

不可压流动摄动有限差分方法及其应用

朱力立, 张德良, 高智

(LHD 实验室, 中科院力学所, 北京 100080)

摘要: 本文发展了不可压流动摄动有限差分(PFD)格式, 分别对不可压缩二维方腔流动、后台阶和前台阶流动进行了数值模拟。并把 PFD 格式的数值结果和一阶迎风、二阶迎风、三阶紧致格式以及 SOLA 方法的数值结果进行了比较, 结果表明摄动有限差分(PFD)方法在宽广的 Re 数范围内具有明显的特点和优势。

关键词: 摄动有限差分方法, 迎风格式, 紧致格式, SOLA 方法

1 引言

摄动有限差分(PFD)方法^[1,2]的基本思想是利用摄动解析方法来构造格式, 它把微分方程差分离散的概念加以扩充, 既离散微商项又离散非微商项(包括源项和微商系数)。对微商项使用直接差分(指一阶迎风和二阶中心差分)近似, 把对非微商项摄动展开成空间步长的幂级数, 通过消除摄动格式修正微分方程的截断误差项提高精度, 由此获得高精度 PFD 格式。

摄动有限差分方法与其他方法相比有其明显的特点和优点: 首先对流项具有非线性的性质, 对该系数进行摄动展开, 可以在不增加基点数的条件下使格式精度提高; 其次摄动有限差分格式具有迎风性, 能真实反映物理解的迎风效应且能有效抑制数值振荡。第三, 摄动差分方程的边界条件和原物理问题的边界条件完全一致, 因此计算中边界处理简单。

本文首先推导摄动差分格式, 作为应用的第一步我们利用二阶摄动差分格式对典型的不可压流动: 方腔流、前台阶流、后台阶流进行了计算, 计算结果和一些有关的方法进行了比较, 比较结果表明摄动有限差分方法能成功的数值模拟不可压缩流动。

2 摄动有限差分方法

对流扩散方程为:

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S \quad [2.1]$$

其中 ϕ 为扩散量, S 为源项。它的一阶迎风差分格式为:

$$\frac{v}{\Delta x^2} \left[\left(1 - \frac{1-\alpha}{2} u_i \frac{\Delta x}{v}\right) \phi_{i+1} - (2 + \alpha u_i \frac{\Delta x}{v}) \phi_i + \left(1 + \frac{1+\alpha}{2} u_i \frac{\Delta x}{v}\right) \phi_{i-1} \right] + S_i = 0 \quad [2.2]$$

$$\text{其中 } \alpha = \begin{cases} 1 & (u_i > 0) \\ 0 & (u_i = 0) \\ -1 & (u_i < 0) \end{cases}$$

把迎风格式中的非微商项 u_i 和 S_i 按步长 Δx 进行摄动展开:

$$u_{p_i} = u_i + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Delta x^n, S_p = S_i + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta x^n \quad [2.3]$$

把式[2.3]代入格式[2.2],得到一阶迎风格式的摄动差分格式, 摄动差分格式的修正方程为:

$$u_{p_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\alpha u_{p_i}}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x + \left(\frac{v}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{u_{p_i}}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) \Delta x^2 + \frac{\alpha u_{p_i}}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Delta x^3 +$$

$$\left(\frac{2v}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} - \frac{u_{p_i}}{5!} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \right) \Delta x^4 + \dots + E_{2n-1} \Delta x^{2n-1} + E_{2n} \Delta x^{2n} + S_{p_i} \quad [2.. 4]$$

其中 E_n 为 Δx^n 项的系数。利用对流扩散方程自身的特性, 可以得到以下的递推关系式

$$\frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial x^{n+2}} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} - S_p - E_{p1} \Delta x - E_{p2} \Delta x^2 - \dots \right) \quad [2.. 5]$$

