

磁场中夹层圆板的非线性磁弹性随机振动

王知人^{1,3}, 李瑾婷¹, 王平^{2,3}

(1. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004;
3. 中国科学院力学研究所 国家非线性力学重点实验室 (LNM), 北京 100080)

摘要: 根据板壳磁弹性基本理论、夹层板的弯曲振动理论及连续体的随机振动理论, 得到了在磁场环境中周边固支夹层圆板的非线性随机振动方程; 利用稳态FPK方程法解出了夹层圆板随机振动位移和速度响应的多个数字特征, 并讨论了参数变化对各数字特征的影响。通过数值模拟讨论了磁场参数、激励的功率谱密度参数以及板的几何尺寸的变化对各数字特征的影响。由数值模拟结果可知, 改变随机激励的大小、磁场强度及板的几何尺寸能有效地控制结构随机振动位移的概率分布。

关键词: 磁场; 非线性; 随机振动; 夹层圆板

中图分类号: O342

文献标志码: A 文章编号: 0254-0053(2014)03-0447-10

Nonlinear Magneto-Elasticity Random Vibration of Sandwich Circular Plate in Magnetic Field

WANG Zhi-ren^{1,3}, LI Jin-ting¹, WANG Ping^{2,3}

(1. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, Hebei, China;
2. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, Hebei, China;
3. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences (LNM), Beijing 100080, China)

Abstract: The nonlinear magneto-elasticity random vibration problem of a sandwich circular plate in a magnetic field was analyzed. Based on the magneto-elasticity theory of plates and shells, the bending vibration theory of sandwich plate and the random vibration theory of continuum system, the nonlinear random vibration equation of a sandwich circular plate clamped in magnetic field was obtained. The multiple digital characteristics of the displacement and velocity responses of the random vibration of the circular sandwich plate were solved by using the steady FPK equation method. The influences on the digital characteristics due to the magnetic parameters, power spectral density of the excitation and the change of the geometry size of the plate were discussed by numerical simulation. The simulation results indicate that the probability distribution of the random vibration displacement can be effectively controlled through changing the random excitation, the intensity of magnetic field and the geometry size of the plate.

Key words: magnetic field; nonlinear; random vibration; sandwich circular plate

夹层板通常是由刚度较大的上下约束层和阻尼较大的中间层构成, 在航天、航空和航海等工程实际中得到了广泛的应用。一直以来, 许多研究者对夹层板壳的非线性问题进行了研究。如刘人怀等^[1]建立了具有软夹心和薄表层的夹层矩形板的非线性振动理论, 研究了夹层矩形板的非线性自由振动问题, 获得了非线性周期与振幅的关系式。徐加初等^[2]研究了夹层椭圆形板的非线性自由振动问题, 得到了非线性振动周期与振幅关系的解析表达式, 讨论了物理参数和几何参数对板的非线性振动的影响。杜国君和胡宇达等^[3-4]研究了具有初挠度夹层圆板非线性振动问题和四边简支的正交各向异性矩形层合板的非线性组合

收稿日期: 2014-05-21

基金项目: 河北省自然科学基金(A2012203140)

作者简介: 王知人(1964-), 女, 湖北黄石人, 教授。研究方向: 磁弹性理论及其应用。Email: wangzhiren528@sina.com

共振特性。何蕊等^[5]对随机激励下振动系统的非线性特性进行了研究。而随着电磁结构在高新技术领域中的应用日益增多,电磁弹性相互耦合作用的非线性力学行为的研究也倍受关注。实际上,在磁弹性力学理论方面,Pao 和 Moon 等^[6-7]利用理性力学方法建立了电磁弹性力学的基本理论;Амбарцумян 和 Мольченко 等^[8-9],较早在导电体磁弹性振动问题的研究中取得了一些有价值的成果。Hasanyan 等^[10-11]给出了理想导体板在倾斜磁场中非线性振动的数学模型,并研究了有限导电性板条在磁场中的非线性振动问题。胡宇达^[12]研究了轴向运动导电板磁弹性非线性动力学特性。应祖光等^[13]分析了磁流变粘弹性夹层板在支座随机激励下的微振动响应特性,建立了粘弹性夹层板关于纵横位移的耦合运动微分方程。文献[14]研究了夹层板在磁场中的磁弹性微振动响应。文献[15]研究了表层不导电的夹层板的磁弹性问题。

综上所述,关于夹层板在磁场中的随机振动问题的研究并不多见。鉴于此,本文研究了夹层圆板的非线性随机振动问题。

1 磁场中夹层圆板的非线性随机振动方程

本文所研究的夹层圆板为表层较薄、夹心较软,且表层与夹芯是各向同性材料。表层采用铝合金材料,不具有磁性;夹心采用泡沫材料,在夹心中铺设导线,磁场作用作为力,且不改变材料性质。考虑夹层板的反对称变形,在夹心中假定 $\varepsilon_z = 0$,并假定夹心中 σ_z 很小,因此,在 Hooke 定律中可假定 $\sigma_z = 0$ 。

