力 学 学 报

第1卷 第1期 1957年2月

彈性体动力学中的倒易定理及它的一些应用

胡海昌

(中國科学院力学研究所)

1. 引 言

在彈性体及結構靜力学中,貝諦及馬克斯威尔的倒易定理有着重要的理論意义和廣泛的实际应用. 在彈性体及結構动力学中有沒有类似的倒易定理呢? 这个具有同样重要意义的問題,虽然一貫地受到物理学家的重視,却沒有受到力学工作者应有的普遍注意. 早在上世紀末,瑞萊[1]就已經証明在綫性系統作簡諧周期振动的情况,力和位移的振幅以及它們的相角具有互換性質. 这些性質后來曾由 A. 斯坦海尔[2]应用于力学問題. 綫性系統在非定常运动时的一般倒易定理,据說[3]是首先由 H. H. 安德烈夫[4]指出的. 最近 D. 格拉菲[5]在一篇短文中也得到了彈性体动力学中的一个一般性的倒易定理.

本文的目的在于系統地討論彈性体及結構动力学中的倒易定理,并把結果推廣到各向异性的和非均匀的、并且具有內外阻尼的綫性彈性系統的情况. 最后我們对一些結構力学、彈性体力学和防振措施問題來說明倒易定理的应用.

2. 无阻尼的綫性彈性系統

我們先來討論无阻尼的綫性彈性系統. 取一直角坐标系 x, y, z. 应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$ 与位移分量 u, v, w 的关系为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1}$$

在最一般的各向异性場合，应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}$ 与应变分量的关系为

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_{13}\epsilon_z + a_{14}\gamma_{yz} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{xy}, \\
\sigma_y &= a_{12}\epsilon_x + a_{22}\epsilon_y + a_{23}\epsilon_z + a_{24}\gamma_{yz} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{xy}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tau_{xy} &= a_{16}\epsilon_x + a_{26}\epsilon_y + a_{36}\epsilon_z + a_{46}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{xy}.
\end{aligned} \tag{2}$$

这里由于物体可以是非均匀的，所以彈性系数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{66}$ 是坐标 x, y, z 的函数。物体元素的运动方程是

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \left(f_x - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + \left(f_y - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0, \\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \left(f_z - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

这里 f_x, f_y, f_z 是已知的体積力，ρ 是密度。由于物体可以是非均匀的，所以 ρ 是坐标 x, y, z 的函数。設在物体的一部分表面 S_1 上已知外力（包括不受力作用的懸空面），在其余部分 S_2 上已知位移（包括位移为零的支承面）。在这种場合，边界条件为：

在 S_1 上，

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy}\cos(ny) + \tau_{xz}\cos(nz) &= p_x, \\
\tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y\cos(ny) + \tau_{yz}\cos(nz) &= p_y, \\
\tau_{xz}\cos(nx) + \tau_{yz}\cos(ny) + \sigma_z\cos(nz) &= p_z.
\end{aligned} \tag{4}$$

在 S_2 上，

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}. \tag{5}$$

这里 p_x, p_y, p_z 以及 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 为各在 S_1 及 S_2 上已知的函数。最后，我們設起始条件为：

在 $t=0$ 时，

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}_0. \tag{6}$$

总起來說，彈性体动力学問題的解应当滿足方程 (1), (2), (3)、边界条件 (4), (5)、和起始条件 (6)。

为了要導出彈性体动力学中的各种倒易定理，我們应用拉普拉斯轉換。設 $\phi(x, y, z, t)$ 是任一函数，它的拉普拉斯轉換用相应的大寫字母 $\Phi(x, y, z, s)$ 來表示，即

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^\infty \phi(x, y, z, t) e^{-st} dt. \tag{7}$$

取方程 (1)—(5) 的拉普拉斯轉換，我們得到

$$E_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \Gamma_{yz}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y},$$
$$E_y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \Gamma_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x},\tag{8}$$
$$E_z=\frac{\partial W}{\partial z},\quad \Gamma_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x};$$

$$\Sigma_x=a_{11}E_x+a_{12}E_y+a_{13}E_z+a_{14}\Gamma_{yz}+a_{15}\Gamma_{xz}+a_{16}\Gamma_{xy},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{9}$$
$$T_{xy}=a_{16}E_x+a_{26}E_y+a_{36}E_z+a_{46}\Gamma_{yz}+a_{56}\Gamma_{xz}+a_{66}\Gamma_{xy};$$

$$\frac{\partial\Sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+(F_x+\rho\dot{u}_0+\rho su_0-\rho s^2U)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{10}$$
$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\Sigma_z}{\partial z}+(F_z+\rho\dot{w}_0+\rho sw_0-\rho s^2W)=0;$$

在 S_1 上，

$$\Sigma_x\cos(nx)+T_{xy}\cos(ny)+T_{xz}\cos(nz)=P_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{11}$$
$$T_{xz}\cos(nx)+T_{yz}\cos(ny)+\Sigma_z\cos(nz)=P_z;$$