由此得到确定摄动展开系数 u_m 和 S_m 的一组关系式, 并获得各阶精度的 PFD 格式。

例如方程[2.1]的二阶精度摄动差分格式(PHD)为:

$$\frac{v}{\Delta x^2} \left\{ \left[1 - \frac{1-\alpha}{2v} u_i \Delta x + \frac{(1-\alpha)u_i^2 \Delta x^2}{4v} \right] \phi_{i+1} - \left[2 + \frac{\alpha u_i \Delta x}{v} + \frac{u_i^2 \Delta x^2}{2v} \right] \phi_i \right.$$

$$\left. + \left[1 + \frac{1+\alpha}{2v} u_i \Delta x + \frac{(1+\alpha)u_i^2 \Delta x^2}{4v} \right] \phi_{i-1} \right\} + (S_i + \frac{\alpha u_i}{2} \Delta x) = 0 \quad [2. 6]$$

对二维对流扩散方程

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S \quad [2.. 7]$$

首先把它分裂为

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} S + S_c \quad [2.8.1]$$

$$v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} S - S_c \quad [2.8.2]$$

其中 u 、 v 和 S 是 x 和 y 的函数, 运算中间量 S_c 为常数, 在以 (x_i, y_i) 为中心的离散单元上

对 x 轴有 $u(x, y) = u(x, y_i)$ $S(x, y) = S(x, y_i)$; 对 y 轴有 $v(x, y) = v(x_i, y)$;

$S(x, y) = S(x_i, y)$ 。从方程[2.8.1]和[2.8.2]一阶迎风差分格式出发, 首先分别得到各自的

PFD 格式, 然后将两者相加以消去 S_c 项得到二维方程[2.7]的 PFD 格式。

我们把摄动有限差分方法的思想用到 NS 方程组, 二维不可压 NS 方程组为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [2.9]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad [2.10.1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad [2.10.2]$$

连续方程采用二阶中心差分近似，我们对动量方程发展摄动差分(PFD)格式。在动量方程中需要计算两个方向上的速度 $u_{i,j}$ 和 $v_{i,j}$ ，在摄动差分中将压力项作为源项，文中用后向差分来近似，最后可以得到 NS 方程组的半离散 PFD 形式为

$$D = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = 0 \quad [2.11]$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{u_y}{u_{pj}\Delta x^2} \left[\left(1 - \frac{1-\alpha_1}{2} u_{pj}\Delta x\right) u_{i+1,j} - (2 + \alpha_1 u_{pj}\Delta x) u_{ij} + \left(1 + \frac{1+\alpha_1}{2} u_{pj}\Delta x\right) u_{i-1,j} \right] \\ & + \nu \frac{v_y}{v_{pj}\Delta y^2} \left[\left(1 - \frac{1-\alpha_2}{2} v_{pj}\Delta y\right) u_{i,j+1} - (2 + \alpha_2 v_{pj}\Delta y) u_{ij} + \left(1 + \frac{1+\alpha_2}{2} v_{pj}\Delta y\right) u_{i,j-1} \right] \\ & + \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta x} = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{u_y}{u_{pj}\Delta x^2} \left[\left(1 - \frac{1-\alpha_1}{2} u_{pj}\Delta x\right) v_{i+1,j} - (2 + \alpha_1 u_{pj}\Delta x) v_{ij} + \left(1 + \frac{1+\alpha_1}{2} u_{pj}\Delta x\right) v_{i-1,j} \right] \\ & + \nu \frac{v_y}{v_{pj}\Delta y^2} \left[\left(1 - \frac{1-\alpha_2}{2} v_{pj}\Delta y\right) v_{i,j+1} - (2 + \alpha_2 v_{pj}\Delta y) v_{ij} + \left(1 + \frac{1+\alpha_2}{2} v_{pj}\Delta y\right) v_{i,j-1} \right] \\ & + \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta y} = 0 \end{aligned} \quad [2.12]$$

$$\begin{aligned} \text{对二阶 PFD} \quad u_{pj} &= \frac{u_y \Delta x}{\nu} + \frac{\alpha_1}{2!} \left(\frac{u_y \Delta x}{\nu} \right)^2 \\ v_{pj} &= \frac{v_y \Delta y}{\nu} + \frac{\alpha_2}{2!} \left(\frac{v_y \Delta y}{\nu} \right)^2 \end{aligned} \quad [2.13]$$