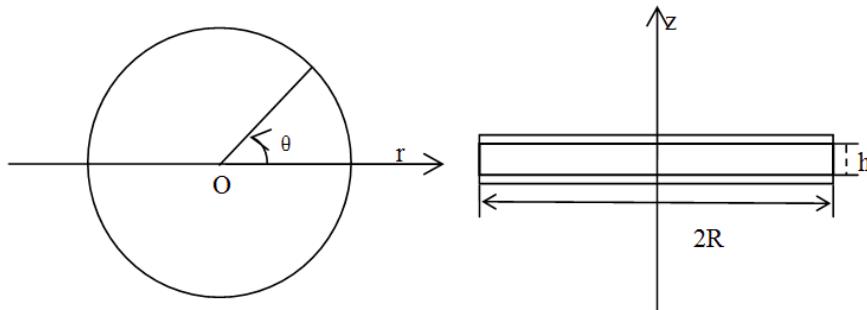


图 1 夹层圆板示意图

Fig.1 schematic of the sandwich circular plate

夹层圆板中面内的线应变为

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1)$$

由广义 Hooke 定律,夹层圆板中面内的径向和环向应力为

$$\sigma_r = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{\nu_f}{r} u + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right], \quad \sigma_\theta = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left[\frac{u}{r} + \nu_f \frac{du}{dr} + \frac{\nu_f}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] \quad (2)$$

u 、 w 为夹层板中面上点沿 r 、 z 方向上的位移。所以,夹层圆板中面力为

$$N_r = \sigma_r h_1, \quad N_\theta = \sigma_\theta h_1, \quad N_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

由假设和广义 Hooke 定律可以得到夹层圆板的总弯矩、总扭矩和总横向剪力为^[16]

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu_f \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \right], \quad M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu_f \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right], \\ M_{r\theta} &= -\frac{D}{2} (1 - \nu_f) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right], \quad Q_r = C \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_r \right), \quad Q_\theta = C \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $D = \frac{E_f(h+h_1)^2 h}{2(1-\nu_f)}$ 为夹层圆板的抗弯刚度, $C = G_c \frac{(h+h_1)^2}{h}$ 为夹层圆板的剪切刚度。 E_f 为表层的弹性模量, ν_f 为表层的泊松系数, h_1 为夹层圆板上、下表层的厚度, G_c 为夹心的剪切模量, h 为夹层圆板夹心的厚度, ψ_r 、 ψ_θ 为夹层圆板中面法线在径向和环向上的转角, w 为夹层板中面上沿 z 方向上的位移。由板轴对称性有 $\psi_\theta = 0$; $M_{r\theta} = 0$; $Q_\theta = 0$ 。

电磁场中电磁力及力矩表达式为^[17]

$$\begin{aligned} F_r &= \sigma h B_z (f_2 + B_r \frac{\partial w}{\partial t} - B_z \frac{\partial u}{\partial t}), \quad F_\theta = \sigma h B_z (f_1 - B_\theta \frac{\partial w}{\partial t} + B_z \frac{\partial v}{\partial t}), \\ F_z &= \sigma h B_\theta (f_1 - B_\theta \frac{\partial w}{\partial t} + B_z \frac{\partial v}{\partial t}) - \sigma h B_r (f_2 + B_r \frac{\partial w}{\partial t} - B_z \frac{\partial u}{\partial t}), \\ m_r &= \frac{\sigma h^3}{12} B_z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r}, \quad m_\theta = \frac{\sigma h^3}{12} B_z^2 \frac{\partial^2 w}{r \partial t \partial \theta} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, σ 为电导率, $B(B_r, B_\theta, B_z)$ 为磁场强度, t 为时间, f_1 、 f_2 为感生的电场, 在计算中可忽略。

在横向磁场 $(0, 0, B_z)$ 中,

$$F_r = -\sigma h B_z^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad F_\theta = -\sigma h B_z^2 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad F_z = 0, \quad m_r = \frac{\sigma h^3}{12} B_z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r}, \quad m_\theta = \frac{\sigma h^3}{12} B_z^2 \frac{\partial^2 w}{r \partial t \partial \theta} \quad (6)$$

由于表层较薄, 夹层板大挠度弯曲运动方程与薄板大挠度弯曲运动方程相同, 再将电磁力作为载荷加到方程中, 得到磁场中夹层圆板的运动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(F_r + P_r) &= r\rho(h+2h_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + r(F_z + P_z) = r\rho(h+2h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta - rN_r \theta_r - rQ_r + rm_r &= \frac{r\rho(h+2h_1)^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial(M_\theta)}{\partial \theta} - rN_\theta \theta_\theta - rQ_\theta + rm_\theta &= \frac{r\rho(h+2h_1)^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, P_r 、 P_z 为 r 、 z 方向的外加载荷, $\theta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$, $\theta_\theta = -\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $\rho = h\rho_c + 2h_1\rho_f$, ρ_c 为夹芯密度,

