一例题相同, 这里我们只给出应力函数 ω_8 和 ω_1 , 及应力函数的微商 $\frac{d\omega}{dz}$ 如下:

$$\omega_8 = -2\sqrt{2}ic'^2 \operatorname{csch} 4\zeta \left(\frac{4}{\pi} \zeta - \sin 2\zeta \right) + \text{const}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 = -ic'^3 \operatorname{csch}^2 4\zeta &\left[2(2 - \sqrt{2}) \cosh \zeta - (3 + \sqrt{2}) \cosh 3\zeta + \right. \\ &\left. + 4\sqrt{2} \cosh 4\zeta - (1 + \sqrt{2}) \cosh 5\zeta \right] + \frac{1}{12}ic'^3 \operatorname{sech}^3 \zeta + \text{const}. \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dz} = \frac{1}{2} &(1 + \sqrt{2})ic'^2 \cosh^2 \zeta \operatorname{csch}^3 \zeta \operatorname{csch}^4 4\zeta \left[2(50 - 41\sqrt{2}) - \right. \\ &- 2(3 + 13\sqrt{2}) \cosh \zeta - 2(36 - 29\sqrt{2}) \cosh 3\zeta - 2(28 - 19\sqrt{2}) \cosh 5\zeta + \\ &\left. + (7 - 6\sqrt{2}) \cosh 7\zeta + 2(14 - 9\sqrt{2}) \cosh 8\zeta - \cosh 9\zeta \right] + \frac{1}{4}ic'^2 \operatorname{sech}^2 \zeta. \end{aligned} \quad (67)$$

扭转函数公式 (65) 和本作者及怀赫德^[6]用保角变换及泊松积分所得的扭转函数相同, 但本文所用的方法较简单, 并且除扭转函数外, 还求得其余两个弯曲函数。

将应力函数代入公式 (3), (4) 和 (5), 可求得柱体内各点的应力, 最大应力一般出现于截面边界上。由扭转及弯曲作用, 沿柱体截面边界上所产生的应力分布见图 3 及

