

一种基于平均场理论的格栅材料均匀化方法

刘其鹏¹ 刘晓宇²

(1 大连交通大学土木与安全工程学院 116028 大连; 2 中国科学院力学研究所 100190 北京)

摘要: 将颗粒材料中发展的一种基于平均场理论的解析均匀化方法应用于二维周期格栅材料; 依据尺度分离原理和统计均匀表征元概念构建了格栅材料的两尺度均匀化模型, 包括细观杆件单元的本构关系、细观位移-宏观应变关系式以及应力的细观力学表达式; 推导了两种二维周期格栅材料等效弹性参数包括弹性模量、泊松比和剪切弹性模量的细观力学表达式。结果表明: 等边三角形结构等效为各向同性连续体时, 弹性参数表达式与文献中其他方法所得结果一致; 正方形结构均匀化为正交各向异性连续体时, 主平面内弹性模量等于杆件单元轴向刚度, 泊松比和剪切弹性模量分别由杆件单元的泊松比和剪切刚度决定, 符合正方形格栅材料的力学特性; 对于非主平面内的正方形本构矩阵, 选取坐标轴与材料主轴夹角为 45° 的方向为例进行推导, 本文方法与坐标变换方法所得结果一致。以上结果均验证了本文所发展方法的有效性。

关键词: 平均场理论; 格栅材料; 均匀化; 等效弹性参数

中图分类号: O34 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.31.01.D007

1 引言

周期性微结构的格栅材料(lattice materials, 又称多孔固体, cellular solids)具有质量轻、比强度和比刚度高等优点, 可作为轻质构件、隔热材料和吸能装置等被广泛应用于土木工程以及航空航天等领域。国内外众多学者已经对格栅材料的等效弹性性能开展了大量研究。早期多采用梁理论进行直接分析, 假定格栅材料的基本构件为梁单元, 通过在单轴或双轴加载条件下分析其应变和应力状态, 获得材料的等效弹性属性^[1-2]。随着固体力学领域中多尺度分析方法的研究和发展, 均匀化技术在格栅材料等效力学性能分析中得到了一定的发展和应用, 其中应用最广泛的是基于数学的渐进均匀化理论。该

方法通过小参数摄动展开法建立细观尺度单胞与宏观尺度连续体模型之间的关系, 现已被广泛应用于格栅结构的静、动力学特性分析^[3-4]。第三种方法是基于单胞的均匀化方法, 即通过将相邻节点位移做 Taylor 展开建立细观杆单元与宏观分量之间的联系, 通过假定单胞与连续体能量等价^[5-6]或数值试验^[7]获得材料的等效弹性属性。

近年来, 一种基于平均场理论的解析均匀化方法越来越受到人们的关注。该方法基于尺度分离原理和统计均匀表征元(representative volume element, RVE)概念, 以满足平均场理论基本假定为标准, 直接建立细观位移-内力场与宏观变形-应力场之间的显式关系, 再结合具体的细观本构模型得到解析形式的多尺度本构关系。该方法已应用于颗粒材料领域^[8-10]。虽然统计均匀表征元概念也适用于格栅类

基金项目: 国家自然科学基金(11202042; U1234209)

收稿日期: 2013-02-23

修回日期: 2013-09-22

第一作者简介: 刘其鹏, 男, 1981年生, 博士, 大连交通大学, 副教授; 研究方向——多尺度力学模拟方法。E-mail: liuqp@djtu.edu.cn

复合材料^[11], 但相应的均匀化方法尚未充分发展。本文将上述方法应用于二维周期格栅材料, 构建相应的两尺度均匀化模型, 并针对一类典型的周期格栅材料建立宏观弹性本构张量的细观力学表达式, 推导等边三角形和正方形周期结构的等效弹性参数细观力学表达式, 并与文献中已有结果进行对比和分析, 从而验证本文所发展方法的有效性。