$$\begin{aligned} \text{对四阶 PFD} \quad u_{pj} &= \frac{u_y \Delta x}{\nu} + \frac{\alpha_1}{2!} \left(\frac{u_y \Delta x}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{u_y \Delta x}{\nu} \right)^3 + \frac{\alpha_1}{4!} \left(\frac{u_y \Delta x}{\nu} \right)^4 \\ v_{pj} &= \frac{v_y \Delta y}{\nu} + \frac{\alpha_2}{2!} \left(\frac{v_y \Delta y}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{v_y \Delta y}{\nu} \right)^3 + \frac{\alpha_2}{4!} \left(\frac{v_y \Delta y}{\nu} \right)^4 \end{aligned} \quad [2.14]$$

3 摄动有限差分格式的数值算例与结果分析

本文对一些典型的不可压缩流动进行了计算，并对计算结果进行了分析。

1. 二维方腔流动：Cavity 流动是典型的二维算例^[3]，在正方形腔体上方有流体通过。左

右和下边界为固壁，上方流体的流速为 $x(1-x)$ 。对 Re 数为 100 和 1000，图 3.1.1 和 3.1.2 给出 PFD 格式计算结果的流线分布。

2. 二维后台阶绕流：后台阶流动的流动区域示意图见图 3.2.1。图 3.2.3 和 3.2.4 给出 PFD 格式计算结果的流线分布。计算结果与 Benchmark 数值结果^[4]一致，能正确反映后台阶流动的物理现象。

3. 二维前台阶绕流：前台阶流动的流动区域示意图见图 3.2.2。计算显示在 Re 数较低为 100 时台阶前后涡不明显，见图 3.2.5；而在 Re 数较高时台阶前有明显的涡，在台阶后方的涡不明显，见图 3.2.6。计算结果仍符合实际流动的物理现象。

上述三个算例中分别给出了 $Re=100, 1000$ 的计算结果，计算结果表明摄动差分方法计算不可压粘性流动是可行的，能准确反映粘性流动的基本特征，和 Benchmark 结果^[3]相符。

4 摄动有限差分与其他几种格式的比较

为了分析摄动有限差分格式的特点，对方腔流动，我们把 PFD 格式的计算结果与一阶迎风、二阶迎风、三阶紧致格式和改进的 MAC 方法（即 SOLA 方法）的结果作了比较。图 4.1.1—图 4.1.3 分别为各种方法在相对较高的 Re 数下的典型流线分布图。在 $Re=5000$ 的条件下，三阶紧致格式已得不到正确的结果。

具体的数值计算结果与摄动有限差分方法的比较参见表 4.1~表 4.3，由于二阶中心差分在最大网格雷诺数 $\max(Re_{\Delta})$ 约大于 4 时难以得到有效结果，因此表中没有列入二阶中心差分的数据。：

表 4.1. 各种方法计算时间的比较

时间(S) Re 数	PFD	三阶紧致	一阶迎风	二阶迎风	SOLA 方法
50	18	—	50	—	360
100	40	17	122	75	374
200	75	30	233	107	430
500	144	80	412	173	515
1000	170	130	638	—	1600
3000	95	214	1100*	—	—
5000	86	76	1290*	—	—

(注：计算在 PIII500 上运行， $\Delta t = 0.01$ ，网格数 50×50 。“—”表示在该计算条件下难以得到有效数据，“*”为网格数 100×100 的结果。)

表 4.2. 各种方法中心下壁面附近摩阻参数 $\times 10^{-3}$

摩阻参数 Re 数	PFD	三阶紧致	一阶迎风	二阶迎风	SOLA 方法
100	-1.377	-1.353	-1.396	-1.369	-1.740
200	-1.313	-1.395	-1.384	-1.355	-1.653
500	-1.197	-1.419	-1.373	-1.331	-1.067
1000	-0.953	-1.441	-1.056	—	-0.436
3000	-0.424	-1.057	-0.487	—	-0.377
5000	-0.258	-0.200	-0.366	—	—

(“—”表示在该计算条件下得不到有效数据)