在 S_2 上，

$$U=\bar{U},\quad V=\bar{V},\quad W=\bar{W}.\tag{12}$$

方程 (8)—(12) 規定了綫性彈性体的一个平衡問題：它的位移分量是 U, V, W；应变分量是 $E_x, E_y, \cdots, \Gamma_{xy}$；应力分量是 $\Sigma_x, \Sigma_y, \cdots, T_{xy}$；体積力是 $(F_x+\rho\dot{u}_0+\rho su_0-\rho s^2U), \cdots, (F_z+\rho\dot{w}_0+\rho sw_0-\rho s^2W)$；表面力是 P_x, P_y, P_z；表面位移是 $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$。在这个平衡問題中，我們可以应用熟知的貝諦的倒易定理。設在各文字下加一下标 1 表示第一次各量，加一下标 2 表示第二次各量，那末我們有 1)

$$\iiint\{(F_{x1}+\rho\dot{u}_{01}+\rho su_{01}-\rho s^2U_1)U_2+(F_{y1}+\rho\dot{v}_{01}+\rho sv_{01}-\rho s^2V_1)V_2+$$
$$+(F_{z1}+\rho\dot{w}_{01}+\rho sw_{01}-\rho s^2W_1)W_2\}dV+\iint(P_{x1}U_2+P_{y1}V_2+P_{z1}W_2)dS=$$
$$=1,2\text{ 互換得到的結果。}\tag{13}$$

1) 公式(13)可以从"第一次的位移乘第二次的力等于第二次的位移乘第一次的力"而得到。它当然也可以直接从方程 (8)—(12) 導出。

这里 dV 是体積元素，dS 是表面面積元素．在上式中，消去左右两端相同的項，得到

$$\iiint\{(F_{x1}+\rho\dot{u}_{01}+\rho su_{01})U_2+(F_{y1}+\rho\dot{v}_{01}+\rho sv_{01})V_2+$$
$$+(F_{z1}+\rho\dot{w}_{01}+\rho sw_{01})W_2\}dV+\iint(P_{x1}U_2+P_{y1}V_2+P_{z1}W_2)dS=$$
$$=1,2\text{ 互換得到的結果}. \tag{14}$$

这便是彈性体动力学中基本的倒易定理．將等式(14)还复到原函数，我們便得到一个等式；但是在这等式中除了仍有体積分和面積分之外，还出現对时間的積分．因此，在一般的場合应用原函数的倒易定理，不如应用拉普拉斯轉換的倒易定理(14)來得方便．下面我們將从等式(14)推導出几个有意义的簡單情况．

1. 起先是靜止的情况 在这种場合，$u_0=v_0=w_0=0$，$\dot{u}_0=\dot{v}_0=\dot{w}_0=0$，因此等式(14)簡化为

$$\iiint(F_{x1}U_2+F_{y1}V_2+F_{z1}W_2)dV+\iint(P_{x1}U_2+P_{y1}V_2+P_{z1}W_2)dS=$$
$$=1,2\text{ 互換得到的結果}. \tag{15}$$

此式表示，在起先是靜止的情况下，位移及力的拉普拉斯轉換滿足平衡問題中的貝諦倒易定理．

公式(15)的一个重要的特例是：当 $t<0$ 时物体是靜止的．在 $t=0$ 时突然加上外力，以后外力保持不变，在物体的一部分表面 S_2 上永远 $u=v=w=0$（即設 S_2 全部是支承面）．在这种場合下，外力与时間无关，因此它們的拉普拉斯轉換是

$$F_x=f_x\cdot\frac{1}{s},\quad F_y=f_y\cdot\frac{1}{s},\cdots,\quad P_z=p_z\frac{1}{s}. \tag{16}$$

將此代入公式(15)，然后消去公因子 $\frac{1}{s}$，得到

$$\iiint(f_{x1}U_2+f_{y1}V_2+f_{z1}W_2)dV+\iint_{S_1}(p_{x1}U_2+p_{y1}V_2+p_{z1}W_2)dS=$$
$$=\iiint(f_{x2}U_1+f_{y2}V_1+f_{z2}W_1)dV+\iint_{S_1}(p_{x2}U_1+p_{y2}V_1+p_{z2}W_1)dS. \tag{17}$$

由于 f_x，f_y，…，p_z 等与 s 无关，將(17)式恢复到原函数，我們得到

$$\iiint(f_{x1}u_2+f_{y1}v_2+f_{z1}w_2)dV+\iint_{S_1}(p_{x1}u_2+p_{y1}v_2+p_{z1}w_2)dS=$$
$$=\iiint(f_{x2}u_1+f_{y2}v_1+f_{z2}w_1)dV+\iint_{S_1}(p_{x2}u_1+p_{y2}v_1+p_{z2}w_1)dS. \tag{18}$$

此式表示，如果物体起先是靜止的，后來突然加上不变的外力，物体有一部分表面是永远不动的支承面，那末在任何时刻有与貝諦定理相似的倒易定理.