2 格栅材料两尺度均匀化途径

2.1 格栅材料两尺度描述

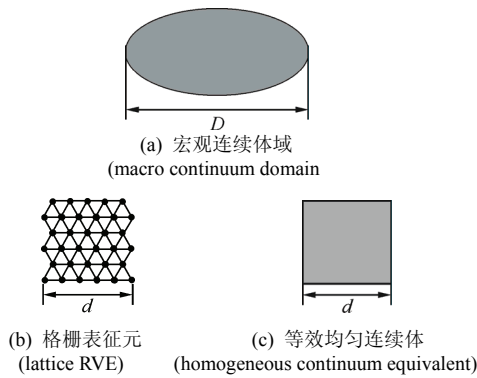


图1 格栅材料的两尺度描述
Fig.1 Two-scale description of lattice materials

格栅材料的细宏观两尺度描述如图1所示。图1(a)表示所研究问题的宏观域, 其尺度为 D , 采用均匀化的连续体模型描述。域内每个质点对应于一个细观尺度上的格栅结构表征元, 其尺度为 d , 如图1(b)所示, 表征元内包含足够多的杆件单元以满足统计均匀性特征。按照平均场理论, 该格栅结构表征元可以等效化为一个均质连续体表征元, 如图1(c)所示。

2.2 细观本构模型

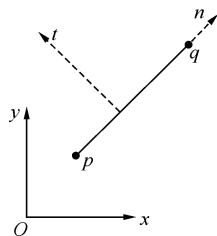


图2 微结构内典型杆件单元
Fig.2 A typical rod element in the microstructure

如图2所示, 微结构表征元内典型杆件(编号为 c)的两端节点位移分别为 \mathbf{u}^p 和 \mathbf{u}^q , 则两节点相对位移 \mathbf{u}^c 表示为

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{u}^q - \mathbf{u}^p \quad (1)$$

若用 \mathbf{f}^c 表示编号为 c 的杆件的内力, 则在局部坐标系 $n-t$ 下, 杆件单元的弹性本构关系可表示为

$$f_n^c = k_n^c u_n^c \quad (2)$$

$$f_t^c = k_t^c u_t^c \quad (3)$$

式中: 下标 n 和 t 表示局部坐标系的法向和切向分量; k_n^c 和 k_t^c 为杆件的法向和切向刚度, 假设所有杆件具有相同的属性, 则 k_n^c 和 k_t^c 均为常数, 分别简记为 k_n 和 k_t 。根据式(2)~(3), 考虑矢量在局部 $n-t$ 坐标系与全局 $x-y$ 坐标系之间的转换, 可以得到在全局坐标系下典型杆件的线弹性本构关系, 即

$$f_i^c = K_{ij}^c u_j^c \quad (4)$$

$$K_{ij}^c = k_n n_i^c n_j^c + k_t (\delta_{ij} - n_i^c n_j^c) \quad (5)$$

式中: K_{ij}^c 和 δ_{ij} 分别为杆体刚度张量和单位二阶张量的各分量; n_i^c 为编号为 c 的杆件的法向矢量沿全局坐标轴 i 方向的分量。

2.3 宏观连续体本构模型

宏观采用经典连续体模型, 域内典型质点处的应力、应变分别记为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$, 本构关系为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijst} \bar{\varepsilon}_{st} \quad (6)$$

式中 \bar{C} 为宏观本构张量。

2.4 细-宏观衔接公式

在均匀化方法中, 宏观本构张量需要由微结构物理和几何参数表示。为此需要建立宏观表征量 ($\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$) 与细观表征量 (f_i^c , u_i^c) 之间的关系。宏观应力张量的细观力学表达式已经由不同学者从不同角度给出^[8-10,12]。本节将颗粒材料中常用的一种推导方式应用于格栅材料, 建立格栅材料宏观应力的细观力学表达式。格栅结构内典型节点 p 的平衡方程一般可以表示为

$$\sum_q f_j^{pq} + f_j^{p\beta} = 0 \quad (7)$$

式中: f_j^{pq} 为表征元内编号为 c 的杆件的内力, 即相邻节点 q 对 p 的作用力; $f_j^{p\beta}$ 为节点 p 所受的表征元外部的作用力。对式(7)两端乘以节点 p 的位置向量 x_i^p , 并对域内所有的节点 p 求和得到

$$\sum_p \sum_q x_i^p f_j^{pq} + \sum_p x_i^p f_j^{p\beta} = 0 \quad (8)$$

由于 $f_j^{qp} = -f_j^{pq}$, 并记 $l_i^{pq} = x_i^q - x_i^p$, 则对于编号为 c 的杆件, 上式中第一个求和项可进一步表示为

$$x_i^p f_j^{pq} + x_i^q f_j^{qp} = -(x_i^q - x_i^p) f_j^{pq} = -l_i^{pq} f_j^{pq} \quad (9)$$

