第 33 卷 第 3 期
2016 年 5 月

计 算 物 理
CHINESE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS

Vol. 33, No. 3
May, 2016

文章编号: 1001-246X(2016)03-0273-10

基于预处理 HLLEW 格式的全速域数值算法

刘中玉， 张明锋， 郑冠男， 杨国伟*

(中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室，北京 100190)

摘 要: 基于 HLLEW(Harten-Lax-Van Leer-Einfeldt-Wada) 格式引入预处理技术发展适合求解全速域流场的三维 Navier-Stokes 求解器. 引入低速预处理技术，重新构造 HLLEW 格式的耗散项，给出预处理后的 HLLEW 格式，并根据预处理后的雅克比矩阵构造相应的隐式时间推进方程. 利用预处理方法求解 NACA 4412 低速不可压流动与 RAE 2822 跨声速可压缩流动，并与实验结果及原有方法的计算结果对比. 结果表明: 预处理 HLLEW 格式不仅提高低速不可压缩流动的计算效率和精度，也保持了对可压缩流动的处理能力，是一种适用于全速域流场数值模拟的有效方法.

关键词: 预处理; 全速域流动; 不可压缩流动; HLLEW 格式; 隐式时间推进

中图分类号: O241.3 **文献标志码:** A

0 引言

在实际工程问题中，流场中经常会同时出现可压缩与不可压缩区域同时存在的问题，发展能够快速、准确地求解这类流动问题的计算流体力学(CFD)数值算法成为工程应用必然的要求.

随着 CFD 算法研究的不断深入，通过求解可压缩 Euler 方程或者 Navier-Stokes 方程模拟流动过程的方法，在亚跨声速、超声速及高超声速流动的数值分析中已经取得广泛的应用. 为了求解这类偏微分方程并准确反映其背后的不同物理过程，提出了一系列数值通量离散方法，如 Roe 格式[1]、AUSM 类格式[2-5]、CUSP 类格式[6-7]等. 1983 年，Harten[8] 提出了一种迎风 Godunov 类型的迎风 HLL 格式，经不断改进形成了满足非线性差分方程所要求的稳定性条件、熵条件及正守恒条件的 HLLEW 格式[9-12]. HLLEW 格式因其较强的非线性处理能力及良好的计算稳定性，在可压缩流动的数值模拟中得到广泛的应用[13-15].

虽然在可压缩流动的数值模拟上取得巨大的成功，对于低速流动的模拟，包括 HLLEW 格式在内的一般的迎风格式并不适用[16]: 一方面，迎风格式的数值粘性大多根据系统的特征值构造，低速流动中由于声速远大于流动速度，这将引起过大的数值耗散，降低对问题的求解精度; 另一方面，由特征线理论可以知道，扰动在理想气体的等熵流动中的传播速度为系统的特征值，对于低速流动而言不同方向扰动传播速度相差很大，即所求解的线性方程组的条件数很大，由此引起收敛变慢、求解效率减低的问题. 受 Chorin[17] 的虚拟压缩方法启发，Turkel[18] 提出了用可压缩方程求解低速流场的预处理方法: 通过改变方程的时间导数，使控制方程的各特征速度保持在同量级，从而有效提高对低速流动的求解精度及求解效率.

我们在可压缩 Navier-Stokes 方程中引入低速预处理技术，重新构造 HLLEW 格式的耗散项，推导出适用于全速域流场模拟的预处理 HLLEW 格式. 并根据预处理后的雅克比矩阵，基于 LU-SGS 方法构造隐式时间推进方程. 通过对 NACA 4412 翼型的低速绕流及 RAE 2822 翼型的跨声速绕流问题的模拟，验证所发展的方法对可压缩及不可压缩流动的处理能力.

收稿日期: 2015-03-25; 修回日期: 2015-05-28

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2014AA110501)资助项目

作者简介: 刘中玉(1988-)，男，博士生，主要从事计算流体力学研究，E-mail: liuzhongyu@imech.ac.cn

* 通讯作者: 杨国伟，研究员，E-mail: gwyang@imech.ac.cn

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 数值求解方法

1.1 控制方程

在贴体曲线坐标系下的 Navier-Stokes 方程组的时间导数项前面乘以预处理矩阵 Γ，便可得到求解定常流动的预处理控制方程组

$$\Gamma\frac{\partial\hat{W}}{\partial t}+\frac{\partial\hat{E}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{F}}{\partial\eta}+\frac{\partial\hat{G}}{\partial\zeta}=\frac{\partial\hat{E}_{\mathrm{v}}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{v}}}{\partial\eta}+\frac{\partial\hat{G}_{\mathrm{v}}}{\partial\zeta},\tag{1}$$

其中 $\hat{W}=(p\quad u\quad v\quad w\quad T)^{\mathrm{T}}$，根据原始变量 $\hat{W}$ 形式的不同预处理矩阵有不同的形式[19-22]. 采用 Weiss-Smith[22] 提出的预处理矩阵，该方式处理的控制方程除了在驻点会产生奇异外，不存在声速点奇异和外部边界敏感等不稳定因素，因此具有更好的计算稳定性. Weiss-Smith 预处理矩阵

