

固支矩形薄板通入非平稳随机电流的磁弹性随机振动*

MAGNETO-ELASTIC RANDOM VIBRATION OF A FIXED PLATE WITH NON-STATIONARY RANDOM CURRENT

王平^{**1,3} 徐帅¹ 王知人^{2,3}

(1. 燕山大学河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 秦皇岛 066004)

(2. 燕山大学理学院, 秦皇岛 066004)

(3. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

WANG Ping^{1,3} XU Shuai¹ WANG ZhiRen^{2,3}

(1. Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures of Hebei Province, Qinhuangdao 066004, China)

(2. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(3. The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘要 针对四边固支矩形薄板,以连续体的随机振动理论及板壳磁弹性基本理论为基础,导出了在外加磁场中通入非平稳随机电流情形下矩形薄板的磁弹性随机振动方程。将洛伦兹力耦合项中的一部份假设为薄板的一种阻尼,另一部分假设为非平稳随机均匀分布载荷,分别得到了外加磁场中通入非平稳随机电流时板的随机位移响应的均值、功率谱密度函数等数字特征。针对具体算例,在通以非平稳随机电流的情形下,计算了其位移响应的功率谱密度函数和均方值函数,并绘出了板中心点的位移响应功率谱密度图、速度功率谱密度图及加速度功率谱密度图,并讨论了磁场强度及洛伦兹力耦合项对在非平稳随机电流下的随机位移响应的影响。

关键词 非平稳随机电流 磁弹性 随机振动 功率谱密度函数

中图分类号 O324 O441.4

Abstract The magneto-elastic random vibration equation of a fixed rectangular plate in a magnetic field with non-stationary random current was derived based on magneto-elastic theory and the theory of random vibration of continuous. The random displacement response of the plate was analyzed on the assumptions that one part of the coupled part of the Lorentz force is a kind of damping and the other part is random distributing load. The mathematical expectation, the auto-correlation function, the power spectral density function of the random displacement response of the plate with non-stationary random current were obtained. As an example, the power spectral density function and the mean square value function of the displacement response of a fixed plate with non-stationary random current were calculated. The diagrams of the power spectral density of the displacement response, velocity and acceleration at center point of the plate were shown here. The changes of the diagrams of the power spectral density indicated the effects of the coupled parts of the Lorentz force to the random displacement response.

Key words Non-stationary random current; Magneto-elastic; Random vibration; Power spectral density function

Corresponding author: WANG Ping E-mail:wangpin0721@163.com, +86-335-8074576, Fax: +86-335-8057101

The project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province of China. (No. A2012203140), and the the Open Foundation of the State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, the Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.

Manuscript received 20130617. in revised form 20140218.

引言

产生振动的原因有内因和外因。内因是系统的结构包含质量、弹性及阻尼等各个元件,受到外界激励后会发生振动;外因是系统以外的物体对系统有激励作

用,它们可以是初位移、初速度、冲击、周期性干扰力或随机干扰力,振动可以是确定的,也可以是随机的。如果结构和干扰中有一个是随机的,系统的振动就是随机振动^[1]。随机过程又分为平稳的和非平稳的两类。直观地说,平稳过程是其统计特性不随时间而变的过

* 20130617 收到初稿,20140218 收到修改稿。河北省自然科学基金(A2012203140)、2013 年非线性力学国家重点实验室开放基金资助

**王平,男,1965 年 1 月生,吉林省四平人,汉族,工学博士,研究方向为磁弹性理论及其应用

程,而非平稳过程是其统计特性随时间而变的过程,许多物理过程本质上是非平稳的。例如,在用火箭助推的飞行器领域里,飞行器在起飞、级间分离和快速关车期间的振动环境就是非平稳过程;地震、海浪、爆炸、冲击和其他仅能作统计描述的过渡现象也是非平稳过程^[2]。因此对非平稳随机振动理论的研究具有十分重要的理论意义和实际工程应用价值。国内外不少学者对非平稳随机振动的有关问题展开了研究,已取得了一些有意义的成果。例如,文献[3]利用状态空间中的状态转移矩阵法获得响应的协方差矩阵的分析方法,对具有混合质量阻尼系统的结构非平稳随机振动问题进行了分析。文献[4]通过激励功率谱的分解,建立了多维非平稳地震激励作用下结构随机响应的虚拟激励法。文献[5]提出了考虑轨道高低不平顺时进行车桥耦合系统垂向非平稳随机振动分析的新方法。文献[6]研究了基于正交分解法的非平稳随机振动响应计算。文献[7]提出了一个针对结构非平稳随机响应分析的快速虚拟激励方法。