因此, 有

$$\sum_p \sum_q x_i^p f_j^{pq} = -\sum_c l_i^c f_j^c \quad (10)$$

式(8)中的第二项可以等价表示为

$$\sum_p x_i^p f_j^{p\beta} = \sum_\beta x_i^\beta f_j^\beta \quad (11)$$

式中 β 表示边界节点。因此式(8)可改写为

$$\sum_\beta x_i^\beta f_j^\beta = \sum_c l_i^c f_j^c \quad (12)$$

另一方面, 根据平均场理论中关于平均应力的定义, 并利用表征元内的平衡方程, 有

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{kj} x_i) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_S n_k \sigma_{kj} x_i dS = \frac{1}{V} \int_S x_i t_j dS = \frac{1}{V} \sum_\beta x_i^\beta f_j^\beta \end{aligned} \quad (13)$$

式中 V 为表征元的体积。综合式(12)~(13), 并考虑应力张量的对称性, 可以得到格栅材料等效应力张量的表达式为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_{c=1}^N (l_i^c f_j^c + f_i^c l_j^c) \quad (14)$$

式中 N 为表征元内杆件单元总数。

由于细观结构往往不满足运动学意义上的协调关系, 宏观应变 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 与细观位移 u_i^c 之间的关系仍然是均匀化领域的一个难点问题, 通常对于不同的微结构需要建立不同的表达式。本文采用细观力学中最常用的均匀应变假定^[8-13], 将微结构表征元内节点 p 的位移表示为

$$u_i^p = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j^p \quad (15)$$

对于二维理想点周期格栅材料(任意两点所连接杆件的数量和方向均相同, 例如如图1所示等边三角形格栅材料), 上述细-宏观衔接关系式既满足细-宏观能量等价条件^[11], 也符合平均场理论关于平均应变的定义和表征元内的静力平衡条件。

2.5 宏观本构张量的细观力学表达式

假定格栅结构中杆件单元具有均一长度 l_0 , 将式(4)~(5)以及式(14)~(15)代入式(6), 经整理得

$$\bar{C}_{ijst} = \frac{l_0^2 (k_n - k_t)}{V} \sum_{c=1}^N \hat{N}_{ijst}^c + \frac{l_0^2 k_t}{4V} \sum_{c=1}^N \tilde{N}_{ijst}^c \quad (16)$$

式中

$$\hat{N}_{ijst}^c = n_i^c n_j^c n_s^c n_t^c \quad (17)$$

$$\tilde{N}_{ijst}^c = \delta_{is} n_j^c n_t^c + \delta_{it} n_j^c n_s^c + \delta_{js} n_i^c n_t^c + \delta_{jt} n_i^c n_s^c \quad (18)$$

在二维情况下, 表征元体积 V 可用面积 S 替代,

则式(16)可进一步写为矩阵-向量形式, 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1121} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2221} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1221} \\ \bar{C}_{2111} & \bar{C}_{2122} & \bar{C}_{2112} & \bar{C}_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{21} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

与式(16)对应的本构矩阵可表示为

$$\bar{C} = (k_n - k_t) \frac{l_0^2}{S} \sum_{c=1}^N \hat{N}^c + \frac{k_t}{4} \frac{l_0^2}{S} \sum_{c=1}^N \tilde{N}^c \quad (20)$$

式中 \bar{C} 、 \hat{N}^c 、 \tilde{N}^c 分别是四阶张量 \bar{C}_{ijst} 、 \hat{N}_{ijst}^c 、 \tilde{N}_{ijst}^c 的矩阵表达式, 指标展开规则与式(19)中的本构矩阵一致。

3 二维周期等边三角形格栅材料的等效弹性参数

如图3所示, 等边三角形的面积为 $A = \sqrt{3}l_0^2/4$, 一个杆件单元所附属的面积为 $S_0 = 2A/3 = \sqrt{3}l_0^2/6$, 整个材料域的面积可表示为 $S = NS_0 = Nl_0^2\sqrt{3}/6$ 。