例如設有 n 个不变的外力 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 同时作用于物体上，設各力作用点的位移[1] 为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$. 根据綫性关系可知

$$\begin{aligned}\Delta_1&=P_1\delta_{11}(t)+P_2\delta_{12}(t)+\cdots+P_n\delta_{1n}(t),\\ \Delta_2&=P_1\delta_{21}(t)+P_2\delta_{22}(t)+\cdots+P_n\delta_{2n}(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta_n&=P_1\delta_{n1}(t)+P_2\delta_{n2}(t)+\cdots+P_n\delta_{nn}(t).\end{aligned} \tag{19}$$

根据上面說明的倒易定理，必須有

$$\delta_{ij}(t)=\delta_{ji}(t). \tag{20}$$

公式 (20) 的物理意义是：在 A 点加上一个不变的外力所引起的 B 点的位移，等于在 B 点加上一个同样大小的不变的外力所引起的 A 点的位移.

公式 (18) 不但在外力不变的情况下成立，并且在外力虽变但它們的比保持不变的情况下也是成立的. 因为在外力的比保持不变的情况下，它們的拉普拉斯轉換具有相同的比，即

$$F_x:F_y:F_z:P_x:P_y:P_z=f_x:f_y:f_z:p_x:p_y:p_z, \tag{21}$$

因此从 (15) 式依旧能够得到 (17) 式而最后得到 (18) 式.

由此可知，如果物体起先是靜止的，后來加上保持定比的外力，而物体有一部分表面是永远不动的支承面，那末在任何时刻有与貝諦定理相似的倒易定理.

例如設有 n 个外力 $P_1\varphi(t), P_2\varphi(t), \cdots, P_n\varphi(t)$ 同时作用于物体上，設各力的作用点的位移为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，那末我們依旧有关系式 (19) 和 (20). 在这种場合公式(20)的物理意义是：在 A 点加上外力所引起的 B 点的位移，等于在 B 点加上同样大小同样变化的外力所引起的 A 点的位移.

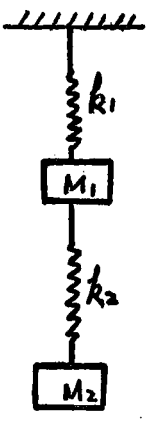

圖 1.

我們來看看上述倒易定理的若干具体表現.

例 1: 設有一 2 自由度的彈性系統如圖 1 所示. 由于在質量 M_1 上加上一个不变的外力 $F_1=1$ 所引起的質量 M_2 的位移 $x_{21}(t)$，和由于在質量 M_2 上加上一个不变的外力 $F_2=1$ 所引起的質量 M_1 的位移 $x_{12}(t)$，經过实际計算是

1) 和平衡情况一样，这里以及以后类似情况下所說的位移，都是指外力作用方向上的位移.

$$x_{12}=x_{21}=\frac{1}{k_1}\left\{1-\frac{1}{\omega_1^2+\omega_2^2}(\omega_2^2\cos\omega_1 t+\omega_1^2\cos\omega_2 t)\right\}, \tag{22}$$

其中 ω_1, ω_2 是該系的固有頻率，它們是下列方程的根：

$$M_1M_2\omega^4-(k_1M_2+k_2M_1+k_2M_2)\omega^2+k_1k_2=0. \tag{23}$$

例2：設有一直梁如圖2所示．在 $t=0$ 时在某点 $x=\xi$ 加上一个不变的外力 P．現在我們來求梁的撓度 $w(x, t)$．撓度 w 滿足微分方程

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P\delta(x-\xi), \tag{24}$$

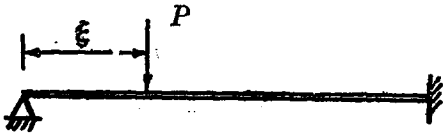

圖 2.

設起始条件为：

在 $t=0$ 时，

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}=0, \tag{25}$$

和某种边界条件．設 $\varphi_i(x)$ 是梁的固有振动形式，ω_i 是相应的固有頻率，φ_i 滿足微分方程

$$EI\frac{d^4\varphi_i}{dx^4}-\rho A\omega_i^2\varphi_i=0 \tag{26}$$

及相应的边界条件．可以証明，对于不随时間而变的无彈性的支座，φ_i 滿足正交条件

$$\int_0^l \varphi_i\varphi_j dx=0, \quad (i\neq j). \tag{27}$$

設 φ_i 已經正則化，即

$$\int_0^l \varphi_i^2 dx=1. \tag{28}$$

我們把撓度展开为固有振动形式的級数：

$$w=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\varphi_i(x). \tag{29}$$

將此式代入方程(24)，并应用(26)式，得到

$$\rho A\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{d^2a_i}{dt^2}+\omega_i^2a_i\right)\varphi_i(x)=P\delta(x-\xi). \tag{30}$$