ρ_f 为表层密度。

将夹层圆板置于横向稳恒磁场 $B(0, 0, B_z)$ 中, 由于轴向和径向位移远远小于 z 方向的位移, 忽略轴向和径向位移及转角引起的惯性转动力, 忽略板自身重力, 将式(7)的第三、第四两式代入第二式中, 可得到夹层圆板的非线性磁弹性振动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(rM_r)}{\partial r^2} + \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{\partial(rN_r \theta_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rm_r)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r\rho(h+2h_1)^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial(N_\theta \theta_\theta)}{\partial \theta} \\ + \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r\rho(h+2h_1)^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial t^2} \right) + r(F_z + P_z) = r\rho(h+2h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

设夹层板受横向随机载荷^[18]

$$P_z(x, y, t) = Q(r)P(t) \quad (9)$$

其中, $Q(r)$ 为确定函数, $P(t)$ 为谱密度 S_0 的理想正态白噪声。

为了化简所得方程，引入函数 ω 、 f

$$\psi_r = \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad w = \frac{D}{G_c(h+h_l)} \nabla^2 \omega - \omega$$

夹层圆板周边固支边界条件为

$$r=R \text{ 时}, \quad \omega=0, \quad \frac{d\omega}{dr}=0, \quad f=0$$

由边界条件可设

$$\omega = T(t) \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right)$$

将上式代入圆板边界条件，可得

$$C_1 = -2, \quad C_2 = 1$$

将式(3)、式(4)、式(6)和圆板边界条件及假设条件代入式(8)，不考虑夹层板中面径向位移，经计算可得下列方程

$$\begin{aligned} & \rho(h+2h_l) \left\{ \left[\left(\frac{4D}{G_c(h+h_l)} + \frac{(h+2h_l)^2}{3} \right) C_1 \frac{1}{R^2} - \frac{(h+2h_l)^2}{3} \frac{16D}{G_c(h+h_l)} C_2 \frac{1}{R^4} - 1 \right] \right. \\ & + \left[\frac{16D}{G_c(h+h_l)} C_2 \frac{1}{R^4} - (4C_2 - C_1) \frac{1}{R^2} \right] r^2 - C_2 \frac{1}{R^4} r^4 \} \ddot{T}(t) \\ & - \frac{\sigma h^3}{3} B_z^2 \left[\left(\frac{16D}{G_c(h+h_l)} C_2 \frac{1}{R^4} - C_1 \frac{1}{R^2} \right) - 4C_2 \frac{1}{R^4} r^2 \right] \dot{T}(t) + D \left[2C_1 \frac{1}{R^2} \frac{1}{r^2} + 4C_2 \frac{1}{R^4} (7 + 6\nu_f) \right] T(t) \\ & - \frac{E_f h_l}{1-\nu_f^2} \left\{ \left\{ \frac{5D^3}{G_c^3(h+h_l)^3} 16^3 C_2^3 \frac{1}{R^6} + \left[\frac{16D^2}{G_c^2(h+h_l)^2} - \frac{5D}{G_c(h+h_l)} - 8 \right] \frac{D}{G_c(h+h_l)} 16^2 C_1 C_2^2 \frac{1}{R^4} \right. \right. \\ & + \left[\frac{16D^2}{G_c^2(h+h_l)^2} + \frac{23D}{G_c(h+h_l)} + 8 \right] 16 C_1^2 C_2 \frac{1}{R^2} - 13 C_1^3 \} \frac{1}{R^6} r^2 \\ & + \left\{ \left[\frac{4D^2}{G_c^2(h+h_l)^2} - \frac{D}{G_c(h+h_l)} - 2 \right] \frac{D}{G_c(h+h_l)} 16^3 C_2^3 \frac{1}{R^4} \right. \\ & + \left[\frac{D}{G_c(h+h_l)} - \frac{6D^2}{G_c^2(h+h_l)^2} - 3 \right] 16^2 C_1 C_2^2 \frac{1}{R^2} - 38 C_1^2 C_2 \} \frac{1}{R^8} r^4 \\ & \left. + \left\{ \left[\frac{13D}{G_c(h+h_l)} - \frac{24D^2}{G_c^2(h+h_l)^2} + 12 \right] 4 \cdot 16 C_2^3 \frac{1}{R^2} - 64 C_1 C_2^2 \right\} \frac{1}{R^{10}} r^6 - 56 C_2^3 \frac{1}{R^{12}} r^8 \right\} T^3(t) = P_z \end{aligned} \tag{10}$$