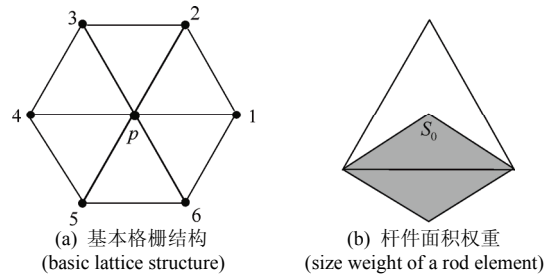


图3 等边三角形格栅材料结构
Fig.3 Equilateral triangular lattice structure

因此, 有

$$l_0^2/S = 6/(\sqrt{3}N) \quad (21)$$

设域内三个方向上的杆子数目相同, 均为 $N/3$ 。另外, 如式(17)~(18)所示, \hat{N}^c 和 \tilde{N}^c 由杆件方向 n_i^c 确定, 而对于二维等边三角形结构, 只有三个不同的方向, 因此对于等边三角形结构, 有

$$\sum_{c=1}^N \hat{N}^c = \frac{N}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \hat{N}^\alpha, \quad \sum_{c=1}^N \tilde{N}^c = \frac{N}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{N}^\alpha \quad (22)$$

将式(21)~(22)代入式(20), 得

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{(k_n - k_t)l_0^2}{S} \sum_{c=1}^N \hat{N}^c + \frac{k_t}{4} \frac{l_0^2}{S} \sum_{c=1}^N \tilde{N}^c \\ &= \frac{2(k_n - k_t)}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^3 \hat{N}^\alpha + \frac{k_t}{2\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{N}^\alpha \end{aligned} \quad (23)$$

等边三角形三个方向的单位矢量分别为

$$n_i^{(1)} = [1, 0]^T, \quad n_i^{(2)} = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]^T, \quad n_i^{(3)} = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]^T \quad (24)$$

根据式(20)~(24), 并考虑到应力应变张量的对称性,

可得到二维等边三角形格栅材料的均匀化本构关系

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} (3k_n + k_t) & (k_n - k_t) & 0 \\ (k_n - k_t) & (3k_n + k_t) & 0 \\ 0 & 0 & 2(k_n + k_t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

经典连续介质平面应力情况下的本构关系表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2G(1-\nu^2)/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

式中: E 为杨氏模量; ν 为泊松比; G 为剪切弹性模量。对比式(25)和式(26)得到等边三角形格栅材料等效弹性常数的细观力学表达式为

$$E = \frac{2\sqrt{3}k_n(k_n + k_t)}{(3k_n + k_t)}, \quad \nu = \frac{(k_n - k_t)}{(3k_n + k_t)}, \quad G = \frac{\sqrt{3}(k_n + k_t)}{4} \quad (27)$$

当只考虑杆件的轴向变形时, 有

$$k_n = \frac{E_s t}{l_0}, \quad k_t = 0 \quad (28)$$

式中: E_s 为杆件单元的弹性模量; t 为杆件的宽度。此时式(27)退化为

$$E = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{E_s t}{l_0}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad G = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{E_s t}{l_0} \quad (29)$$

式(29)中的弹性常数表达式与文献中通过简单梁理论获得的表达式一致^[1-2], 并且式(27)和式(29)中的弹性常数均满足 $G = E/[2(1+\nu)]$ 的关系。这表明等边三角形格栅材料均匀化后的等效连续体是各向同性的。

4 二维周期正方形格栅材料的等效弹性参数

如图4所示, 正方形面积为 $A = l_0^2$, 一个杆子所附属的面积为 $S_0 = A/2 = l_0^2/2$, 材料域面积为 $S = NS_0 = Nl_0^2/2$ 。

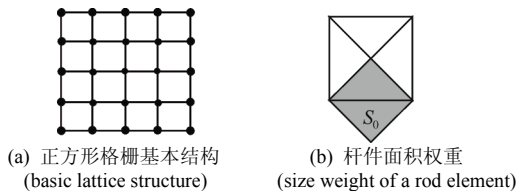


图4 正方形格栅材料结构
Fig.4 Square lattice structure

因此, 有

$$l_0^2 / S = 2 / N \quad (30)$$

设域内两个方向上的杆子数目相同, 均为 $N/2$, 类似于式(22)~(23)的推导, 式(20)可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{(k_n - k_t)l_0^2}{S} \sum_{c=1}^N \hat{N}^c + \frac{k_t l_0^2}{4S} \sum_{c=1}^N \tilde{N}^c \\ &= (k_n - k_t) \sum_{\alpha=1}^2 \hat{N}^\alpha + \frac{k_t}{4} \sum_{\alpha=1}^2 \tilde{N}^\alpha \end{aligned} \quad (31)$$