综上所述,对于处在电磁场和变形场耦合作用下构件的随机振动研究还不多见^[8-9],尤其是在外加磁场中对构件通入非平稳随机电流的非平稳随机振动研究尚未查到相关文献。鉴于此,本文针对外加磁场中通入非平稳随机电流的四边固支矩形薄板,将洛伦兹力耦合项中的一部份假设为薄板的一种阻尼,另一部分假设为非平稳随机分布载荷,研究了薄板的非平稳随机振动问题。并讨论了磁场强度及洛伦兹力耦合项对非平稳随机电流下的随机位移响应的影响。

1 基本方程的建立

采用笛卡尔直角坐标系 $O - xyz$,其中 x, y 位于中面内, z 为法向坐标。仅考虑几何线性情况,由薄板的小挠度理论及磁弹性基本理论,最终得到磁场中薄板运动方程为^[10-11]

$$D_M \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_z + P_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (1)$$

式中,算子 ∇^4 为重调和算子,定义为

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2)$$

$w(x, y, t)$ 是板的横向位移; $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 是板的弯曲刚度, E 是材料的弹性模量, ν 是材料的泊松比, h 为板厚; F_z 表示 z 方向上的电磁力; P_z 表示 z 方向上的外加载荷; m_x, m_y 表示电磁力矩; ρ 为材料的质量密度。

2 磁场中薄板的磁弹性随机振动方程

2.1 薄板的随机振动方程

设矩形薄板长为 a , 宽为 b , 板厚为 h 。板受横向分布力 $P(x, y, t)$ 激励。不考虑外部黏性阻尼和内部黏性阻尼,则上述板的振动方程为^[12]

$$D_M \nabla^4 w(x, y, t) + C_1 I_x \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_1 I_y \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = P(x, y, t) \quad (3)$$

式中 $I_x = \frac{ah^3}{12}$ 、 $I_y = \frac{bh^3}{12}$ 是惯性矩, c_1 为板内线阻尼系数。

2.2 薄板的磁弹性随机振动方程

矩形薄板在横向磁场 $B(B_x, 0, 0)$ 的作用下,通以随机电流 $J = (J_{cx}(t), J_{cy}(t), 0)$ 。由式(1)和式(3),可得到磁场中矩形薄板的磁弹性随机振动方程

$$D_M \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + C_1 I_x \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_1 I_y \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial y^4 \partial t} = F_z + P(x, y, t) + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (4)$$

式中的电磁力和电磁力矩为^[11]

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} (-J_{cy} B_x - J_y B_x) dz$$

$$m_x = 0, m_y = 0 \quad (5)$$

式中 J_{cy} 为外加侧向电流强度沿 y 轴方向的分量; J_y 是矩形薄板内感应电流强度沿 y 轴方向的分量,且有

$$J_y = \sigma(e_y + \frac{\partial w}{\partial t} B_x) \quad (6)$$

式中 e_y 为磁感应电场强度在分量, σ 为电导率。

将式(5)、式(6)代入方程(4)中,不考虑感应电场强度和外部介质的黏性阻尼,且设 $P(x, y, t) = 0$,经计算可得板的磁弹性随机振动方程为

$$D_M \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + C_1 I_x \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_1 I_y \frac{\partial^5 w(x, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + \sigma h B_x^2 \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = -h B_x J_{cy}(t) \quad (7)$$