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\Theta & 0 & 0 & 0 & \rho_{\mathrm{T}}\\ \Theta u & \rho & 0 & 0 & \rho_{\mathrm{T}}u\\ \Theta v & 0 & \rho & 0 & \rho_{\mathrm{T}}v\\ \Theta w & 0 & 0 & \rho & \rho_{\mathrm{T}}w\\ \Theta H-1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_{\mathrm{T}}H+\rho C_{\mathrm{p}}\end{pmatrix},$$

其中，$\rho_{\mathrm{T}}=\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_p$，$\Theta=\left(\frac{1}{U_{\mathrm{r}}^2}-\frac{\rho_{\mathrm{T}}}{\rho C_{\mathrm{p}}}\right)$，$U_{\mathrm{r}}$ 称为参考速度，本文中参考速度按照以下计算得到

$$U_{\mathrm{r}}=M_{\mathrm{r}}c,\tag{2}$$

$$M_{\mathrm{r}}=\min(1,\max(kM_\infty,M)),\tag{3}$$

式(2)、(3)中，c 为声速，M 为流场的当地马赫数，M_∞ 为无穷远来流马赫数. k 为常数，通过调节 k 的大小可以避免驻点附近的奇异问题，文中统一取 $k=0.5$.

预处理控制方程雅克比矩阵的特征值

$$\lambda\left(\Gamma^{-1}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{W}}\right)=U,\ U,\ U,\ U'-C',\ U'+C',\tag{4}$$

其中，

$$U=n_xu+n_yv+n_zw,$$

$$U'=\frac{1}{2}U(1+M_{\mathrm{r}}^2),$$

$$C'=\frac{1}{2}\sqrt{(1-M_{\mathrm{r}}^2)^2U^2+4M_{\mathrm{r}}^2C^2},$$

$$C=c\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2},$$

$\hat{H}$ 代表无粘通量，$\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)$ 为界面的法线方向.

预处理改变了控制方程和声速有关的两个特征值的形式，从而起到调节不同方向扰动传播速度的效果. 当流动速度为超声速时，参考马赫数 $M_{\mathrm{r}}=1$，特征值与可压缩流动控制方程的特征值恢复一致；在低速区域 $M_{\mathrm{r}}\to 0$，预处理方程的特征值大小与 U 为同一量级. 因此，对于不同流速的流动预处理方程的条件数能保持在合理的范围内.

1.2 预处理 HLLEW 格式

预处理控制方程中，无粘通量采用可压缩流动中得到成功应用的 HLLEW 格式[9,12]. 与 Roe 格式一样，HLLEW 格式属于 Godunov 类型迎风格式的一种. 相对 Roe 格式[1] 来讲，在流动连续区域 HLLEW 格式退化为 Roe 格式，在间断处 HLLEW 格式提高了对接触间断的分辨能力，同时可以避免解的非物理震荡和过高的人工粘性，在跨声速流场分析中得到广泛应用.

HLLEW 格式根据系统的特征值构造耗散项，在低速流动中由于声速远大于流动速度，这将引起不符合实际物理过程的过大的数值耗散. 在预处理方程中，需要相应地改变 HLLEW 格式的耗散项，以满足对低速

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

流动的流场模拟的需求.

以 ξ 方向为例,HLLEW 格式的数值通量可以写为

$$\hat{\boldsymbol{E}}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{E}}_{i,j,k} + \hat{\boldsymbol{E}}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{A}}|_{i+1/2,j,k}(\hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1,j,k} - \hat{\boldsymbol{Q}}_{i,j,k}), \tag{5}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{Q}} = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E)^{\mathrm{T}}$ 为守恒变量,$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 为无粘通量的雅克比矩阵. 预处理的 HLLEW 格式需要改变它粘性项的形式,具体形式

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}|\Delta\hat{\boldsymbol{Q}} \approx \tilde{\boldsymbol{A}}\Delta\hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{E}}}{\partial\hat{\boldsymbol{Q}}}\Delta\hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{\Gamma}\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{E}}}{\partial\hat{\boldsymbol{W}}}\right)\Delta\hat{\boldsymbol{W}} \approx \boldsymbol{\Gamma}|\tilde{\boldsymbol{A}}_{\Gamma}|\Delta\hat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{T}}|\tilde{\Lambda}_{\Gamma}|\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\Delta\hat{\boldsymbol{W}}), \tag{6}$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\Gamma} = \partial\hat{E}/\partial\hat{W}$,是预处理方程的雅克比矩阵,$\Lambda = \mathrm{diag}(U, U, U, U' - C', U' + C')$ 是预处理雅克比矩阵的特征值,$\tilde{\boldsymbol{T}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}$ 分别是预处理方程雅克比矩阵的左右特征向量矩阵,雅克比矩阵及特征向量矩阵的具体形式参见附录 A 及附录 B. b_{R}^{+} 和 b_{L}^{-} 反映流场中波传播速度