沿材料对称轴方向的两个单位矢量为

$$\mathbf{n}_i^{(1)} = [1, 0]^T, \quad \mathbf{n}_i^{(2)} = [0, 1]^T \quad (32)$$

将式(32)代入式(31), 并考虑本构张量的对称性, 可以得到正方形格栅材料的均匀化本构关系, 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

与等边三角形格栅材料不同, 正方形格栅材料存在两个互相垂直的材料对称轴, 因此均匀化后表现为正交各向异性, 其连续体本构关系^[14]为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_{12} & 0 \\ \nu_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12}(1-\nu_{12}^2)/E_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

对比式(33)和式(34), 并参考式(28)可以得到

$$E_{12} = E_s t / l_0, \quad \nu_{12} = 0, \quad G_{12} = k_t / 2 \quad (35)$$

其中弹性模量 E_{12} 与文献中已有表达式一致^[2], 而泊松比 $\nu_{12} = 0$ 表示材料在沿 x 方向(或 y 方向)拉压时, 其等效连续体在横向上不发生变形。这是由于细观模型只考虑了杆件的轴向拉压刚度 k_n 和剪切刚度 k_t , 没有考虑杆件本身的泊松效应。对于结构变形占主导的格栅材料(如上节所述等边三角形结构), 其等效泊松比可由 k_n 和 k_t 表示。但是, 对于正方形格栅材料, 不存在结构整体变形导致的泊松效应, 泊松效应完全由基本杆件单元的垂直变形决定, 即: $\nu_{12} = \nu_s t / l_0$ (其中 ν_s 为杆件的泊松比); $G_{12} = k_t / 2$, 这表示等效剪切模量完全由杆件单元的剪切刚度决定。以上分析和论述均符合正方形格栅材料的力学行为特征^[2]。

需要指出的是, 由于正方形格栅材料的各向异性特征, 以上表达式及结论仅适用于坐标轴与材料主轴重合时的情况。对于坐标轴与材料主轴不重合的情况, 需要依照本文所发展的均匀化方法进行相应的推导和分析, 以获得相应方向上的本构关系。图5所示为材料主轴与 x - y 坐标轴夹角呈 45° 的情况。

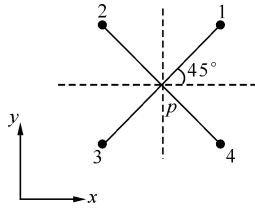


图5 材料主轴为 45° 的正方形格栅结构
Fig.5 Square lattice with 45° material principle axis

此时, 材料主轴的法向矢量为

$$\mathbf{n}_i^{(1)} = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T, \mathbf{n}_i^{(2)} = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T \quad (36)$$

将式(36)代入式(31), 并考虑本构张量的对称性, 可以得到如下形式的均匀化本构关系

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (k_n + k_t) & (k_n + k_t) & 0 \\ (k_n + k_t) & (k_n + k_t) & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

式(37)右端应变向量中的剪应变采用了工程应变的表示方法, 即 $\bar{\gamma}_{12} = 2\bar{\varepsilon}_{12}$ 。另一方面, 式(33)也可以类似地改写为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_t/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

记式(38)中的本构矩阵为 $\bar{\mathbf{C}}^0$ 。主轴方向为 45° 的材料本构矩阵 $\bar{\mathbf{C}}^{45}$ 还可以通过张量的坐标轴旋转公式^[23]求得, 即

$$\bar{\mathbf{C}}^{45} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{C}}^0 \mathbf{T}^T \quad (39)$$

其中转换矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (40)$$

式中 θ 为材料主轴与坐标轴 x 正向的夹角。将 $\theta = 45^\circ$ 代入式(40)、式(39)可以得到

$$\bar{\mathbf{C}}^{45} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{C}}^0 \mathbf{T}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (k_n + k_t) & (k_n + k_t) & 0 \\ (k_n + k_t) & (k_n + k_t) & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