3 四边固支矩形薄板的随机位移响应分析

在一般实际工程中,随机干扰可以表示为^[13]

$$P(x, y, t) = Q(x, y)f(t)$$

式中 $Q(x, y)$ 是位置坐标 (x, y) 的确定性函数的分布

力 $f(t)$ 是时间 t 的随机过程 $P(x, y, t)$ 的均值和空间-时间的互相关函数可以分别表示为^[14]

$$\begin{cases} m_p(x, y, t) = Q(x, y)m_f(t) \\ R_p(x_1, y_1, x_2, y_2; t_1, t_2) = E[P(x_1, y_1, t_1)P(x_2, y_2, t_2)] = Q(x_1, y_1)Q(x_2, y_2)R_f(t_1, t_2) \end{cases} \quad (8)$$

式中 $R_f(t_1, t_2)$ 表示过程 $f(t)$ 的自相关函数。

3.1 通入随机电流为非平稳随机过程时板的位移响应

将式(7)中最后一项 $(\sigma h B_x^2 \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t})$ 假设为板的一种阻尼,右端项 $(-h B_x J_{cly}(t))$ 假设为随机分布载荷,当通入非平稳随机电流时,随机分布载荷在时间上是非平稳的。由式(8)可得随机分布载荷的均值和互相关函数为^[15]

$$\begin{cases} m_p(x, y, t) = -h B_x g(t) m_{J_{sy}}(t) \\ R_p(x_1, y_1, x_2, y_2; t_1, t_2) = h^2 B_x^2 g(t_1) g(t_2) R_{J_{sy}}(t_1 - t_2) \end{cases} \quad (9)$$

式中 $g(t)$ 是关于时间 t 的函数, $m_{J_{sy}}(t)$ 是随机电流 $J_{sy}(t)$ 的均值, $R_{J_{sy}}(t_1 - t_2)$ 是随机电流 $J_{sy}(t)$ 的自相关函数。

由模态分析法,式(7)的位移响应为^{[15]167-168}

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x, y) Y_{ij}(t) \quad (10)$$

式中 $\varphi_{ij}(x, y)$ 表示板的第 (i, j) 阶固有振型, $Y_{ij}(t)$ 是与第 (i, j) 阶主振型对应的模态响应,四边固支矩形薄板的固有振型为^{[15]167-168}

$$\varphi_{ij}(x, y) = (1 - \cos \frac{2i\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2j\pi y}{b}) \quad (11)$$

将式(10)、式(11)代入式(7),并利用伽辽金积分原理进行积分,最后可得

$$\ddot{Y}_{ij}(t) + 2\zeta_{ij}\omega_{ij}\dot{Y}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 Y_{ij}(t) = G_{ij}(t) \quad (12)$$

式中 $G_{ij}(t)$ 为模态激励,其表达式为

$$G_{ij}(t) = -\frac{4B_x h J_{cly}(t)}{(2n+1)^2 \rho h a b} \int_0^a \int_0^b \varphi_{ij}(x, y) dx dy \quad (13)$$

而第 (i, j) 阶模态阻尼为

$$2\zeta_{ij}\omega_{ij} = \frac{C_1 h^2}{12(2n+1)\rho} [a (\frac{2i\pi}{a})^4 + b (\frac{2j\pi}{b})^4] + \frac{\sigma B_x^2}{\rho} = 2\zeta'_{ij}\omega_{ij} + \frac{\sigma B_x^2}{\rho} \quad (14)$$

令 $a_2 = 2 (\frac{2i\pi}{a})^4 + 2 (\frac{2j\pi}{b})^4 + [(\frac{2i\pi}{a})^2 + (\frac{2j\pi}{b})^2]^2$, 可求出板的固有频率为

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{D_M a_2}{(2n+1)^2 \rho h}} \quad (15)$$

假定系统的初始条件为零,式(12)的解可表示为

$$Y_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(t-\tau) h_{ij}(\tau) d\tau \quad (16)$$

式中 τ 为时间坐标的移动值,且 $\tau = t_2 - t_1$ 。 h_{ij} 为模态脉冲响应函数,且有

$$h_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ij}(\omega) \exp(\lambda \omega t) d\omega \quad (17)$$