用 φ_i 乘此式两端，然后將所得結果对 x 積分，应用(27)，(28)两式，得到

$$\frac{d^2a_i}{dt^2}+\omega_i^2a_i=\frac{P}{\rho A}\varphi_i(\xi). \tag{31}$$

在静止的起始条件下解此方程，得到

$$a_i=\frac{P}{\rho A}\cdot\frac{\varphi_i(\xi)}{\omega_i^2}(1-\cos\omega_i t). \tag{32}$$

因此最后我們得到

$$w(x,t)=\frac{P}{\rho A}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_i^2}(1-\cos\omega_i t)\varphi_i(\xi)\varphi_i(x). \tag{33}$$

在这个公式中，x 和 ξ 的地位是对称的．这便是上述倒易定理的具体表現．

2. 自由振动的情况　在这种情况下，外力等于零，因此公式 (14) 簡化为

$$\iiint\{(\rho\dot{u}_{01}+\rho s u_{01})U_2+(\rho\dot{v}_{01}+\rho s v_{01})V_2+(\rho\dot{w}_{01}+\rho s w_{01})W_2\}dV=$$

$$=1,2\text{ 互换所得的結果}. \tag{34}$$

因为 u_0, $\dot{u}_0$, …等与 s 无关，所以將 (34) 式恢复到原函数，便得到（对于 $t>0$）：

$$\iiint\rho\left(\dot{u}_{01}u_2+\dot{v}_{01}v_2+\dot{w}_{01}w_2+u_{01}\frac{\partial u_2}{\partial t}+v_{01}\frac{\partial v_2}{\partial t}+w_{01}\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)dV=$$

$$=1,2\text{ 互换所得的結果}. \tag{35}$$

如果在 $t=0$ 时只有速度而沒有位移，那末公式 (35) 簡化为

$$\iiint\rho(\dot{u}_{01}u_2+\dot{v}_{01}v_2+\dot{w}_{01}w_2)dV=\iiint\rho(\dot{u}_{02}u_1+\dot{v}_{02}v_1+\dot{w}_{02}w_1)dV. \tag{36}$$

如果在 $t=0$ 时只有位移而沒有速度，那末公式 (35) 簡化为

$$\iiint\rho\left(u_{01}\frac{\partial u_2}{\partial t}+v_{01}\frac{\partial v_2}{\partial t}+w_{01}\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)dV=$$

$$=\iiint\rho\left(u_{02}\frac{\partial u_1}{\partial t}+v_{02}\frac{\partial v_1}{\partial t}+w_{02}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)dV. \tag{37}$$

对此式对 t 積分一次，得到

$$\iiint\rho(u_{01}u_2+v_{01}v_2+w_{01}w_2)dV=\iiint\rho(u_{02}u_1+v_{02}v_1+w_{02}w_1)dV. \tag{38}$$

3. 有阻尼的綫性系統

本節我們來討論有阻尼的綫性系統的倒易定理．先假定物体中的內阻是应变率的綫性函数，并且耗散函数（即單位时間單位体積內的能量耗散）是应变率的二次齐次式．在这个假設下，应力与应变的关系可以表示为[1)]：

1) 为了書寫方便起見，我們在外文字母上加一点以表示該量对 t 的微分，例如 $\dot{\epsilon}_x=\frac{\partial\epsilon_x}{\partial t}$.

$$\sigma_x=a_{11}\epsilon_x+a_{12}\epsilon_y+a_{13}\epsilon_z+a_{14}\gamma_{yz}+a_{15}\gamma_{xz}+a_{16}\gamma_{xy}+$$
$$+\mu_{11}\dot{\epsilon}_x+\mu_{12}\dot{\epsilon}_y+\mu_{13}\dot{\epsilon}_z+\mu_{14}\dot{\gamma}_{yz}+\mu_{15}\dot{\gamma}_{xz}+\mu_{16}\dot{\gamma}_{xy},$$
$$\sigma_y=a_{12}\epsilon_x+a_{22}\epsilon_y+a_{23}\epsilon_z+a_{24}\gamma_{yz}+a_{25}\gamma_{xz}+a_{26}\gamma_{xy}+$$
$$+\mu_{12}\dot{\epsilon}_x+\mu_{22}\dot{\epsilon}_y+\mu_{23}\dot{\epsilon}_z+\mu_{24}\dot{\gamma}_{yz}+\mu_{25}\dot{\gamma}_{xz}+\mu_{26}\dot{\gamma}_{xy}, \tag{39}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tau_{xy}=a_{16}\epsilon_x+a_{26}\epsilon_y+a_{36}\epsilon_z+a_{46}\gamma_{yz}+a_{56}\gamma_{xz}+a_{66}\gamma_{xy}+$$
$$+\mu_{16}\dot{\epsilon}_x+\mu_{26}\dot{\epsilon}_y+\mu_{36}\dot{\epsilon}_z+\mu_{46}\dot{\gamma}_{yz}+\mu_{56}\dot{\gamma}_{xz}+\mu_{66}\dot{\gamma}_{xy}.$$