表 4.3. 各种方法中心最大速度及其与标准结果比较

中心最大速度 Re 数	PFD	三阶紧致	一阶迎风	二阶迎风	SOLA 方法	标准结果
100	0.20173	0.20159	0.20127	0.20132	0.19712	0.202
200	0.19665	0.19674	0.19670	0.19656	0.19425	0.197
500	0.18135	0.18206	0.18092	0.18199	0.17980	0.183
1000	0.16743	0.17001	0.16854	—	0.16673	0.169

（“—”表示在该计算条件下难以得到有效数据）

表 4.4 列出一些格式的守恒性、稳定性、准确性和经济性的比较，其中守恒性是指满足关系式：

$$(\phi_i)_e = (\phi_{i+1})_w \quad [4.1.1]$$

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right)_e = \left(\frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}\right)_w \quad [4.1.2]$$

其中下标 e 表示右端，w 表示左端。

表 4.4. 各种方法守恒性、稳定性、准确性与经济性的比较

No.	格式	守恒性	稳定性	基点数	迎风性
1	中心差分	有	条件稳定 $Re_\Delta \leq 2$	3	无
2	一阶迎风	有	绝对稳定	3	有，但数值粘性大于物理粘性。
3	二阶迎风	无	绝对稳定	5	有
4	摄动有限差分	有	绝对稳定	3	有

通过对方腔流动计算结果分析，我们可以得到以下一些看法：

(1) 摄动有限差分格式的格式稳定性好。在同样的计算条件下，它能在 50 到 5000 的雷诺数范围内获得有效的计算结果。而三阶紧致格式在同样的雷诺数范围内能有效收敛，但在 Re 数为 5000 时，大涡发生变形，小涡计算不出，参见图 4.1.9。

(2) 二阶摄动有限差分格式精度高，能很好模拟流场及其变化规律。一阶迎风格式模拟流场精度稍低，但捕捉涡形状也较清晰。三阶紧致格式在 Re 为 100 时壁面左下角的小涡流线出现中断，Re 为 5000 时大涡出现变形。SOLA 方法在低 Re 数范围内能清晰分辨大涡和两边小涡，在 Re 数 1000 时右端小涡形状不合理，计算结果不可信。

(3) 通过对计算时间的比较，在同样的计算条件下，三阶迎风紧致格式计算速度最快，摄动有限差分方法也较快，迎风格式计算时间稍长，SOLA 方法计算时间约大一个量级。

(4) 根据粘性应力和 $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 成正比的规律，下壁面中心附近切向流速 u 对 y 坐标的导数是

反映方腔流动壁面摩擦的参量，它的无量纲形式具有 $Re^{-\frac{1}{2}}$ 的量级，应该随 Re 数增大而单调减小。摄动有限差分方法和一阶迎风格式该参量呈现单调下降的趋势，并且数值相

近(见表 4.2),因此能较准确地反映上述物理规律。而三阶紧致格式的摩阻参量随 Re 数的增加先出现缓慢增加,后又突然下降,与物理规律出现明显差别,说明三阶紧致格式在边界附近存在一定缺陷。采用四阶紧致格式和一些特殊处理,如见文[5],避免了这一缺陷。

(5)由格式[2.10]说明了摄动有限差分格式对导数的离散,边界条件的处理和物理问题相一致,数值结果证实了上述结论。

(6)摄动有限差分方法和网格尺寸的参量有关。本文算例的计算发现,摄动有限差分方法在网格数增多的情况下,不仅格式计算结果更准确,而且格式的稳定性也有所增加。

5 结论

摄动有限差分(PFD)方法在不可压缩流动中的数值模拟是成功的。它的突出优点是: Re 数应用范围广,计算结果能反映物理真实,边界条件简单。PFD 方法在不可压缩流动计算中值得推广与应用。

参考文献

- 1 Gao Z. "An infinite-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation." :Proc. of Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics. Sept, 1994, Sichuan, China
- 2 高智. "摄动有限差分方法研究进展". 力学进展, 第 30 卷, 第 2 期, 200~215
- 3 Peyret, R. and Tayler, T.D. , "Computational Methods for Fluid Flow", Springer-Verlag, New York (1983).
- 4 Taylor, T.D. and Ndefo, E. , In: "Lecture Notes in physics", No. 8, 356-364, Springer-Verlag, N. Y. (1971).
- 5 于欣 "解非定常不可压缩 N-S 方程的迭代压力 Poisson 方程法", 计算数学, 2001, 23(4), 447-456