式(41)与式(37)中的本构矩阵一致, 即通过坐标变换得到的本构矩阵与本文均匀化方法所得结果一致, 进一步验证了本文所发展均匀化方法的有效性。

5 结 论

本文将颗粒材料中广泛发展与应用的一种基于平均场理论的均匀化方法引入格栅材料, 依据尺度分离原理构建了二维格栅材料的两尺度均匀化模

型, 给出了细-宏观量衔接公式, 推导了等边三角形结构和正方形结构这两种典型二维周期格栅材料的等效弹性参数的细观力学表达式, 并得出以下结论。

- 1) 等边三角形结构等效为各向同性连续体, 其弹性参数表达式与文献中其他方法所得结果一致。
- 2) 正方形结构均匀化为正交各向异性连续体。主平面内弹性模量等于杆件单元轴向刚度, 泊松比、剪切弹性模量分别由杆件单元的泊松比、剪切刚度决定, 这些结果均符合正方形格栅材料的力学特性。对于非主平面内的本构矩阵, 选取坐标轴与材料主轴夹角 45° 方向为例进行推导, 本文方法与坐标变换方法所得结果一致。

本文方法与其他文献或方法的对比结果验证了本文所发展的均匀化方法的有效性。

参 考 文 献 (References)

- [1] Gibson L J, Ashby F. Cellular solids: structures and properties[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [2] Wang A J, McDowell D L. In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs[J]. ASME Journal of Engineering Materials and Technology, 2004, 126: 137-156.
- [3] 王飞, 庄守兵, 虞吉林. 用均匀化理论分析蜂窝结构的等效弹性参数[J]. 力学学报, 2002, 34(6): 914-923. (Wang Fei, Zhuang Shoubing, Yu Jilin. Application of homogenization FEM to the equivalent elastic constants of honeycomb structures[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(6): 914-923 (in Chinese)).
- [4] Gonella S, Ruzzene M. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattice[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45: 2897-2915.
- [5] Hohe J, Becker W. Effective elastic properties of triangular grid structures[J]. Composite Structures, 1999, 45: 131-145.
- [6] Kumar R S, McDowell D L. Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41: 7399-7422.
- [7] 阎军, 程耿东, 刘书田, 等. 周期性点阵类桁架材料等效弹性性能预测及尺度效应[J]. 固体力学学报, 2005, 26(4): 421-427. (Yan Jun, Cheng Gengdong, Liu Shutian, et al. Prediction of equivalent elastic properties of truss materials with periodic microstructure and the scale effects[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2005, 26(4): 421-427 (in Chinese)).
- [8] Krut N P. Statics and kinematics of discrete Cosserat-type granular materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 511-534.

- [9] Chang C S, Kuhn M R. On virtual work and stress in granular media[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42: 3773-3793.
- [10] 刘其鹏, 李锡夔, 楚锡华. 基于细观方向平均模型的颗粒材料宏观 Cosserat 连续体本构关系[J]. 计算力学学报, 2011, 28(5): 682-687. (Liu Qipeng, Li Xikui, Chu Xihua. The micro-directional model for Cosserat continuum description of granular materials[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(5): 682-687(in Chinese)).
- [11] 胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效弹性性质分析方法[J]. 力学进展, 2001, 31(3): 361-393. (Hu Gengkai, Zheng Quanshui, Huang Zhuping. Micromechanics methods for effective elastic properties of composite materials[J]. Advances in Mechanics, 2001, 31(3): 361-393(in Chinese)).
- [12] Christoffersen J, Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. A micromechanical description of granular material behavior[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1981, 48: 339-344.
- [13] Arroyo M, Belytsekhko T. An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline film[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, 50: 1941-1977.
- [14] 陈建桥. 复合材料力学概论[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 17-19. (Chen Jianqiao. Conspectus of mechanics of composite materials[M]. Beijing: Science Press, 2006: 17-19 (in Chinese)).

Spatial embedded slip model for analyzing prestressed concrete structures

Ma Cheng Chen Weizhen

(Department of Bridge Engineering, Tongji University, 200092, Shanghai, China)

Abstract: The bond-slip effect between prestressing tendon and concrete should be considered in nonlinear finite element analysis of prestressed concrete structures. A spatial embedded slip model is presented on combining advantages of embedded model and discrete model. The bond element simulating the interface of prestressing tendon and concrete is embedded into the composite element through virtual nodes on the intersection points of prestressing tendon and concrete element. The relative slip is obtained through the difference of tangential displacement between the inside and outside face of bond element, and the radial relative deformation between prestressing tendon and concrete is ignored. According to each constitutive model of prestressing tendon, concrete and bond element, stiffness contribution matrixes of three components are deduced and the finite element equilibrium equation is established through virtual work principle on the basis of displacement-based finite element method. Prestressing tendon can cross through concrete in any pattern without considering its direction and six freedoms of two virtual nodes in a single bond element can also be cut in the finite element equilibrium equation by using this slip model.