式中 $\mu_{11}, \mu_{12}, \cdots, \mu_{66}$ 是粘性系数．由于物体可以是非均匀的，所以 $\mu_{11}, \mu_{12}, \cdots, \mu_{66}$ 是坐标 x, y, z 的函数．再設外阻是速度的綫性函数．选擇适当的坐标軸后，我們可以把运动方程寫成如下的形式：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\left(f_x-c_1\frac{\partial u}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\left(f_y-c_2\frac{\partial v}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0, \tag{40}$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\left(f_z-c_3\frac{\partial w}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0;$$

这里 c_1, c_2, c_3 是外阻系数．設边界条件仍为 (4) 和 (5)．設起始条件为：

在 $t=0$ 时，

$$u=v=w=0,\quad \dot{u}=\dot{v}=\dot{w}=0. \tag{41}$$

总起來說，本問題的解应当滿足方程 (1)，(39)，(40)、边界条件 (4)，(5) 和起始条件 (41)．

在这种情况下，取 (39)，(40) 两式的拉普拉斯轉換，得到

$$\Sigma_x=(a_{11}+s\mu_{11})E_x+(a_{12}+s\mu_{12})E_y+(a_{13}+s\mu_{13})E_z+$$
$$+(a_{14}+s\mu_{14})\Gamma_{yz}+(a_{15}+s\mu_{15})\Gamma_{xz}+(a_{16}+s\mu_{16})\Gamma_{xy},$$
$$\Sigma_y=(a_{12}+s\mu_{12})E_x+(a_{22}+s\mu_{22})E_y+(a_{23}+s\mu_{23})E_z+$$
$$+(a_{24}+s\mu_{24})\Gamma_{yz}+(a_{25}+s\mu_{25})\Gamma_{xz}+(a_{26}+s\mu_{26})\Gamma_{xy}, \tag{42}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{xy}=(a_{16}+s\mu_{16})E_x+(a_{26}+s\mu_{26})E_y+(a_{36}+s\mu_{36})E_z+$$
$$+(a_{46}+s\mu_{46})\Gamma_{yz}+(a_{56}+s\mu_{56})\Gamma_{xz}+(a_{66}+s\mu_{66})\Gamma_{xy}.$$

$$\frac{\partial \Sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+[F_x-(c_1s+\rho s^2)U]=0,$$
$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \Sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}+[F_y-(c_2s+\rho s^2)V]=0, \tag{43}$$
$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \Sigma_z}{\partial z}+[F_z-(c_3s+\rho s^2)W]=0.$$

关系式(1)和边界条件(4)，(5)的拉普拉斯轉換仍为(8)和(11)，(12)。

可以看到，方程(8)，(42)，(43)和边界条件(11)，(12)規定了一个平衡問題。在这个平衡問題里，物体的彈性系数为 $a_{11}+s\mu_{11}$，$a_{12}+s\mu_{12}$，…，$a_{66}+s\mu_{66}$；所受的体積力是 $F_x-(c_1s+\rho s^2)U$，$F_y-(c_2s+\rho s^2)V$，$F_z-(c_3s+\rho s^2)W$；所受的表面力是 P_x, P_y, P_z。因此利用貝諦的倒易定理可以得到

$$\iiint\{[F_{x1}-(c_1s+\rho s^2)U_1]U_2+[F_{y1}-(c_2s+\rho s^2)V_1]V_2+$$
$$+[F_{z1}-(c_3s+\rho s^2)W_1]W_2\}dV+\iint(P_{x1}U_2+P_{y1}V_2+P_{z1}W_2)dS=$$
$$=1,2\text{互換所得的結果}. \tag{44}$$

消去上式中左右两端相同的項，我們得到

$$\iiint(F_{x1}U_2+F_{y1}V_2+F_{z1}W_2)dV+\iint(P_{x1}U_2+P_{y1}V_2+P_{z1}W_2)dS=$$
$$=1,2\text{互換所得的結果}. \tag{45}$$

此式与公式(15)完全一样，因此上節第一小節(起先是靜止的情况)所得的結論同样适用于本節。例如由此可知：在具有阻尼的綫性系統的某点 A 加上外力所引起的 B 点的位移，等于在 B 点加上同样大小同样变化的外力所引起的 A 点的位移。

例如設在 A 点的載荷 $P_1e^{i\omega t}$ 使 B 点所產生的位移为 $P_1\delta_{21}(t)$，在 B 点的載荷 $P_2e^{i\omega t}$ 使 A 点所產生的位移为 $P_2\delta_{12}(t)$，那末根据倒易定理有

$$\delta_{12}(t)=\delta_{21}(t). \tag{46}$$

当 t 很大时，δ_{12} 和 δ_{21} 都趋近于周期运动：

$$\delta_{12}=A_{12}e^{i(\omega t-\varphi_{12})},\quad \delta_{21}=A_{21}e^{i(\omega t-\varphi_{21})}, \tag{47}$$