利用伽辽金原理，方程两边先分别乘以 $(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4})$ ，再对 r 从 0 到 R 积分，经计算可得

$$m \ddot{T}(t) + c_0 \dot{T}(t) + k_0 T(t) + k_1 T^3(t) = GP(t) \tag{11}$$

其中，

$$\begin{aligned}
m &= \rho(h+2h_1)\left\{-\frac{(h+2h_1)^2}{3}\frac{16D}{G_c(h+h_1)}(C_2+\frac{C_1C_2}{3}+\frac{C_2^2}{5})\frac{1}{R^3} + \left[\frac{(h+2h_1)^2}{3}(C_1+\frac{C_1^2}{3}+\frac{C_1C_2}{5})\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{16D}{G_c(h+h_1)}(\frac{C_2}{3}+\frac{C_1C_2}{5}+\frac{C_2^2}{7})\right]\frac{1}{R} + \left[\left(\frac{4D}{G_c(h+h_1)}-1\right)(1+\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{5}) + (4C_2-C_1)(\frac{1}{3}+\frac{C_1}{5}+\frac{C_2}{7})\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - (\frac{C_2}{5}+\frac{C_1C_2}{7}+\frac{C_2^2}{9})\right]R\right\} \\
c_0 &= -\frac{\sigma h^3}{3}B_z^2\left\{\left[\frac{16D}{G_c(h+h_1)}(C_2+\frac{C_1C_2}{3}+\frac{C_2^2}{5})\frac{1}{R^3} - [C_1+\frac{4}{3}C_2+\frac{1}{3}C_1^2+\frac{4}{7}C_2^2+C_1C_2]\frac{1}{R}\right]\right. \\
k_0 &= D[-2C_1+2C_1^2+\frac{2C_1C_2}{3}+4(7+6\nu_f)(C_2+\frac{C_1C_2}{3}+\frac{C_2^2}{5})]\frac{1}{R^3} \\
k_1 &= -\frac{E_f h_1}{1-\nu_f^2}\left\{\frac{5D^3}{G_c^3(h+h_1)^3}16^3C_2^3\frac{1}{R^6} + \left[\frac{16D^2}{G_c^2(h+h_1)^2}-\frac{15D}{G_c(h+h_1)}-8\right]\frac{D}{G_c(h+h_1)}16^2C_1C_2^2\frac{1}{R^4}\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{16D^2}{G_c^2(h+h_1)^2}+\frac{23D}{G_c(h+h_1)}+8\right]\frac{D}{G_c(h+h_1)}16C_1^2C_2\frac{1}{R^2}-13C_1^3\right\}\left(\frac{1}{3}+\frac{C_1}{5}+\frac{C_2}{7}\right) \\
&\quad + \left\{\left[\frac{4D^2}{G_c^2(h+h_1)^2}-\frac{D}{G_c(h+h_1)}-2\right]\frac{D}{G_c(h+h_1)}16^3C_2^3\frac{1}{R^4} + \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)}-\frac{6D^2}{G_c^2(h+h_1)^2}-3\right]16^2C_1C_2^2\frac{1}{R^2}\right. \\
&\quad \left. - 38C_1^2C_2\right\}\left(\frac{1}{5}+\frac{C_1}{7}+\frac{C_2}{9}\right) + \left\{\left[\frac{13D}{G_c(h+h_1)}-\frac{24D^2}{G_c^2(h+h_1)^2}+12\right]4\cdot16C_2^3\frac{1}{R^2}-64C_1C_2^2\right\}\left(\frac{1}{7}+\frac{C_1}{9}+\frac{C_2}{11}\right) \\
&\quad - 56C_2^3\left(\frac{1}{9}+\frac{C_1}{11}+\frac{C_2}{13}\right)\left\}\frac{1}{R^3} \\
G &= \int_0^R Q(r)(1+C_1\frac{r^2}{R^2}+C_2\frac{r^4}{R^4})dr
\end{aligned}$$

2 板的随机振动响应的数字特征

随机振动中非线性体系在理想白噪声干扰下, 方程(10)通过变量代换可转化成如下微分方程^[19]

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{Y})+\bar{\mathbf{G}}\mathbf{P}(t) \quad (12)$$

其中,

$$\mathbf{Y}(t)=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T(t) \\ \dot{T}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{Y})=\begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{1}{m}(c_0y_2+k_0y_1+k_1y_1^3) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Gm^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ P(t) \end{pmatrix}$$