Keywords: *embedded slip model, virtual node, bond element, virtual work principle, finite element equilibrium equation.*

A homogenization method for the lattice material based on the average-field theory

Liu Qipeng¹ Liu Xiaoyu²

(1 School of Civil and Safety Engineering, Dalian Jiaotong University, 116028, Dalian, China ;

2 Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 100190, Beijing, China)

Abstract: An analytical homogenization method for granular materials based on the average-field theory is applied to the derivation of macro effective elastic properties for 2-D periodic lattice materials, including elastic modulus, Poisson ratio and shear elastic modulus. The two-scale homogenization model is introduced on the basis of the scale separation principle and the statistically homogeneous representative volume element. The model consists of three aspects, i.e. the micro constitutive relation of the rod element, micromechanically based expression of the macro stress tensor, and the macro strains-micro displacements relation. Two typical 2-D periodic lattice structures are analyzed and discussed. The equilateral triangle lattice is homogenized as isotropic continuum and expressions of effective elastic parameters are consistent with the existing results in the literatures. The square lattice is homogenized as orthotropic continuum. In the material principal plane, the elastic modulus expression is equal to the axial stiffness of the rod element, the Poisson ratio and the shear elastic modulus is determined by the Poisson ratio and the shear stiffness of the rod element, respectively. These results accord with the mechanical characteristic of square lattice. For the constitutive behavior in other planes, taking the 45°

direction between coordinate axis and material principal axis as an example, the constitutive matrix via the present method is consistent with the result from the coordinate transformation. These results show the validity of the presented approach.

Keywords: *average-field theory, lattice material, homogenization, effective elastic property.*

Analysis of semi-active control for Mega-sub Controlled Structure System subjected to seismic excitation

Wu Hao Zhang Xun'an Li Jia

(School of Mechanics and Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, 710072, Xi'an, China)

Abstract: The Magneto-Rheological (MR) dampers which had been designed by using fuzzy neural network are installed in Mega-Sub Controlled Structure System (MSCSS) between the mega-structure and sub-structure, and the genetic algorithm is adopted to optimize the rules of fuzzy neural network for enhancing the control efficiency. A semi-active control problem of the MSCSS subjected to seismic excitation is investigated, the time history analysis results under different seismic excitation, like El-Centro seismic wave and Taft seismic wave, which show that the MR dampers can tune sub-structure well and reduce the response of mega-structure substantially, where the maximum displacement responses of top floor have amplitude reduction of 64% and 74%, and the story drift responses have amplitude reduction of 42% and 61%, respectively. Furthermore, the probability density evolutionary method is employed to calculate the random vibration response under earthquake wave power spectrum excitation and the power spectrum has non-stationary characteristics both in amplitude and frequency, the results demonstrate that the semi-active controller installed in the MSCSS can make a decrease of 79% to the time varying mean square value and enhance the structure seismic performance.

Keywords: *Mega-Sub Controlled Structure System, fuzzy neural network, genetic algorithm, semi-active control.*

Mechanical properties of NiMnGa particles/epoxy composites

Liu Yufeng Liang Wei He Yu

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, 100191, Beijing, China)

Abstract: Epoxy matrix composites filled with NiMnGa particles are prepared by curing at room temperature. Based on the related loading-unloading experiment of NiMnGa particles/epoxy composites, the effects of NiMnGa particles' volume fraction on resin matrix composite's elastic and damping properties are analyzed via the mesomechanics in detail. Finite element models of unit cells are also established to calculate the composites' elastic properties. It is shown that along with the increasing of Ni-Mn-Ga volume fraction, the composite's tensile modulus and shear modulus increase and the Poisson ratio decreases. As the decreasing of particle major/minor axis ratio, the composite's longitudinal Poisson ratio increases, the longitudinal tensile modulus decreases, the transverse tensile modulus decreases to a valley value and then increases, and the shear modulus increases to a peak value and then decreases. The results of theoretical calculation, finite element simulation and experiments are in good agreement.

Keywords: *NiMnGa/epoxy composites, mesomechanics, finite element method, elastic properties.*