$$b_{\mathrm{R}}^{+} = \max(U' + C', U_{\mathrm{R}}' + C_{\mathrm{R}}', 0),$$

$$b_{\mathrm{L}}^{-} = \min(U' - C', U_{\mathrm{R}}' - C_{\mathrm{R}}', 0).$$

为了降低格式的数值耗散,提高接触间断处的分辨能力,对系统的特征值作以下改动

$$\bar{\Lambda}_{\Gamma} = \frac{b_{\mathrm{R}}^{+} + b_{\mathrm{L}}^{-}}{b_{\mathrm{R}}^{+} - b_{\mathrm{L}}^{-}}\Lambda - 2\frac{b_{\mathrm{R}}^{+}b_{\mathrm{L}}^{-}}{b_{\mathrm{R}}^{+} - b_{\mathrm{L}}^{-}}\boldsymbol{I}. \tag{7}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma} = \mathrm{diag}\,[\bar{\lambda}_1 - 2\delta\min(b_{\mathrm{R}}^{+}, b_{\mathrm{L}}^{-}), \bar{\lambda}_2 - 2\delta\min(b_{\mathrm{R}}^{+}, b_{\mathrm{L}}^{-}), \bar{\lambda}_3 - 2\delta\min(b_{\mathrm{R}}^{+}, b_{\mathrm{L}}^{-}), \lambda_4, \lambda_5], \tag{8}$$

其中

$$\delta = \min\left(\frac{\hat{\rho}_1}{|\sigma_1|}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sigma_1 = \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2}.$$

上述格式,满足非线性差分方程所要求的稳定性条件、熵条件及正守恒条件,具有良好的计算稳定性. 通过对系统特征值的修改,HLLEW 格式避免了低速流动中过大的数值耗散,适合应用于对低速流动的数值分析.

2　隐式时间推进方法

Yoon 和 Jameson 提出的 LU-SGS 方法是目前应用比较广泛的隐式时间推进方法. 该方法通过简化正负特征矩阵分裂,使得构造的 L、U 矩阵不包含矩阵求逆,大大提高计算效率.

从控制方程(1) 出发,将时间微分项采用一阶近似,对无粘通量采用隐式离散,粘性通量采用显式离散,得到半离散控制方程

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,k}\frac{\hat{W}_{i,j,k}^{n+1} - \hat{W}_{i,j,k}^{n}}{\Delta\tau} + \delta(\hat{E} + \hat{F} + \hat{G})_{i,j,k}^{n+1} = \delta(\hat{E}_v + \hat{F}_v + \hat{G}_v)_{i,j,k}^{n}. \tag{9}$$

对无粘通量做线性化处理,略去二阶及更高阶项有

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,k}}{\Delta\tau}\Delta\hat{\boldsymbol{W}}_{i,j,k}^{n} + \delta_{\xi}(\hat{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{A}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j,k}^{n} + \delta_{\eta}(\hat{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{B}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j,k}^{n} + \delta_{\zeta}(\hat{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{C}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j,k}^{n} = \delta(\hat{\boldsymbol{E}}_v + \hat{\boldsymbol{F}}_v + \hat{\boldsymbol{G}}_v)_{i,j,k}^{n},$$

整理后,有

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}\Delta\hat{\boldsymbol{W}}_{i,j,k}^{n} + (\boldsymbol{A}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i+1/2,j,k}^{n} - (\boldsymbol{A}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i-1/2,j,k}^{n} + (\boldsymbol{B}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j+1/2,k}^{n} - \\ &(\boldsymbol{B}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j-1/2,k}^{n} + (\boldsymbol{C}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j,k+1/2}^{n} - (\boldsymbol{C}_{\Gamma}\Delta\hat{\boldsymbol{W}})_{i,j,k-1/2}^{n} = -\hat{\boldsymbol{R}}_{i,j,k}^{n}\end{aligned}, \tag{10}$$

其中残差 $\hat{\boldsymbol{R}}_{i,j,k}^{n} = \delta(\hat{\boldsymbol{E}} + \hat{\boldsymbol{F}} + \hat{\boldsymbol{G}})_{i,j,k}^{n} - \delta(\hat{\boldsymbol{E}}_v + \hat{\boldsymbol{F}}_v + \hat{\boldsymbol{G}}_v)_{i,j,k}^{n}$,对方程(10) 中的雅克比矩阵按照其特征值符号的正负采用迎风分裂,有

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

$$
\begin{aligned}
(A_\Gamma \Delta\hat{W})_{i+1/2,j,k} &= A^+_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + A^-_{\Gamma i+1,j,k}\Delta\hat{W}_{i+1,j,k},\\
(A_\Gamma \Delta\hat{W})_{i-1/2,j,k} &= A^-_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + A^+_{\Gamma i-1,j,k}\Delta\hat{W}_{i-1,j,k},\\
(B_\Gamma \Delta\hat{W})_{i+1/2,j,k} &= B^+_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + B^-_{\Gamma i,j+1,k}\Delta\hat{W}_{i,j+1,k},\\
(B_\Gamma \Delta\hat{W})_{i-1/2,j,k} &= B^-_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + B^+_{\Gamma i,j-1,k}\Delta\hat{W}_{i,j-1,k},\\
(C_\Gamma \Delta\hat{W})_{i+1/2,j,k} &= C^+_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + C^-_{\Gamma i,j,k+1}\Delta\hat{W}_{i,j,k+1},\\
(C_\Gamma \Delta\hat{W})_{i-1/2,j,k} &= C^-_{\Gamma i,j,k}\Delta\hat{W}_{i,j,k} + C^+_{\Gamma i,j,k-1}\Delta\hat{W}_{i,j,k-1}
\end{aligned},
$$