式中 $\lambda^2 = -1$ 。

相应的模态频率响应函数为

$$H_{ij}(\omega) = \frac{1}{[(\omega_{ij}^2 - \omega^2) + 2\lambda \zeta_{ij} \omega_{ij} \omega]} \quad (18)$$

由式(10)、式(12)和式(16),经计算可得板的横向随机位移响应为

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(t-\tau) h_{ij}(\tau) d\tau \quad (19)$$

随机位移响应的均值函数为

$$m_w(x, y, t) = E[w(x, y, t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x, y) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^a \int_0^b \frac{-4B_x}{(2n+1)^2 a b \rho} \varphi_{ij}(u, v) \times g(t) m_{J_{sy}} h_{ij}(\tau) du dv d\tau \quad (20)$$

位移响应的自相关函数为

$$R_w(t_1, t_2, x, y) = \frac{16B_x^2}{(2n+1)^4 (ab\rho)^2} \times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x, y) \varphi_{ks}(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b H_{ij}(\omega) \times H_{ks}(-\omega) \varphi_{ij}(u_1, v_1) \varphi_{ks}(u_2, v_2) g(t_1) g(t_2) S_{J_{sy}}(\omega) \times \exp(-\lambda \omega(t_1 - t_2)) du_1 dv_1 du_2 dv_2 d\omega$$

位移响应的自功率谱密度函数为

$$S_w(\omega, t, x, y) = \frac{16B_x^2}{(2n+1)^4 (ab\rho)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x, y) \varphi_{ks}(x, y) \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b H_{ij}(\omega) H_{ks}(-\omega) \times \varphi_{ij}(u_1, v_1) \varphi_{ks}(u_2, v_2) g^2(t) S_{J_{sy}}(\omega) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (21)$$

将式(11)、式(18)代入式(21)可得薄板的位移响应自功率谱密度函数

$$S_w(\omega, t, x, y) = g^2(t) S_{J_{sy}}(\omega) \frac{16B_x^2}{(2n+1)^4 (ab\rho)^2} \times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{2i\pi y}{a})^2 (1 - \cos \frac{2j\pi y}{b})^2 \times \frac{[\int_0^a \int_0^b (1 - \cos \frac{2i\pi y}{a})(1 - \cos \frac{2j\pi y}{b}) dx dy]^2}{(\omega_{ij}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_{ij}\omega_{ij}\omega)^2} \quad (22)$$

这是一个多输入、多输出问题,给定一组 x, y 的值,可得到该点的位移自功率谱密度函数。

4 算例

本文以中碳钢板为例,板长为 $a = 0.8 \text{ m}$,板宽为 $b = 0.6 \text{ m}$,板厚为 $h = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$,材料的泊松比 $\nu = 0.25$,质量密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$,圆频率 $\bar{\omega} = 314.16 \text{ s}^{-1}$,简约内阻尼系数 $C_1 = 0.04 \text{ S}$.电导率 $\sigma = 6.3 \times 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$, $B_x = 0.2 \text{ T}$,考虑外加电流为非平稳随机电流,平稳随机电流密度分量 $J_{sy}(t)$ 的功率谱密度为一常数, $S_{J_{sy}} = 4 \times 10^{12} (\text{A/m}^2)^2/\text{Hz}$.当 $g(t) = \sin \bar{\omega}t$ 时,此时的激励为非平稳随机激励.只考虑薄板的前一阶固有振型,即

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{D_M \{ 2 (\frac{2\pi}{a})^4 + 2 (\frac{2\pi}{b})^4 + [(\frac{2\pi}{a})^2 + (\frac{2\pi}{b})^2]^2 \}}{9\rho h}} = 254.76 \text{ rad/s} \tag{23}$$

将 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ 和式(23),以及算例中所给参数代入式(22),可计算出板中心点的位移响应的自功率谱密度,并画出其图形,如图 1 所示.

$$S_w(\omega, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \left(\frac{16B_x}{9\rho} \right)^2 \sin^2(\bar{\omega}t) S_{J_{sy}}(\omega) \frac{1}{(\omega_{11}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_{11}\omega_{11}\omega)^2} = 6.937 \times 10^4 \times \frac{\sin^2(\bar{\omega}t)}{(\omega^4 + 2.531 \times 10^5 \omega^2 + 3.264 \times 10^8)} \tag{24}$$