于是有

$$A_{12}=A_{21},\quad \varphi_{12}=\varphi_{21}. \tag{48}$$

此式表示在簡諧周期运动的情况，振幅与相角滿足倒易定理。

4. 倒易定理的一些应用

1. 直梁的撓度傾度公式　在研究連續梁与剛架的固有振动与強迫振动时，常常要

用到直梁的撓度傾度公式．設有一直梁 AB 以圓周頻率 ω 作簡諧周期振动．設 A, B 两端的撓度为 Δ_A 和 Δ_B，傾角为 θ_A 和 θ_B，弯矩为 M_A 和 M_B，切力为 V_A 和 V_B（这些量的正方向規定为如圖 3 所示）．根据叠加原理，我們可以知道

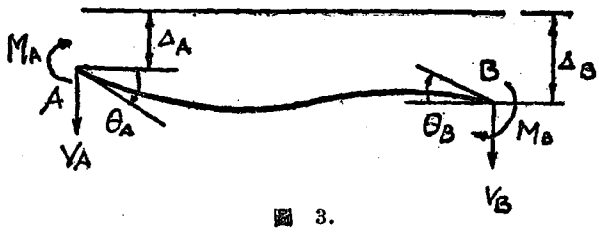

圖 3.

$$
\begin{aligned}
M_A&=S_{11}\theta_A+S_{12}\theta_B+P_{11}\Delta_A+P_{12}\Delta_B,\\
M_B&=S_{21}\theta_A+S_{22}\theta_B+P_{21}\Delta_A+P_{22}\Delta_B,\\
V_A&=Q_{11}\theta_A+Q_{12}\theta_B+R_{11}\Delta_A+R_{12}\Delta_B,\\
V_B&=Q_{21}\theta_A+Q_{22}\theta_B+R_{21}\Delta_A+R_{22}\Delta_B.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

式中的系数 S_{11}, S_{12}, … 等与 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B 无关，而只与梁的力学性質和頻率 ω 有关．再根据倒易定理，我們有

$$
\begin{aligned}
&S_{12}=S_{21},\quad P_{11}=Q_{11},\quad P_{12}=Q_{21},\\
&P_{21}=Q_{12},\quad P_{22}=Q_{22},\quad R_{12}=R_{21}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

因此公式 (49) 簡化为

$$
\begin{aligned}
M_A&=S_{11}\theta_A+S_{12}\theta_B+Q_{11}\Delta_A+Q_{21}\Delta_B,\\
M_B&=S_{12}\theta_A+S_{22}\theta_B+Q_{12}\Delta_A+Q_{22}\Delta_B,\\
V_A&=Q_{11}\theta_A+Q_{12}\theta_B+R_{11}\Delta_A+R_{12}\Delta_B,\\
V_B&=Q_{21}\theta_A+Q_{22}\theta_B+R_{12}\Delta_A+R_{22}\Delta_B,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

这样公式中独立的系数从原來的 16 个减少到 10 个．注意这个公式的成立是与截面及質量分布是否均匀无关，并且还可有綫性的內外阻尼．在梁截面及質量分布对梁中心对称的情况下，从对称关系可知：

$$
S_{11}=S_{22},\quad R_{11}=R_{22},\quad Q_{11}=-Q_{22},\quad Q_{12}=-Q_{21},
\tag{52}
$$

于是公式 (51) 進一步簡化为

$$
\begin{aligned}
M_A&=S_{11}\theta_A+S_{12}\theta_B+Q_{11}\Delta_A-Q_{12}\Delta_B,\\
M_B&=S_{12}\theta_A+S_{11}\theta_B+Q_{12}\Delta_A-Q_{11}\Delta_B,\\
V_A&=Q_{11}\theta_A+Q_{12}\theta_B+R_{11}\Delta_A+R_{12}\Delta_B,\\
V_B&=-Q_{12}\theta_A-Q_{11}\theta_B+R_{12}\Delta_A+R_{11}\Delta_B.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

这样，独立的系数减少到6个。

2. 直梁固定端弯矩的計算　在研究連續梁和剛架的強迫振动时，还常常要計算已知的周期載荷所產生的固定端弯矩。設有一两端夾住的直梁 AB，梁上有分布載荷 $q(x,t)=p(x)e^{i\omega t}$。現在要計算 A 端的固定端弯矩 M_A。我們先來考慮一个輔助問題如下(圖5)：在梁的 A 端加一周期力矩 $M'_A=me^{i\omega t}$，使得 A 端的傾角为 $\theta_A=1\cdot e^{i\omega t}$。命这

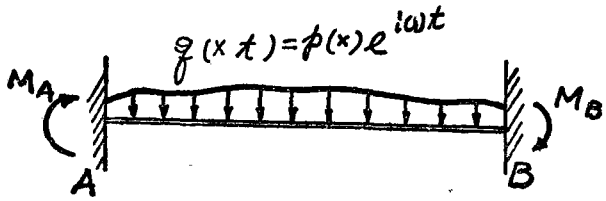

圖 4

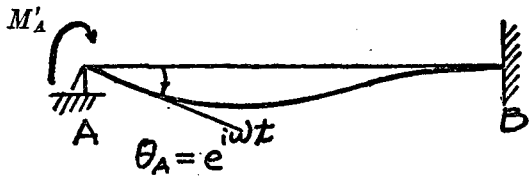

圖 5.