代入(10)上式整理,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{I^n_{i,j,k}}{\Delta\tau} + (\tilde{A}^+_{\Gamma i,j,k} - \tilde{A}^-_{\Gamma i,j,k} + \tilde{B}^+_{\Gamma i,j,k} - \tilde{B}^-_{\Gamma i,j,k} + \tilde{C}^+_{\Gamma i,j,k} - \tilde{C}^-_{\Gamma i,j,k})]\Delta\hat{W}^n_{i,j,k} +\\
&(\tilde{A}^-_{\Gamma i+1,j,k}\Delta\hat{W}^n_{i+1,j,k} + \tilde{B}^-_{\Gamma i,j+1,k}\Delta\hat{W}^n_{i,j+1,k} + \tilde{C}^-_{\Gamma i,j,k+1}\Delta\hat{W}^n_{i,j,k+1}) -\\
&(\tilde{A}^+_{\Gamma i-1,j,k}\Delta\hat{W}^n_{i-1,j,k} + \tilde{B}^+_{\Gamma i,j-1,k}\Delta\hat{W}^n_{i,j-1,k} + \tilde{C}^+_{\Gamma i,j,k-1}\Delta\hat{W}^n_{i,j,k-1}) = -I^{-1}_{\Gamma i,j,k}\hat{R}^n_{i,j,k},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中,

$$
\tilde{A}^\pm_\Gamma = \frac{1}{2}I^{-1}(A_\Gamma \pm \chi\sigma_{A_\Gamma}I),\quad \tilde{B}^\pm_\Gamma = \frac{1}{2}I^{-1}(B_\Gamma \pm \chi\sigma_{B_\Gamma}I),\quad \tilde{C}^\pm_\Gamma = \frac{1}{2}I^{-1}(C_\Gamma \pm \chi\sigma_{C_\Gamma}I),
$$

σ_{A_Γ}, σ_{B_Γ}, σ_{C_Γ} 为谱半径. 对式(11)左端采用近似 LU 分解,有

$$
(L + D)D^{-1}(D + U)\Delta\hat{W}^n_{i,j,k} = -I^{-1}_{\Gamma i,j,k}\hat{R}^n_{i,j,k},
\tag{12}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
L &= -(\tilde{A}^+_{\Gamma i-1,j,k} + \tilde{B}^+_{\Gamma i,j-1,k} + \tilde{C}^+_{\Gamma i,j,k-1}),\\
D &= \frac{I_{i,j,k}}{\Delta t} + \chi(\sigma_{A_\Gamma} + \sigma_{B_\Gamma} + \sigma_{C_\Gamma})I_{i,j,k},\\
U &= (\tilde{A}^-_{\Gamma i+1,j,k} + \tilde{B}^-_{\Gamma i,j+1,k} + \tilde{C}^-_{\Gamma i,j,k+1}).
\end{aligned}
$$

求解方程(12),具体推进过程分两步进行

$$
\begin{aligned}
(L + D)\Delta\hat{W}^* &= -I^{-1}\hat{R},\\
(D + U)\Delta\hat{W} &= D\Delta\hat{W}^*.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

最后更新数值解,得到第 $n+1$ 时间层守恒变量值

$$
\hat{W}^{n+1}_{i,j,k} = \hat{W}^n_{i,j,k} + \Delta\hat{W}_{i,j,k}.
\tag{14}
$$

3 计算结果与讨论

为了验证预处理 HLLEW 格式对可压缩及不可压缩流动的求解能力与精度,计算 NACA 4412 二维翼型低速绕流与 RAE 2822 翼型跨声速绕流问题,计算的马赫数范围从 0.01 到 0.729 不等.

3.1 NACA 4412 翼型低速绕流

为了考察预处理 HLLEW 格式对低速不可压缩流动问题的求解能力,计算 NACA 4412 翼型绕流. 计算工况如下: 来流马赫数 $M_\infty = 0.2$, 攻角 $\alpha = 13.87°$, 雷诺数 $Re = 1.52\times10^6$. 计算网格采用 C 型结构网格,共分布有 96×448 个网格单元,其中翼型表面分布 256 个网格单元,边界层首层网格高度为 8×10^{-6} 倍弦长. 为了进一步验证本文方法,在同样攻角和雷诺数下,增加了 $M_\infty = 0.01$ 工况. 在这两个工况的计算中,湍流模型采用 $k-\omega$ SST 两方程模型.