方程(11)相应的稳态 FPK 方程为

$$\frac{\pi S_0 G^2}{m^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y_2^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y_2} [(c_0 y_2 + k_0 y_1 + k_1 y_1^3) p_s] - y_2 \frac{\partial p_s}{\partial y_1} = 0 \quad (13)$$

p_s 为状态变量 $Y(t)$ 的概率密度。 p_s 可由如下方程组求得

$$\begin{cases} (k_0 y_1 + k_1 y_1^3) p_s + \frac{\pi S_0 G^2}{c_0} \frac{\partial p_s}{\partial y_1} = 0 \\ y_2 p_s + \frac{\pi S_0 G^2}{mc_0} \frac{\partial p_s}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

在外干扰是平稳高斯白噪声条件下^[19]，可设

$$p_s(y_1, y_2) = p_{s1}(y_1)p_{s2}(y_2) \quad (15)$$

将其代入方程组，得

$$p_{s1}(y_1) = C_1 \exp\left[-\frac{c_0}{\pi S_0 G^2} \left(\frac{k_0}{2} y_1^2 + \frac{k_1}{4} y_1^4\right)\right], \quad p_{s2}(y_2) = C_2 \exp\left(-\frac{mc_0}{2\pi S_0 G^2} y_2^2\right) \quad (16)$$

则有

$$p_s(y_1, y_2) = C_1 C_2 \exp\left[-\frac{c_0}{\pi S_0 G^2} \left(\frac{k_0}{2} y_1^2 + \frac{k_1}{4} y_1^4 + \frac{m}{2} y_2^2\right)\right] \quad (17)$$

利用概率密度归一化条件可得

$$C_2 = \left(\frac{mc_0}{2\pi^2 S_0 G^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

因此得 $y_2 = \dot{T}(t)$ 的概率密度为

$$p_{s2}(y_2) = \left(\frac{mc_0}{2\pi^2 S_0 G^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mc_0}{2\pi S_0 G^2} y_2^2\right) \quad (19)$$

由正态分布函数的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\bar{m})^2}{2\sigma_1^2}\right] \quad (20)$$

\bar{m} 为平均值， σ_1 为标准离差， σ_1^2 为方差。

可知 $y_2 = \dot{T}(t)$ 是均值为 0，方差为 $\sigma_{y_2}^2 = \frac{\pi S_0 G^2}{mc_0}$ 的正态过程。

在不考虑(11)式非线性项时， $T(t)$ 的方差为 $\sigma_{y_0}^2 = \frac{\pi S_0 G^2}{c_0 k_0}$ 。将 $p_{s1}(y_1)$ 改写成

$$p_{s1}(y_1) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{k_1}{4k_0} y_1^4\right) \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma_{y_0}^2}\right) \quad (21)$$

$\exp\left(-\frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{k_1}{4k_0} y_1^4\right)$ 展成 $\frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{k_1}{4k_0} y_1^4$ 的级数，略去二次及更高次项，利用概率密度归一化条件可得

$y_1 = T(t)$ 的概率密度为

$$p_{s1}(y_1) = [\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{k_1}{k_0} \sigma_{y_0}^2\right) \sigma_{y_0}] \left(1 - \frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{k_1}{4k_0} y_1^4\right) \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma_{y_0}^2}\right) \quad (22)$$

可知 $y_1 = T(t)$ 是均值为 0，方差为

$$\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_0}^2 \left(1 - \frac{15}{4} \frac{k_1}{k_0} \sigma_{y_0}^2\right) \left(1 - \frac{15}{4} \frac{k_1}{k_0} \sigma_{y_0}^2\right)^{-1} \quad (23)$$

由前所设

$$\omega = T(t)(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4}) \quad (24)$$

则有

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \dot{T}(t)(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4}) \quad (25)$$

位移为

$$\begin{aligned} w &= \frac{D}{G_c(h+h_1)} \nabla^2 \omega - \omega \\ &= T(t) \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

位移的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right]^2 \sigma_{y_1}^2 \\ &= \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right]^2 \sigma_{y_0}^2 \left(1 - 3 \frac{k_1}{k_0} \sigma_{y_0}^2 \right) \end{aligned} \quad (27)$$

位移的概率密度为

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma_{y_0}^2(1-3\frac{k_1}{k_0}\sigma_{y_0}^2)}\right) \quad (28)$$

速度为

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{D}{G_c(h+h_1)} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ &= \dot{T}(t) \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

速度方差为

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \sigma_{\frac{\partial w}{\partial t}}^2 = \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right]^2 \sigma_{y_2}^2 \\ &= \left[\frac{D}{G_c(h+h_1)} \left(4C_1 \frac{1}{R^2} + 16C_2 \frac{r^2}{R^4} \right) - \left(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4} \right) \right]^2 \frac{\pi S_0 G^2}{mc_0} \end{aligned} \quad (30)$$

速度的概率密度为

$$p(v) = p\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\frac{\partial w}{\partial t}}} \exp\left[-\frac{y_2^2}{2\frac{\pi S_0 G^2}{mc_0}}\right] \quad (31)$$