圖 4. 从圖 3 可以看出：截面愈薄，則由扭轉而產生的最大剪切应力愈移向截面的前端。
从圖 4 可以看出：由弯曲而產生的剪切应力隨泊松比的增加而增大。

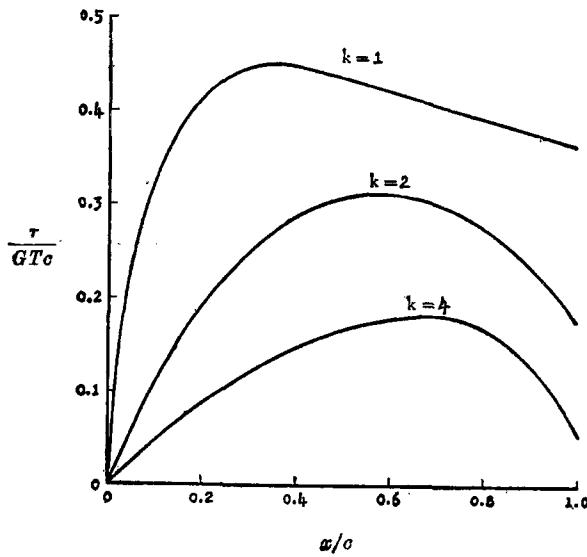


圖 3. 扭轉下的剪切应力

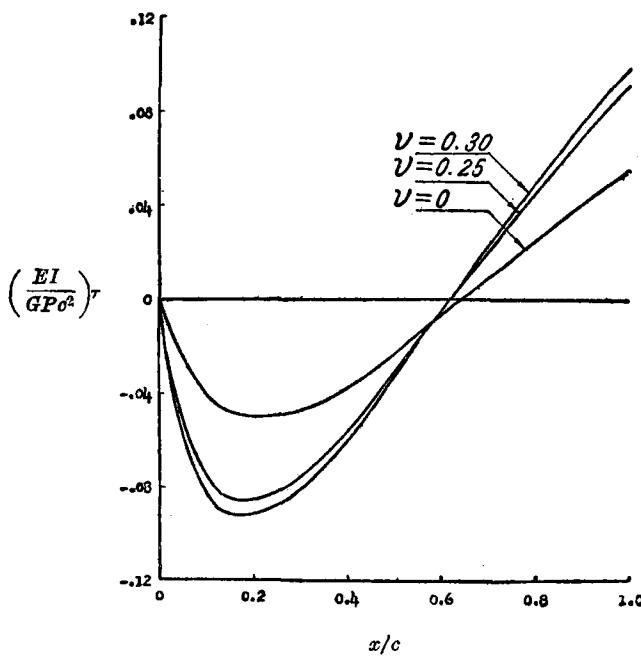


圖 4. 弯曲下的剪切应力

5. 結 論

本文給出一系列对称翼截面的聖維南弯曲問題的精确普遍解，本文所討論的外力的方向系与柱体的对称面垂直。

本文所得的一些特解和斯蒂芬生、作者及怀赫德的結果相同，但本方法所得結果及应用范围却較廣。

截面愈薄，則由扭轉而產生的最大剪切应力愈移向截面前端。

由弯曲而產生的剪切应力隨泊松比的增加而增大。

当外力方向不与柱体对称面垂直时，聖維南弯曲問題要牽涉到另外三个調和函数，这些函数也可用类似方法求得。

本方法可推廣应用到非对称的翼截面。

參 考 文 獻

- [1] Piercy, N. A. V., Piper, R. W., and Preston, J. H., A Family of Wing Profiles, *Phil. Mag.*, Ser. 7, 24 (1937), 425.
- [2] Durand, W. D., Aerodynamic Theory, Vol. II, p. 68.
- [3] Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XV, 1944, pp. 329—348, 4th ed., Dover Publication, New York.
- [4] Stevenson, A. C., Flexure with Shear and Associated Torsion in Prisms of Uni-axial and Asymmetric Cross-sections, *Phil. Tran. Roy. Soc. of London*, Ser. A, No. 776, 237 (1938), 161—229.
- [5] Lin, T. C., and Whitehead, L. G., The St. Venant Torsion Problem for the Hyperbolic Airfoil Cross Section, Bulletin No. 118, 1951, pp. 108—111, Experiment Station, Univ. of Washington, Seattle, Wash. U. S. A.

ON THE ST. VENANT FLEXURE PROBLEM FOR CROSS SECTIONS OF A SERIES OF SYMMETRICAL AIRFOILS

LIN, TUNG-CHI

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper deals with the problem of flexure of a uniform cantilever beam with a symmetrical airfoil cross section. The loading is applied at the free end at right angles to the plane of symmetry as shown in Fig. 1. The material is assumed to be homogeneous and isotropic, and the body forces are assumed to be negligible. In general, such a beam will twist as well as bend.

The mathematical form assigned to the cross-sectional shape is based on the inversion of a hyperbola. This expression contains a single parameter k for adjusting

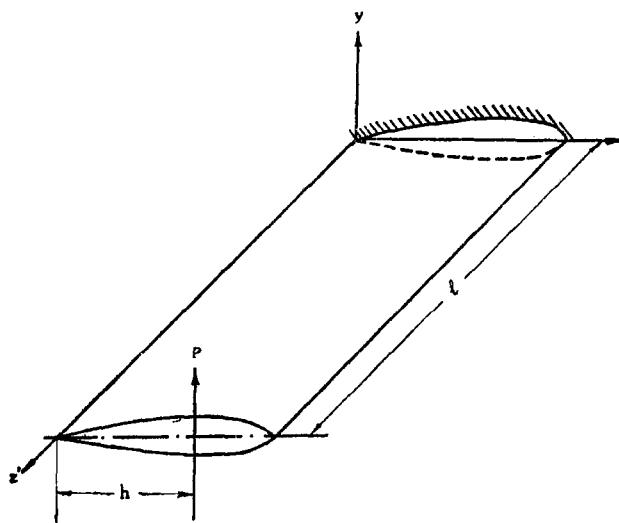


Fig. 1 The cantilever beam

the fineness ratio of the airfoil. Some of the possible shapes of the cross section are shown in Fig. 2.

It is well known in the theory of elasticity that the problem of a cantilever beam of constant cross section under the action of a transverse load applied at the free end has been reduced by St. Venant to a problem of finding plane harmonic functions satisfying a certain condition on the boundary of the cross section. In the case of cross sections having uni-axial symmetry with load applied at right angles to the axis of symmetry, the St. Venant flexure problem has been reduced by Stevenson into a boundary value problem involving three canonical flexure functions, of which one is the torsion function of the cross section.

For the present problem, it is shown that these canonical flexure functions can be obtained by introducing complex variables. The method employed is that of expressing the boundary equations of the real canonical functions as either the real or the imaginary parts of functions of a complex variable. However, the complex functions thus obtained contain singularities, which lie within the cross section of the airfoil. An essential feature of the method employed is that of eliminating these singularities.