图 1 给出了来流马赫数为 0.2 条件下,预处理方法与原有方法收敛速率的对比. 从图中可以看出: 相对原始方法,在计算初始阶段预处理方法的残差波动较大,随着计算结果的逐渐收敛,预处理方法的残差波动逐渐消失; 从总的计算过程来看,预处理方法的残差下降速度要高于原始方法,说明预处理方法相对原始方

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

法具有更高的收敛速率.

图 2 给出了预处理方法和原有方法计算得到的翼型表面压力分布与实验结果[23]的对比. 从图中可以看出,两种方法计算得到的表面压力分布基本一致,与实验结果吻合良好; 在后缘的分离区附近,两种方法的计算结果都低估分离区的大小,计算得到后缘上表面的压力系数小于实验值.

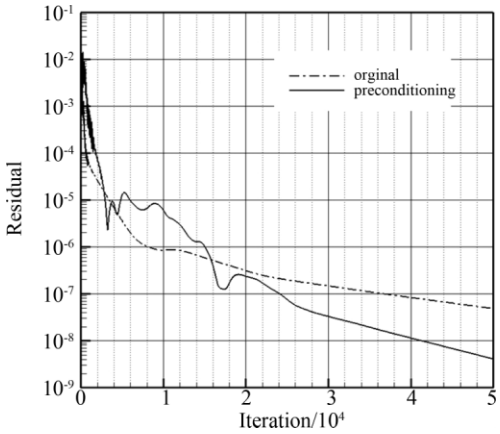

图 1　NACA 4412 翼型 $M=0.2$ 来流下收敛速率

Fig. 1　Convergence rates of NACA 4412 airfoil at $M=0.2$

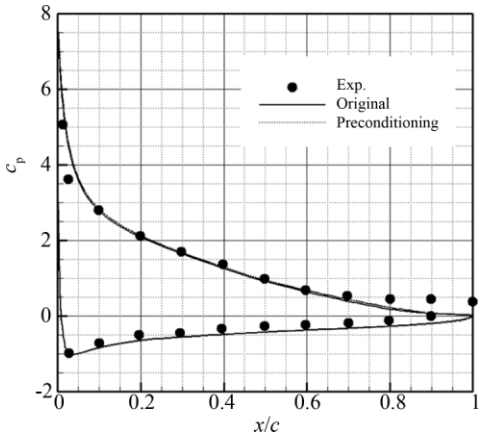

图 2　NACA 4412 翼型压力表面压力分布

Fig. 2　Pressure distributions on NACA 4412 airfoil surface

图 3 给出了翼型上表面不同站位上的速度分布与实验结果的对比. 从图中可以看出,在上表面分离区之前,两种方法得到的速度分布基本一致; 在分离区,预处理方法计算得到的分离强度要大于原有方法,所预测的速度分布更接近实验结果.

