基于经典塑性理论的应变梯度硬化关系 1)

陈少华　王自强

（非线性力学国家重点实验室，中科院力学研究所，北京 100080）

摘要　发展了 Acharya-Bassani 应变梯度理论，在经典塑性理论框架下，保持增量平衡方程及边界条件，未引进高阶应力，当考虑微米尺度下的尺寸效应时，应变梯度仅作为一内变量，提高剪切硬化模量，提出一种增量硬化关系，并利用细丝扭转进行验证，理论结果与实验结果吻合很好。

关键词　尺寸效应，应变梯度，硬化关系

引　言

大量实验表明，在微米尺度下发生非均匀塑性变形时，金属材料呈现出非常强的尺寸效应。1994 年，Lloyd[1]通过实验观察到碳化硅粒子加强铝基体复合材料，保持 15%颗粒体积分不变，粒子的直径从 16 μm 减小到 7.5 μm，复合材料的强度显著增加。微米硬度和纳米硬度的测量中发现，金属材料硬度的平方根值随着压痕深度的减小线性增加[2, 3]。1994 年 Fleck[4]等人进行细铜丝扭转试验，发现当铜丝直径从 170 μm 降至 12 μm 时，无量纲化扭矩显著增大。1998 年 Stolken 和 Evans[5]的薄梁弯曲试验观察到当梁厚度从 50 μm 降至 12.5 μm 时，无量纲弯矩显著增加。传统的塑性力学理论不能预测到微米尺度下材料的这种尺度依赖性。为了解释这些现象，发展微尺度下连续介质理论是非常有必要的。Fleck 和 Hutchinson 从应力偶理论出发，发展了两种现象学理论[6,7]；1999 年 Gao 与 Huang[8]发展了一种基于机制的应变梯度理论。这几种应变梯度理论都引进了高阶应力。与此相对的是 1995 年 Acharya 与 Bassani[9]提出一种可能的流动理论公式设想，保持经典塑性理论的框架，应变梯度效应仅作为一内变量，提高硬化模量，但没有给出建立具体硬化模量的系统方法。本文发展了这种设想，提出一种硬化关系，并分析了细铜丝扭转现象，理论结果与实验结果吻合很好。

1　硬化关系

假设位移场 u_i，则应变场为 $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，应变梯度为 $\eta_{ijk}=u_{k,ij}$。应变梯度偏量为：$\eta'_{ijk}=\eta_{ijk}-(\delta_{ik}\eta_{jpp}+\delta_{jk}\eta_{ipp})/4$。根据文[10]，等效应变梯度定义为

$$\eta^2=\left(\frac{l_1}{l}\right)^2\eta_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}+\left(\frac{l_2}{l}\right)^2\eta_{ijk}^{(2)}\eta_{ijk}^{(2)}+\left(\frac{l_3}{l}\right)^2\eta_{ijk}^{(3)}\eta_{ijk}^{(3)} \tag{1}$$

如取 $l_{CS}^2=2l_2^2+12l_3^2/5$，$l_2=\sqrt{6/5}l_3$，上式可写为

$$\eta=\sqrt{(l_1/l_{CS})^2\eta_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}+\chi_e^2} \tag{2}$$

其中 $\chi_{ij}=\theta_{i,j}$，$\chi_e=\sqrt{2\chi_{ij}\chi_{ij}/3}$。

在经典塑性力学中，硬化关系为

$$\dot{\sigma}_e=f'(\varepsilon_e)\dot{\varepsilon}_e \tag{3}$$

1) 中国科学院王宽诚博士后工作奖励基金资助课题

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 $\sigma_e=\sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2}$，$S_{ij}$ 为应力偏量。

当考虑应变梯度时，引进材料长度尺度 l，硬化模量是 ε_e 和 $l\eta$ 的函数，具体硬化形式为

$$\dot{\sigma}_e=f'(\varepsilon_e)\left(1+\frac{l^2\eta^2}{\varepsilon_e^2}\right)\dot{\varepsilon}_e=h(\varepsilon_e,l\eta)\dot{\varepsilon}_e \tag{4}$$

2 算例——细铜丝扭转

取直角坐标系 (x_1,x_2,x_3) 及柱坐标系 (r,θ,x_3)，x_3 轴即细丝的中心轴，a 为细丝的半径，κ 为单位长度扭转角，速度场为经典力学中圆柱扭转的速度场

$$v_1=-\kappa x_2x_3,\quad v_2=\kappa x_1x_3,\qquad v_3=0 \tag{5}$$

则位移场为

$$u_1=-\kappa x_2x_3,\quad u_2=\kappa x_1x_3,\qquad u_3=0 \tag{6}$$

与文[4]中相似，f 函数取为

$$f(\varepsilon_e)=\sigma_0\varepsilon_e{}^N \tag{7}$$

则方程(4)可写为

$$\dot{\sigma}_e=N\sigma_0\varepsilon_e^{N-1}\left(1+\frac{l^2\eta^2}{\varepsilon_e^2}\right)\dot{\varepsilon}_e \tag{8}$$

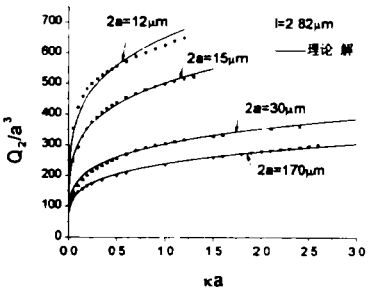

图 1 理论解与实验结果的比较

通过横截面上应力取矩及面积分，得到利用硬化关系(8)求得的扭矩为

$$Q_2=\frac{2\pi a^3}{(N+3)(\sqrt{3})^{N+1}}\sum{}_0(\kappa a)^N\left[1+\frac{3(N+3)l^2}{(N+1)a^2}\right] \tag{9}$$

Q_2 与表面应变 κa 理论关系曲线与文献[4]中实验结果比较如图 1 所示，其中 $l=2.82\mu m$。

参 考 文 献

1 Lloyd DJ. Particle reinforced aluminum and magnesium matrix composites. *Int Mater Rev*, 1994, 39: 1～23

2 Ma Q, Clarke DR. Size dependent hardness in silver single crystals. *J Materials Research*, 1995, 10: 853～863

3 Nix WD, Gao H. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. *J Mech Phys of Solids*, 1998, 46: 411～425

4 Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, Hutchinson JW. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metal et Mater*, 1994, 42: 475～487

5 Stolken JS, Evans AG. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater*, 1998, 46: 5109～5115

6 Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys of Solids*, 1993, 41: 1825～1857

7 Fleck NA, Hutchinson JW. Strain Gradient Plasticity. Advances in Applied Mechanics, ed. JW Hutchinson and TY Wu, New York: Academic Press, 1997, 33. 295～361

8 Gao H, Huang Y, Nix WD, Hutchinson JW. Mechanism-based strain gradient plasticity ——I theory. *J Mech Phys of Solids*, 1999, 47: 1239～1263

9 Acharya A, Bassani JL. On non-local flow theories that preserve the classical structure of incremental boundary value problems. In: Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials, IUTAM Symposium, Paris, Aug 29-Sept 1, 1995

10 Smyshlyaev VP, Fleck NA. The role of strain gradients in the grain size effect for polycrystals. *J Mech Phys of Solids*, 1996, 44: 465～495

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net