3 算例分析

一周边固支夹层圆板的半径为 $R = 1\text{m}$, 夹心厚度为 $h = 0.01\text{m}$, 上下表层厚度为 $h_1 = 0.001\text{m}$. 夹层板表层力学特性参数 : 弹性模量 $E_f = 72\text{GPa}$, 泊松比 $\nu_f = 0.3$, 密度 $\rho_f = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$; 夹层板

夹心力学特性：剪切模量 $G_c = 0.2 \text{ GPa}$ ，电导率 $\sigma = 6.3 \times 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ，密度 $\rho_c = 0.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。取

$$Q(r) = A(1 + C_1 \frac{r^2}{R^2} + C_2 \frac{r^4}{R^4}) \text{, 其中 } A = 10 \text{ N/m}^2 \text{ .}$$

3.1 位移响应和速度响应的方差

将以上各参数代入式(27)、式(30)，取 $r = R$ ，利用 Matlab 软件可画出夹层圆板位移响应和速度响应的方差图，如图 2、图 3 所示。

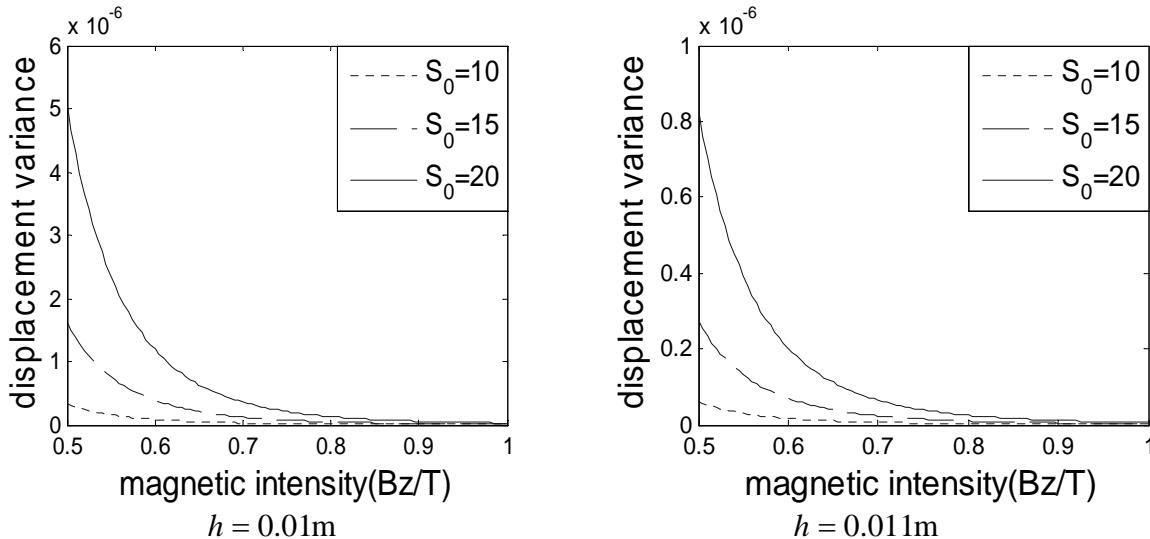


图 2 位移在不同情况下的方差图

Fig.2 variograms of the displacement in different circumstances

从图 2 可以看出：在同一夹心厚度下，位移方差随激励的增大而迅速增大；在相同的激励下，随磁场的增大而迅速减小，当磁场强度达到一定数值时趋于零，位移方差随板厚的增大而减小。