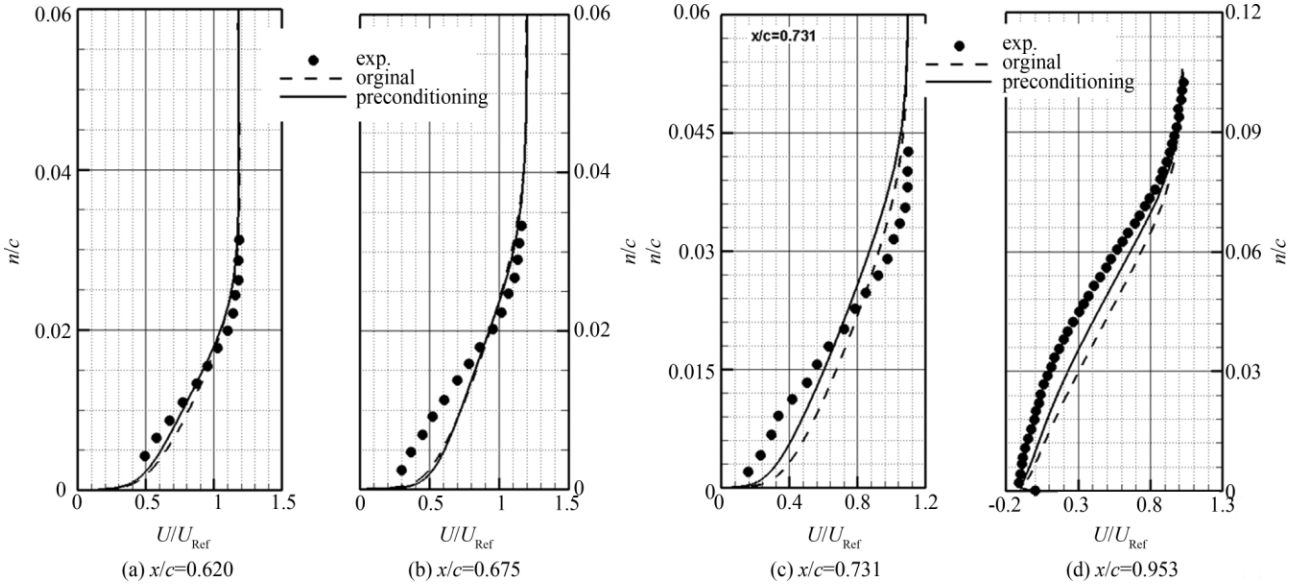

图 3　两种方法速度型线与实验结果的比较

Fig. 3　Velocity profiles predicted and experimental data

为了进一步对比研究预处理方法与原有方法对低速不可压缩流动问题求解效率,计算了来流马赫数 $M_\infty = 0.01$ 的情况,并对比两种方法阻力系数收敛速率. 图 4 给出了两种方法阻力系数收敛曲线,从图中可以看出: 在计算初始阶段,预处理方法的阻力系数的波动程度远小于原有方法; 随着计算时间的推进,预处理方法的阻力系数相对原有方法能够更快的收敛.

3.2　RAE 2822 跨声速绕流

为了验证预处理方法对跨声速可压缩流动的计算精度,计算了 RAE 2822 翼型在来流马赫数 M_∞ =

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

0.729 时的定常流动，相对弦长的雷诺数 $Re = 6.5 \times 10^6$，来流攻角 $\alpha = 2.31°$. 所求解的雷诺平均 Navier-Stokes(RANS) 方程中，采用 $k-\omega$ SST 两方程模型. 计算网格采用 C 型结构网格，共分布有 64×368 个网格单元，其中翼型表面分布 304 个网格单元，边界层首层网格高度为 1×10^{-5} 倍弦长.

图 5 给出了预处理方法和原有方法的残差收敛曲线. 从图中可以看出，相对原有方法预处理方法的残差收敛存在一定的波动，总得来说二者的收敛速率基本相当. 图 6 给出了预处理方法与原有方法计算得到的表面压力分布与实验结果的对比. 在流动连续区，预处理方法与原有方法预测的表面压力分布基本一致，都与实验结果吻合良好；在间断处，预处理方法预测的激波位置较原有方法略微靠后，与实验结果略有偏差.

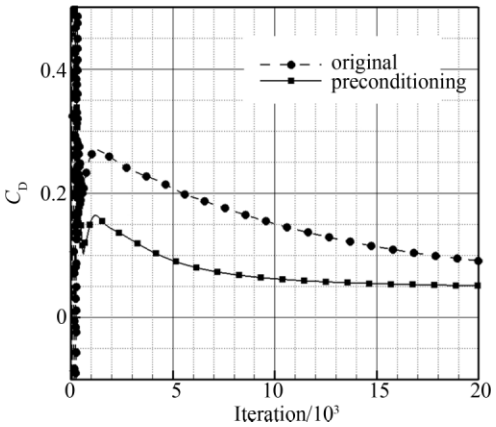

图 4 $M = 0.01$ 时两种方法阻力系数收敛曲线

Fig. 4 Convergence rates of drag coefficients at $M = 0.01$

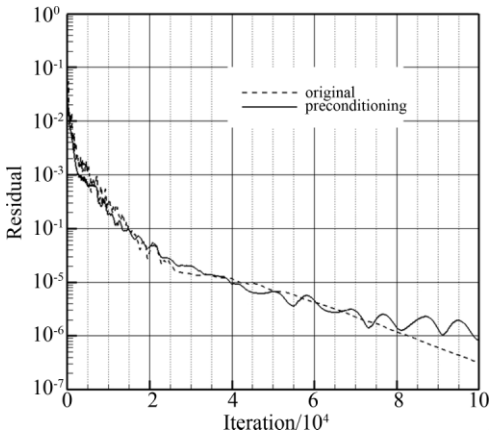

图 5 RAE 2822 翼型跨声速绕流收敛速率

Fig. 5 Convergence rates of transonic flow over RAE 2822 airfoil

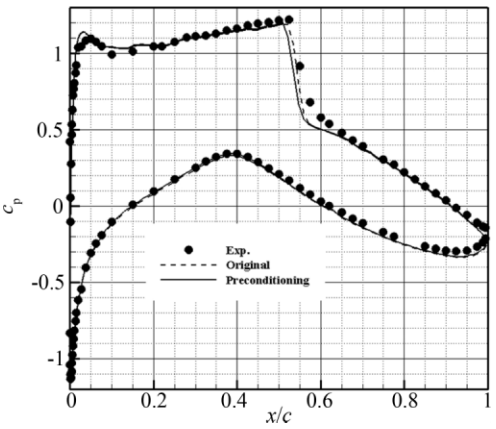

图 6 RAE 2822 翼型跨声速绕流表面压力分布

Fig. 6 Pressure distributions on surface of transonic flow over RAE 2822 airfoil

4 结论

引入 Weiss-Smith 预处理方法，将在可压缩流动中得到广泛应用的 HLLEW 格式与预处理技术结合，构造适用于全速域流场的数值模拟方法. 预处理方法改变系统的特征值大小，降低系统刚性、加快流场的求解效率；通过对 HLLEW 格式中耗散项的修改，避免不可压缩流动中过大的非物理耗散，提高对低速流动的求解精度.