An exact and general solution of the St. Venant flexure problem is obtained for cross sections of a series of symmetrical airfoils with load applied at right angles to the axis of symmetry.

The solution for the Laminnate of Bernouli (which is a special case of the series of airfoils with $k=1$) worked out by the present method checks with that due to Stevenson by a different method, but the present method is applicable for larger values of the parameter k , i. e., for thinner airfoils.

As the airfoil becomes thinner, the maximum shearing stress due to torsion moves towards the nose as is shown in Fig. 3.

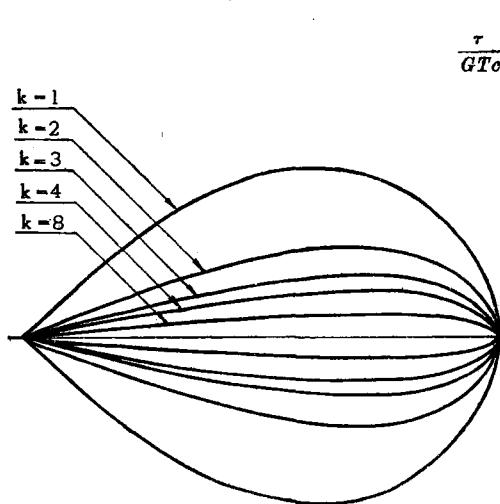


Fig. 2 The airfoils

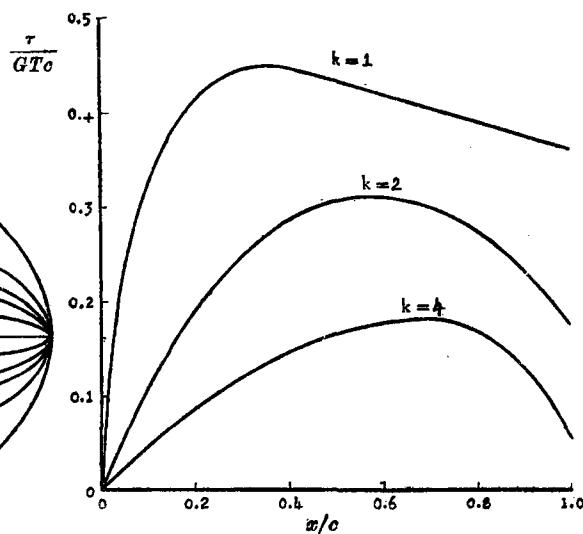


Fig. 3 The shearing stress under bending

The effect of Poisson's ratio ν tends to increase the shearing stress due to bending as is shown in Fig. 4.

In Figs. 3 and 4, τ is the shearing stress along the boundary of the airfoil, and c and I are respectively the chord and the moment of inertia of the airfoil about the x -axis. E , G and ν are respectively Young's modulus, the modulus of rigidity, and Poisson's ratio of the material of the beam. T is the associated twist per unit length of the beam, and P is the load.

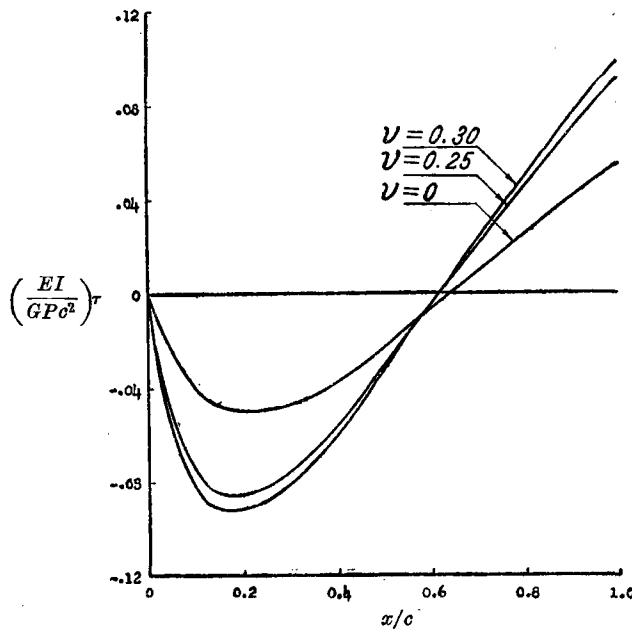


Fig. 4 The shearing stress under torsion