种場合下梁的撓度为 $w(x,t)=y(x)e^{i\omega t}$，于是采用与平衡問題相同的步驟，从倒易定理我們可以得到

$$M_A=e^{i\omega t}\int p(x)y(x)dx. \tag{54}$$

从这个公式可以看到，$y(x)$ 的性質与平衡問題中的影响綫相同。对于較复雜的載荷，特别对于集中力，利用公式(54)來計算固定端弯矩要比直接計算方便得多。同时求得了 $y(x)$ 之后，我們就能够簡單地算出在各种載荷作用下的固定端弯矩。

例如对于一个均匀的直梁，設 EI 是抗弯剛度，m 是單位長度內的質量，l 是長度，那末 $y(x)$ 滿足下列方程及边界条件：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}-m\omega^2y=0,$$

在 $x=0$ 处，

$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=1, \tag{55}$$

在 $x=l$ 处，

$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0.$$

解此方程,得到

$$y=A\left\{\cosh k\left(1-\frac{x}{l}\right)-\cos k\left(1-\frac{x}{l}\right)\right\}+B\left\{\sinh k\left(1-\frac{x}{l}\right)-\sin k\left(1-\frac{x}{l}\right)\right\}, \quad (56)$$

其中

$$k=l\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}, \quad A=\frac{l(\sinh k-\sin k)}{2k(1-\cosh k\cos k)}, \quad B=-\frac{l(\cosh k-\cos k)}{2k(1-\cosh k\cos k)}. \quad (57)$$

3. 关于彈性半平面的振动(平面問題) 設有一个彈性半平面. 設在不同深度的各点的彈性系数和密度不相同, 但在同一深度的各点的彈性系数和密度相同. 設在A点突然加上一个不变的單位豎向力所引起的B点的水平位移为$u(t)$, 在A点突然加上一个不变的單位水平向力所引起的B点的豎向位移为$v(t)$(参考圖6). 現在我們來証明

$$u(t)=v(t). \quad (58)$$

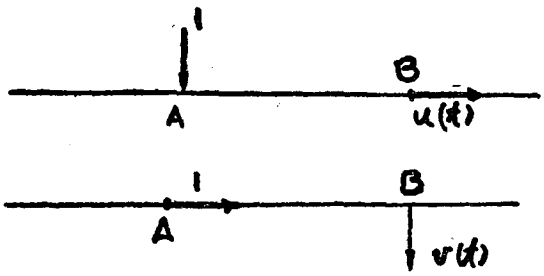

圖 6.

根据倒易定理, $u(t)$等于在B点突然加上一个不变的單位水平向力所引起的A点的豎向位移. 再从A, B两点对称的关系可以看到,后者等于$v(t)$. 这样就証明了(58)式.

对于各向同性的和均匀的半平面, H. 郎伯[6]从具体的計算証明了(58)式. 上面的証明表明此式适用于各向异性的和非均的半平面的.

4. 关于剛性基础的强迫振动 設有一彈性地基上的剛性基礎. 在基礎上作用着周期性的外力使它產生簡諧周期运动. 为了要計算基礎的振幅和相角, 必須先知道地基的反作用力. 設基礎与地基接触面的位移为$ue^{i\omega t}$, $ve^{i\omega t}$, $we^{i\omega t}$; 轉角为$\psi_x e^{i\omega t}$, $\psi_y e^{i\omega t}$, $\psi_z e^{i\omega t}$; 地基的反作用力是$F_x e^{i\omega t}$, $F_y e^{i\omega t}$, $F_z e^{i\omega t}$; 反作用力矩是$M_x e^{i\omega t}$, $M_y e^{i\omega t}$, $M_z e^{i\omega t}$. 从綫性关系和倒易定理,我們有

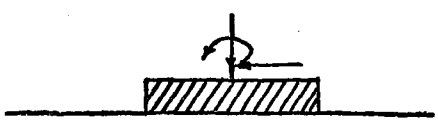

圖 7.

$$
\begin{aligned}
F_x &= a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + a_{14}\psi_x + a_{15}\psi_y + a_{16}\psi_z, \\
F_y &= a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w + a_{24}\psi_x + a_{25}\psi_y + a_{26}\psi_z, \\
F_z &= a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w + a_{34}\psi_x + a_{35}\psi_y + a_{36}\psi_z, \\
M_x &= a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w + a_{44}\psi_x + a_{45}\psi_y + a_{46}\psi_z, \\
M_y &= a_{51}u + a_{52}v + a_{53}w + a_{54}\psi_x + a_{55}\psi_y + a_{56}\psi_z, \\
M_z &= a_{61}u + a_{62}v + a_{63}w + a_{64}\psi_x + a_{65}\psi_y + a_{66}\psi_z.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