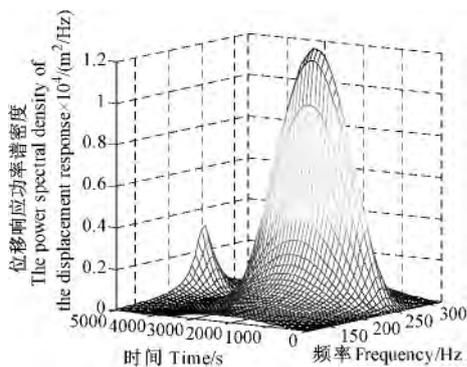


图 1 板中心点位移响应自功率谱密度图
Fig. 1 The auto-power spectral density map of displacement at mid-center point on the plate

将式(14)中的耦合项 $\left(\frac{\sigma B_x^2}{\rho}\right)$ 去掉后,在相同参数下,可以计算出不考虑耦合项时板中心点的位移响应的自功率谱密度图,如图 2 所示.

该响应是非平稳随机振动过程,根据位移的自功率谱密度函数推导出速度自功率谱密度函数以及加速度自功率谱密度函数,并画出其图形,如图 3 和图 5 所示.

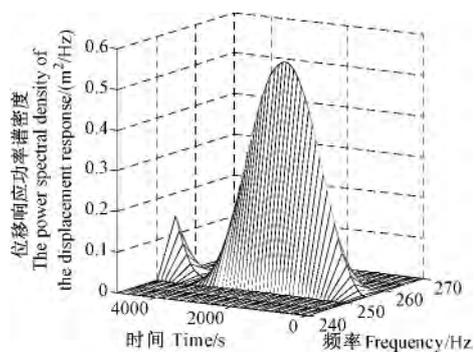


图 2 不考虑耦合项时板中心位移响应自功率谱密度图

Fig. 2 The auto-power spectral density map of displacement at mid-center point ignoring coupled parts

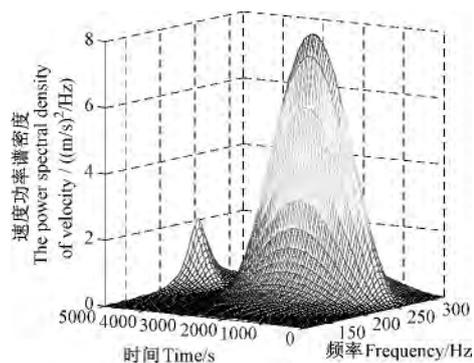


图 3 板中心点速度自功率谱密度图

Fig. 3 The auto-power spectral density map of velocity at mid-center point on the plate

同理,可计算出不考虑耦合项时的速度自功率谱密度函数以及加速度自功率谱密度函数,并画出其图形,如图 4、图 6 所示.

功率谱密度反映随机过程的振动能量在频率域上的分布.通过对功率谱密度的分析有助于理解随机振动的物理机理,可得出具有不同固有频率的振动激励所蕴含的振动能量的平均密度,从而避免或改进振动激励以降低振动的发生或减小振动的破坏.

由于磁场中的薄板通以非平稳随机电流,就会产

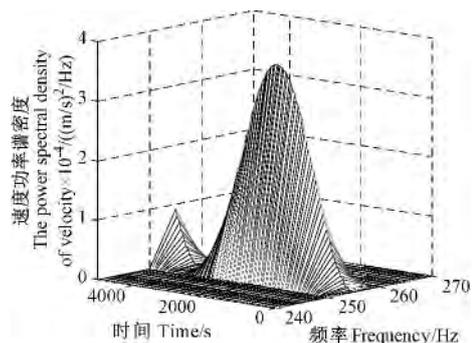


图 4 不考虑耦合项时板中心点的速度自功率谱密度图
Fig. 4 The auto-power spectral density map of velocity at mid-center point ignoring coupled parts