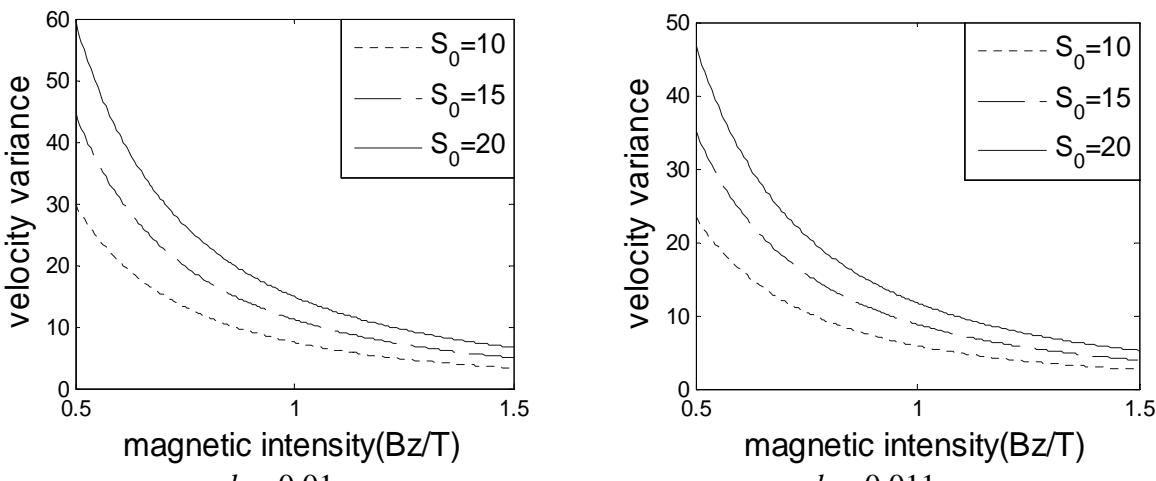


图 3 速度在不同情况下的方差图

Fig.3 variograms of the velocity in different circumstances

从图 3 可以看出：在同一夹心厚度下，速度方差随激励的增大而迅速减小；在相同的激励下，速度方差随磁场的增大而迅速减小，当磁场强度达到一定数值时趋于零，速度方差随板厚的增大而减小。

3.2 位移响应和速度响应的概率密度

将以上各参数代入式(28)、式(31)，取 $r = R$ ，利用 Matlab 软件可画出夹层圆板位移响应和速度响应

的概率密度图, 如图 4 和图 5 所示.

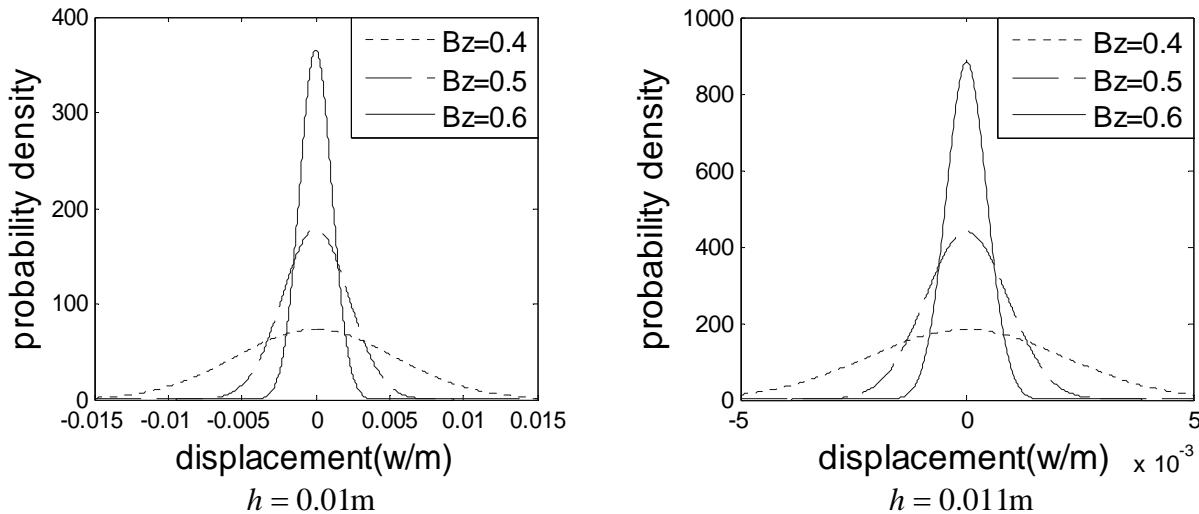


图 4 位移在不同情况下的概率密度图

Fig.4 probability density figure of the displacement in different circumstances

从图 4 中可看出: 位移响应的概率密度服从正态分布, 在同一板厚下, 随着磁场的增大而增大, 密度越来越集中, 在同一磁场下, 随着板厚的增加, 发生较大位移的概率减小.