式中 a_{ij} 为与頻率 ω 有关的常数，并且

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 6). \tag{60}$$

由此可知，我們要决定的系数不是 36 个而是 21 个．这 21 个系数可以用理論方法來决定，也可以用实驗方法來决定．特别是用实驗方法决定 a_{ij} 后，便可以核对一下公式 (60) 是否成立，也即核对一下是否可以把地基看作是綫性彈性系統．

在地基具有对称性的情况，公式 (59) 可以得到很大的簡化．例如在 x, y 軸都是对称軸的情况，公式 (59) 可以簡化为

$$
\begin{aligned}
&F_x = a_{11}u + a_{15}\psi_y, \quad F_y = a_{22}v + a_{24}\psi_x, \quad F_z = a_{33}w, \\
&M_x = a_{24}v + a_{44}\psi_x, \quad M_y = a_{15}u + a_{55}\psi_y, \quad M_z = a_{66}\psi_z.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

这样，需要决定的常数减少到 8 个．

5. 关于防振建筑的問題　防振措施大致可以分为两类：一类設置在振源或它的周圍，使得振源的振动不易影响周圍的建筑物．另一类設置在普通建筑物或它的周圍，使它不易受外來振动的影响．簡單地說，第一类是防止振动傳出的措施，第二类是防止振动傳入的措施．現在我們应用倒易定理來討論这两类防振措施的联系．

設 A, B 是地面上的两点，A 是振源，B 是普通建筑物，如圖 8 所示．設在沒有防振措施以前，A 点的振动对 B 点有較大的影响，設在 A 点附近設置了防振措施之后，A 点的振动对 B 点的影响有所减小．根据倒易定理，在 A 点設置防振措施之后，B 点的振动对 A 点的影响也必同时减小．由此可知，防止振动向某方向傳出的措施，同时也具有防止振动从同方向傳入的作用．反过來我們也可以証明，防止振动从某方向傳入的措施，同时也具有防止振动向同方向傳出的作用．由此可知上述两类防振措施是有着密切的联系的．

圖 8.

基礎对建筑物的防振有很大的作用．防震建筑的基礎应当具有防止地震經过基礎傳入上層建筑的作用．有些机器的基礎应当具有防止机器的振动經过基礎傳出的作

用。根据上面的結論可知，防止傳入和防止傳出的作用必然存在于同一基礎。由此可知：研究防震基礎可以充分利用在机器基礎方面已取得的成就；同样，研究机器基礎也可以充分利用防震基礎方面已取得的成就。

这里需要注意的是一般机器基礎的防振作用，主要是防止振动沿地面傳播，并不要求振动不向地基內部傳播。因此，如果將这类基礎用于抗震建筑，那末它只具有防止从水平向傳來的地震的作用，而不具有防止从地基深处傳來的地震的作用。

参 考 文 献[1)]

[1] Рэлей, Теория звука, 1955, том 1, стр. 175, Гостехиздат.

[2] Steinheil, A., Über die Verwendung von Reziprozitätsbezienungen bei der Untersuchung mechanischer Schwingungen. *Z. Tech. Phys.*, **14** (1933), 36—39.

[3] Фурдуев, В. В., Теоремы взаимности, 1948, Гостехиздат.

[4*] Андреев, Н. Н., Теорема взаимности в теории линейных колебаний и в акустике. *Физ. Словарь*, **1** (1936), 458.

[5] Graffi, D., Über den Reziprozitätssatz in der dynamik der elastische Körper. *Ing.-Arch.*, **22** (1954), 45—46.

[6] Lamb, H., On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. A, **203** (1904).

[7*] Frola, E., Su di una generalizzazione dinamica del teorema di Betti diversa da quella die Lord Rayleigh. *Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. nat.* (6), **25** (1937), 586—589.

[8*] Frola, E., L'estensione dei teoremi di Castigliano alla dinamica. *Atti. Accad. Sci., Torino*, **74** (1939), 438—447.

[9*] Малмейстер, А. К., Приложение теоремы о взаимности виртуальной работы к теории упругих колебаний. *Уч. зап. Латвийского Ун-та*, **4** (1953), 91—105.

ON THE RECIPROCAL THEOREMS IN THE DYNAMICS OF ELASTIC BODIES AND SOME APPLICATIONS

HU, HAI-CHANG

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper the reciprocal theorems in the dynamics of elastic bodies are systematically explained and extended to the case of anisotropic and nonhomogeneous elastic bodies with linear internal and external damping. Applications are made to problems of structural dynamics, theory of elasticity and vibration prevention.

1) 为了全面起見，將作者沒有見到的有关文献(打有 * 號的)也列在下面。