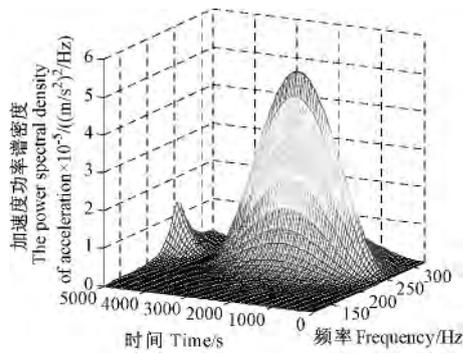


图 5 板中心点加速度自功率谱密度图

Fig. 5 The auto-power spectral density map of acceleration at mid-center point on the plate

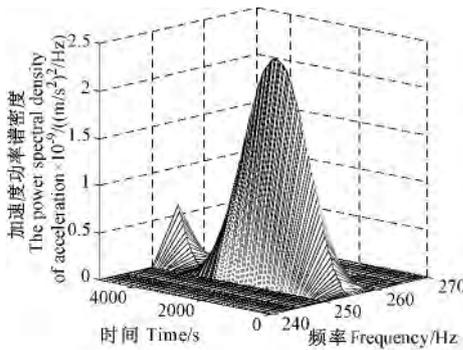


图 6 不考虑耦合项时板中心点加速度自功率谱密度图

Fig. 6 The auto-power spectral density map of acceleration at mid-center point ignoring coupled parts

生随机变化的洛伦兹力,该洛伦兹力中的一部分假设为非平稳随机均匀分布载荷,即可视为作用在板上的非平稳随机激励,将会引起板的非平稳随机振动。从图中可以看出,算例中不论是位移响应功率谱密度,还是速度功率谱密度、加速度功率谱密度都随时间呈周期变化,且由于电磁场和变形场的耦合项的存在使得薄板的位移响应功率谱密度、速度功率谱密度和加速度功率谱密度都发生了很大的变化。在考虑耦合项时,振动响应能量分布在 150 Hz ~ 260 Hz 带宽范围内,不考虑耦合项时振动响应能量分布在 245 Hz ~ 260 Hz 带宽范围内,可见耦合项对振动响应带宽有很大的影响,对板的振动应力和疲劳寿命都产生显著影响,也就是耦合因素对板的振动响应的影响不可忽视,应加以进一步的分析。利用此性质可以在减振降噪研究以及对结构系统的监测与故障诊断等实际问题中发挥重要作用。

5 结论

本文对处在横向磁场中,通入非平稳随机电流的四边固支矩形薄板,研究了薄板的非平稳随机振动问题,并讨论了磁场强度及洛伦兹力耦合项对在非平稳

随机电流下的随机位移响应的影响。主要研究结论如下:

1) 根据板壳磁弹性基本理论和连续体的随机振动理论,导出了在外加磁场中通入非平稳随机电流薄板的磁弹性随机振动方程。并计算出通入非平稳随机电流时薄板的随机振动相关数字特征。

2) 针对通入随机电流为非平稳随机电流、载荷为非平稳随机均匀分布载荷的情况,通过具体算例对磁场中的四边固支薄板进行随机响应分析,得到板上相应位置的位移功率谱密度函数和均方值函数,并绘出了板中心点的位移响应功率谱密度图、速度功率谱密度图及加速度功率谱密度图,由功率谱密度函数图形形状的改变表明了洛伦兹力耦合项对随机位移响应的的影响。

3) 功率谱密度函数从频域方面描述振动的统计特性,反映出振动能量对频率的分布规律。通过改变通入薄板随机电流的功率谱密度函数用来改变振动能量对频率的分布律。

本文所得到结果可在减振降噪研究以及对结构系统的监测与故障诊断等实际问题中,起到一定的参考作用。

参考文献 (References)