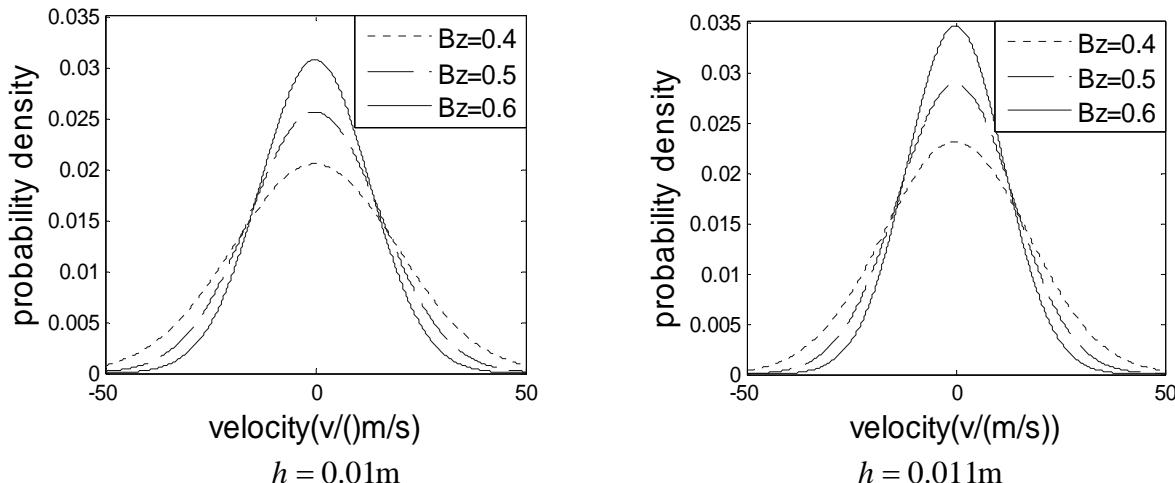


图 5 速度在不同情况下的概率密度图

Fig.5 probability density figure of the velocity in different circumstances

从图 5 中可看出: 速度的概率密度服从正态分布, 在同一板厚下, 随着磁场的增大而增大, 密度越来越集中, 在同一磁场下, 随着板厚的增加, 速度的最大响应发生的概率也越来越小.

4 结论

(1) 根据板壳磁弹性基本理论、随机振动理论和夹层板的弯曲振动理论, 推出夹层圆板的磁弹性非线性随机振动方程; 利用伽辽金原理对夹层圆板的磁弹性非线性随机振动方程进行化简求解, 得到概率密度、方差的解析表达式;

(2) 通过数值计算, 得到了夹层圆板的随机振动位移和速度的概率密度、方差分布, 并对响应位移和速度的概率密度、方差随不同参数的变化进行了分析, 通过磁场和板厚的变化, 可以较好地控制随机振动产生振动位移和速度的概率. 所得研究结果在实际工程中对减振降噪及结构元件的可靠性设计等有一

定的参考价值。

参考文献：

- [1] 刘人怀，吴建成。夹层矩形板的非线性振动[J].中国科学：A辑，1991, 10:1075-1086.
- [2] 徐加初，王乘，刘人怀。夹层椭圆形板的非线性振动[J].振动工程学报，2000, 13(4):585-590.
- [3] 杜国君，张秀礼，胡宇达。具有初挠度夹层圆板非线性振动与解的稳定性[J].振动与冲击，2007, 26(11):156-159.
- [4] 胡宇达，吕书峰，杜国君。复合材料层合板的非线性组合共振特性及分岔[J].复合材料学报，2010, 27(2):176-182.
- [5] 何蕊，罗文波，王本利，等。随机激励下振动系统非线性特性定性方法研究[J].工程力学，2010, 27(4):24-29.
- [6] PAO Y H, YEH C S. A linear theory for ferromagnetic elastic bodies[J]. Int J Eng Sci, 1973, 11(4):415-436.
- [7] MOON F C, PAO Y H. Vibration and dynamic instability of a beam-plat in a transverse magnetic field[J]. J Appl Mech, 1969, 36(2):141-149.
- [8] АМБАРЦУМЯН С А, БАГДАСАРЯНГЕ, БЕЛУБЕКЯН М В. Магнитоупругостьтонкихоболо чекипластиин[M]. Москва: Наука, 1977.
- [9] МОЛЬЧЕНКОЛВ. Магнитоупругость нелинейных токонесущих оболочек[M]. Киев: Выща Школа Наука, 1989.
- [10] HASANYAN D J, KHACHATURYAN G M, PILIPOSYAN G T. Mathematical modeling and investigation of nonlinear vibration of perfectly conductive plates in an inclined magnetic field[J]. Thin Wall Struct, 2001, 39(1):111-123.
- [11] HASANYAN, DAVRESH, LIBRESCU, et al. Nonlinear vibration of finitely electro-conductive plate-strips in a magnetic field[C]// Collection of Technical Papers-AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2003, v4:2827-2837.
- [12] 胡宇达，胡朋。轴向运动导电板磁弹性非线性动力学及分岔特性[J].计算力学学报，2014, 31(2):180-186.
- [13] 应祖光，陈海峰。磁流变粘弹性夹层板随机激励下的微振动响应特性[J].振动与冲击，2012, 31(19):6-9.
- [14] YING Z G, NI Y G. Micro-vibration response of a stochastically excited sandwich beam with a magnet orheological elastomer core and mass[J]. Smart Mater Struct, 2009, 18:1-13.
- [15] ZHOU G Y, WANG Q. Mangnetorheological elastomer-based smart sandwich beams with non conduction skins[J]. Smart Mater Struct, 2005, 14:1004-1009.
- [16] 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组。夹层板壳的弯曲稳定和振动[M].北京：科学出版社，1977.
- [17] 白象忠，田振国。板壳磁弹性力学基础[M].北京：科学出版社，2006.
- [18] 欧进萍，王光远。结构随机振动[M].北京：高等教育出版社，1998.
- [19] 陈予恕，唐云，等。非线性动力学中的现代分析方法[M].北京：科学出版社，2000, 221-223.