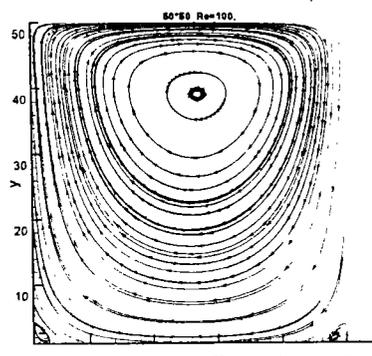


图 3.1.1 二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 100, 网格数 50×50

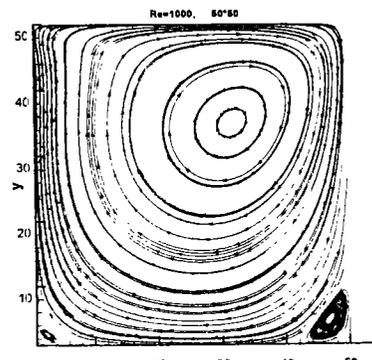


图 3.1.2 二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 1000, 网格数 50×50

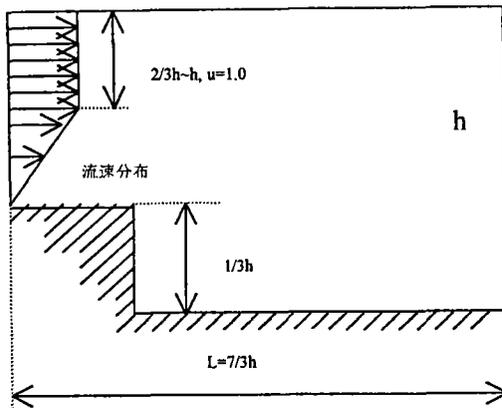


图 3.2.1 二维后台阶绕流流动

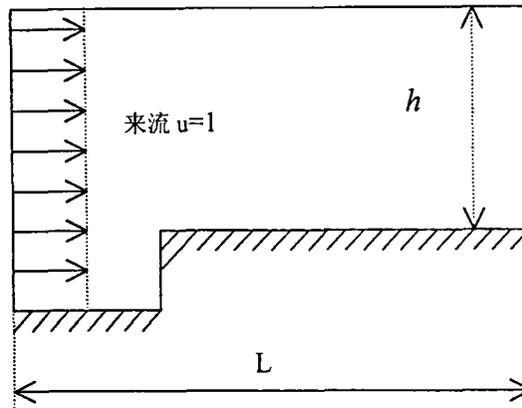
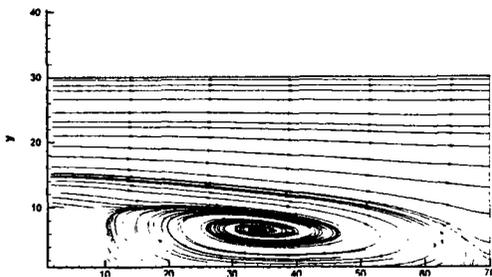
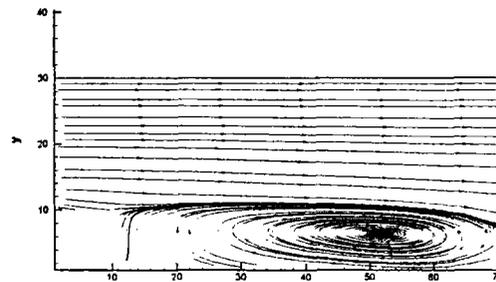