对 NACA 4412 低速绕流及 RAE 2822 跨声速绕流问题的模拟结果表明：低速不可压流动中，预处理方法具有更高的收敛速率和求解精度；在跨声速可压缩流动中，预处理方法的求解能力与原有方法相当. 总的来讲，预处理 HLLEW 方法具有更好的鲁棒性，适合于用于全速域流场的数值模拟.

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

附录 A　雅克比矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & \rho_{\mathrm{T}} \\ \Theta u & \rho & 0 & 0 & \rho_{\mathrm{T}} u \\ \Theta v & 0 & \rho & 0 & \rho_{\mathrm{T}} v \\ \Theta w & 0 & 0 & \rho & \rho_{\mathrm{T}} w \\ \Theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_{\mathrm{T}} H + \rho C_{\mathrm{p}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho C_{\mathrm{p}} + \rho_{\mathrm{T}} \Psi}{\Phi} & \dfrac{\rho_{\mathrm{T}} u}{\Phi} & \dfrac{\rho_{\mathrm{T}} v}{\Phi} & \dfrac{\rho_{\mathrm{T}} w}{\Phi} & -\dfrac{\rho_T}{\Phi} \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \dfrac{1 - \Theta\Psi}{\Phi} & -\dfrac{\Theta u}{\Phi} & -\dfrac{\Theta v}{\Phi} & -\dfrac{\Theta w}{\Phi} & \dfrac{\Theta}{\Phi} \end{pmatrix},$$

其中，

$$\Phi = \rho\Theta C_{\mathrm{p}} + \rho_{\mathrm{T}}, \qquad \Psi = H - (u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = C_{\mathrm{p}} T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

雅克比矩阵

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{H}}}{\partial \hat{\boldsymbol{W}}} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathrm{p}} U & \rho n_x & \rho n_y & \rho n_z & \rho_{\mathrm{T}} U \\ \rho_{\mathrm{p}} u U + n_x & \rho(U + u n_x) & \rho u n_y & \rho u n_z & \rho_{\mathrm{T}} u U + n_x \rho_T \\ \rho_{\mathrm{p}} v U + n_y & \rho v n_x & \rho(U + v n_y) & \rho v n_z & \rho_{\mathrm{T}} v U + n_y \rho_T \\ \rho_{\mathrm{p}} w U + n_z & \rho w n_x & \rho w n_y & \rho(U + w n_z) & \rho_{\mathrm{T}} w U + n_z \rho_T \\ \rho_{\mathrm{p}} H U & \rho(H n_x + u U) & \rho(H n_y + v U) & \rho(H n_z + w U) & \rho_{\mathrm{T}} H U + \rho U C_{\mathrm{p}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{H}}}{\partial \hat{\boldsymbol{W}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\rho_{\mathrm{T}} + \rho C_{\mathrm{p}} \rho_{\mathrm{p}}) U}{\Phi} & \dfrac{\rho^2 C_{\mathrm{p}} n_x}{\Phi} & \dfrac{\rho^2 C_{\mathrm{p}} n_x}{\Phi} & \dfrac{\rho^2 C_{\mathrm{p}} n_x}{\Phi} & 0 \\ n_x/\rho & U & 0 & 0 & 0 \\ n_y/\rho & 0 & U & 0 & 0 \\ n_z/\rho & 0 & 0 & U & 0 \\ \dfrac{(\rho_p - \Theta) U}{\Phi} & \dfrac{\rho n_x}{\Phi} & \dfrac{\rho n_y}{\Phi} & \dfrac{\rho n_z}{\Phi} & U \end{pmatrix},$$

对于量热完全气体可化简为

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{H}}}{\partial \hat{\boldsymbol{W}}} = \begin{pmatrix} M_{\mathrm{r}}^2 U & \rho U_{\mathrm{r}}^2 n_x & \rho U_{\mathrm{r}}^2 n_y & \rho U_{\mathrm{r}}^2 n_z & 0 \\ n_x/\rho & U & 0 & 0 & 0 \\ n_y/\rho & 0 & U & 0 & 0 \\ n_z/\rho & 0 & 0 & U & 0 \\ \dfrac{(M_r^2 - 1) U}{\rho C_{\mathrm{p}}} & \dfrac{U_r^2 n_x}{C_{\mathrm{p}}} & \dfrac{U_r^2 n_y}{C_{\mathrm{p}}} & \dfrac{U_r^2 n_z}{C_{\mathrm{p}}} & U \end{pmatrix}.$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

附录 B 雅克比矩阵的特征系统

$$\Gamma^{-1}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{H}}}{\partial\hat{\boldsymbol{W}}}=\begin{pmatrix} M_r^2U & \rho U_r^2 n_x & \rho U_r^2 n_y & \rho U_r^2 n_z & 0 \\ n_x/\rho & U & 0 & 0 & 0 \\ n_y/\rho & 0 & U & 0 & 0 \\ n_z/\rho & 0 & 0 & U & 0 \\ \dfrac{(M_r^2-1)U}{\rho C_p} & \dfrac{U_r^2 n_x}{C_p} & \dfrac{U_r^2 n_y}{C_p} & \dfrac{U_r^2 n_z}{C_p} & U \end{pmatrix}.$$

雅克比矩阵的特征值: $\lambda_{1,2,3}=U$, $\lambda_{4,5}=U'\mp C'$.