- [1] 庄表中. 随机振动概论[M]. 北京:地震出版社,1982:81. ZHUANG BiaoZhong. An introduction to random vibration [M]. Beijing: Press of Earthquake, 1982:81 (In Chinese).
- [2] S. H. 克兰德尔. 随机振动[M]. 北京:科学出版社,1980:70. S. H. Crandall. Random vibration [M]. Beijing: Press of Sciences, 1980:70 (In Chinese).
- [3] Takashi Mochio. Nonstationary random analysis of structures with hybrid mass damper system[J]. Journal of Mechanical Science and Technology. 2007, 21: 881-884.
- [4] 赵灿晖,周志祥. 多维非平稳随机地震响应分析的快速算法[J]. 振动与冲击 2006 25(5):62-73. ZHAO CanHui, ZHOU ZhiXiang. Effective calculation method of multi-components non-stationary stochastic seismic response [J]. Journal of Vibration and Shock. 2006, 25(5):62-73 (In Chinese).
- [5] 张志超,张亚辉,林家浩. 车桥耦合系统非平稳随机振动分析[J]. 工程力学, 2008 25(11):197-204. ZHANG ZhiChao, ZHANG YaHui, LIN JiaHao. Pem-pim scheme for non-stationary random vibration analysis of vehicle-bridge systems [J]. Engineering Mechanics. 2008, 25 (11): 197-204 (In Chinese).
- [6] 廖俊,孔宪仁,徐大富,等. 基于正交分解法的非平稳随机振动响应计算[J]. 宇航学报. 2010 31(12):2651-2656. LIAO Jun, KONG XianRen, XU DaFu, et al. Orthogonal decomposition method-based non-stationary random vibration response [J]. Journal of Stronautics. 2010, 31 (12):2651-2656 (In Chinese).
- [7] 徐瑞,苏成. 结构非平稳随机响应分析的快速虚拟激励法

- [J]. 计算力学学报. 2010, 27(5): 822-827.
- XU Rui, Su Cheng. Fast pseudo-excitation method in structural non-stationary stochastic response analysis [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics. 2010, 27(5): 822-827 (In Chinese).
- [8] 王平, 李晓靓, 白象忠, 等. 导电梁在磁场中的磁弹性随机振动[J]. 振动与冲击. 2007, 26(3): 75-78.
- WANG Ping, LI XiaoJing, BAI XiangZhong, et al. Magneto-elastic random vibration of an electro-conductive beam in magnetic field [J]. Journal of Vibration and Shock. 2007, 26(3): 75-78 (In Chinese).
- [9] 王平, 李晓靓, 白象忠. 载流圆板的磁弹性随机振动[J]. 机械强度. 2012, 34(3): 322-326.
- WANG Ping, LI XiaoJing, BAI XiangZhong. Random vibration of an current carrying circular plate in magnetic field [J]. Journal of Mechanical Strength. 2012, 34(3): 322-326 (In Chinese).
- [10] 徐芝纶. 弹性力学(下册) [M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 1990: 1-7.
- Xu Zhi-lun. Elasticity. [M]. Third Edition. Beijing: Press of Higher Education, 1990: 1-7 (In Chinese).
- [11] 白象忠, 田振国. 板壳磁弹性力学基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2006, 176-178.
- BAI XiangZhong, TIAN zhengGuo. Foundmental magneto-elasticity theory of plate and shells [M]. Beijing: Sciences Press, 2006: 181-182 (In Chinese).
- [12] 肖建勇, 杨洪波, 陈红娇. 单个随机集中载荷下矩形薄板的振动浅析[J]. 长沙铁道学院学报. 2001, 19(1): 61-64.
- XIAO JianYong, YANG HongBo, CHENG HongJiao. The vibration analysis of elastic laminal rectangle plate under single concentrated random load [J]. Journal of Changsha Rall Way University. 2001, 19(1): 61-64 (In Chinese).
- [13] 胡津亚, 曾三元. 现代随机振动 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989: 82-85.
- HU JinYa, ZENG SanYuan. Modern random vibration [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1989: 82-85 (In Chinese).
- [14] 星谷胜. 随机振动分析 [M]. 北京: 地震出版社, 1977: 11.
- Hoshitani Katsu. Random vibration analysis. [M]. Beijing: Press of Earthquake. 1977: 11.
- [15] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 5, 167-168.
- OU JinPing, Wang GuangYuan. Structural random vibration [M]. Beijing: Press of Higher Education, 1998: 5, 167-168 (In Chinese).