图 3.2.2 二维前台阶绕流流动



3.2.3 二维后台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 100, 网格数 30×70



3.2.4 二维后台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 1000, 网格数 30×70

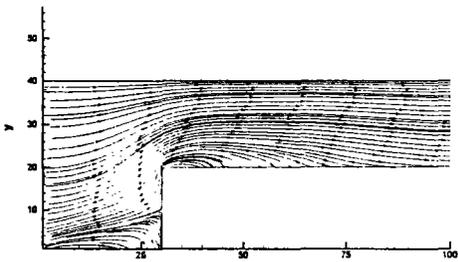
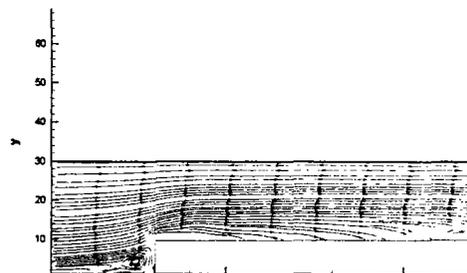
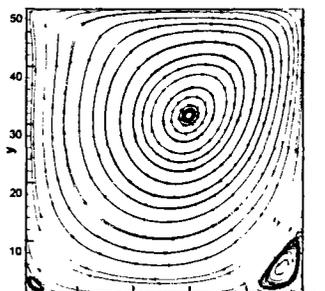


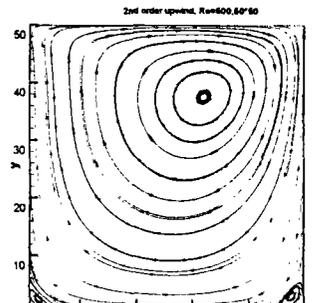
图 3.2.5 二维前台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 100, 网格数 40×100



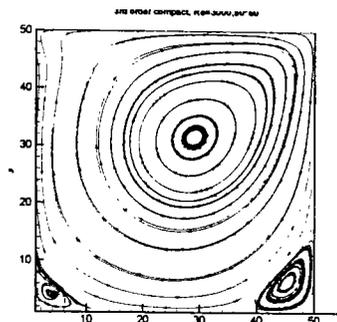
3.2.6 二维前台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 1000, 网格数 30×120



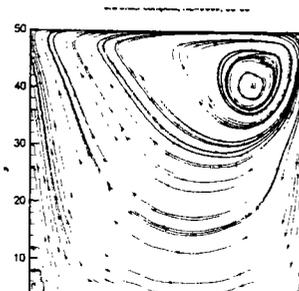
4.1.1 二维方腔流一阶迎风格式计算结果流线分布图, Re 数 1000, 网格数 50×50



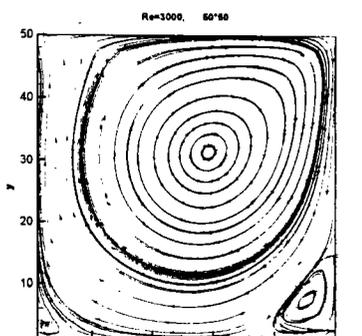
4.1.2 二维方腔流二阶迎风格式计算结果流线分布图, Re 数 500, 网格数 50×50



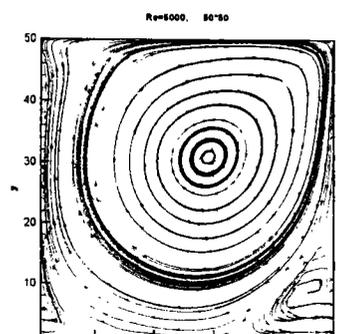
4.1.3 二维方腔流三阶紧致格式计算结果流线分布图, Re 数 3000, 网格数 50×50



4.1.4 二维方腔流三阶紧致格式计算结果流线分布图, Re 数 5000, 网格数 50×50



4.1.5 二维方腔流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 3000, 网格数 50×50



4.1.6 二维方腔流 PFD 格式计算结果流线分布图, Re 数 5000, 网格数 50×50

Perturbation Finite Difference Scheme for Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations

Lili Zhu , D.L.Zhang , Z Gao

(Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The Perturbation Finite Difference (PFD) Scheme incompressible NS equations are presented in this paper. The PFD scheme is used to solve two dimensional cavity flow, backward-facing step flow and forward-facing step flow. The numerical results of the present PFD scheme are compared with those given by the first-order upwind, second-order upwind, third-order Compact schemes and SOLA method. Some excellent properties of PFD scheme in numerically simulating incompressible flows are verified.

Key words: Perturbation Finite Difference Scheme, Upwind Scheme, Compact Scheme, SOLA Method