其中

$$U=n_x u+n_y v+n_z w,$$

$$U'=\frac{1}{2}U(1+M_r^2),$$

$$C'=\frac{1}{2}\sqrt{(1-M_r^2)^2U^2+4M_r^2C^2},$$

$$C=c\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}.$$

$\Gamma^{-1}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{H}}}{\partial\hat{\boldsymbol{W}}}$ **的特征矩阵**

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho C_p & \rho C_p \\ 0 & -\dfrac{n_z}{n_x} & -\dfrac{n_y}{n_x} & -\dfrac{2n_xC_p}{r} & -\dfrac{2n_xC_p}{s} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2n_yC_p}{r} & -\dfrac{2n_yC_p}{s} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2n_zC_p}{r} & -\dfrac{2n_zC_p}{s} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho C_p} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{n_xn_z}{n^2} & -\dfrac{n_yn_z}{n^2} & \dfrac{n_x^2+n_y^2}{n^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n_xn_y}{n^2} & \dfrac{n_x^2+n_z^2}{n^2} & -\dfrac{n_yn_z}{n^2} & 0 \\ \dfrac{r}{4\rho c'C_p} & -\dfrac{n_xU_r^2}{2c'C_p} & -\dfrac{n_yU_r^2}{2c'C_p} & -\dfrac{n_zU_r^2}{2c'C_p} & 0 \\ -\dfrac{s}{4\rho c'C_pQ} & \dfrac{n_xU_r^2}{2c'C_p} & \dfrac{n_yU_r^2}{2c'C_p} & \dfrac{n_zU_r^2}{2c'C_p} & 0 \end{pmatrix},$$

其中,

$$r=(1-M_r^2)U+\sqrt{(1-M_r^2)^2U^2+4U_r^2n^2},$$

$$s=(1-M_r^2)U-\sqrt{(1-M_r^2)^2U^2+4U_r^2n^2},$$

$$n^2=n_x^2+n_y^2+n_z^2.$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2): 357 – 372.

[2] LIOU M S, STEFFEN C J. A new flux splitting scheme [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(1): 23 – 39.

[3] CHANG C H, LIOU M S. A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow: Stratified flow model and AUSM(+)-up scheme [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1): 840 – 873.

[4] LIOU M S. A sequel to AUSM: AUSM(+) [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 129(2): 364 – 382.

[5] LIOU M S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM(+)-up for all speeds [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 214(1): 137 – 170.

[6] ZHA G, SHEN Y, WANG B. An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme [J]. Computers & Fluids, 2011, 48(1): 214 – 220.

[7] SHEN Y, ZHA G. Low diffusion E-CUSP scheme with implicit high order WENO scheme for preconditioned Navier-Stokes equations [J]. Computers & Fluids, 2012, 55: 13 – 23.

[8] HARTEN A, LAX P D, LEER B V. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws [J]. SIAM Review, 1983, 25(1): 35 – 61.

[9] OBAYASHI S, GURUSWAMY G P. Convergence acceleration of a Navier-Stokes solver for efficient static aeroelastic computations [J]. AIAA Journal, 1995, 33(6): 1134 – 1141.

[10] EINFELDT B. On Godunov-type methods for gas dynamics [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1988, 25(2): 294 – 318.

[11] EINFELDT B, MUNZ C, ROE P L, et al. On Godunov-type methods near low densities [J]. Journal of Computational Physics, 1991, 92(2): 273 – 295.

[12] OBAYASHI S, WADA Y. Practical formulation of a positively conservative scheme [J]. AIAA Journal, 1994, 32(5): 1093 – 1095.

[13] ZHENG G, YANG G, QIAN W. Flutter analyses of complete aircraft based on hybrid grids and parallel computing [J]. Science China Technological Sciences, 2013, 56(2): 398 – 404.

[14] YANG G, OBAYASHI S, NAKAMINCHI J. Aileron flutter calculation for a supersonic fuselage-wing configuration [C]. 23rd International Congress of Aeronautical Science (ICAS), Toronto, 2002.

[15] FUKUSHIMA Y, MISAKA T, OBAYASHI S, et al. CFD-CAA coupled computation of fan noise propagation from engine nacelle based on Cartesian mesh method [C]. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Berlin, 2013.

[16] GUILLARD H, VIOZAT C. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit [J]. Computers & Fluids, 1999, 28(1): 63 – 86.

[17] CHORIN A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems [J]. Journal of Computational Physics, 1967, 2(1): 12 – 26.

[18] TURKEL E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 72(2): 277 – 298.

[19] ERIKSSON L. A preconditioned Navier-Stokes solver for low Mach number flows [C]. 3rd ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Paris, 1996.

[20] CHOI Y, MERKLE C L. The application of preconditioning in viscous flows [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 105(2): 207 – 223.

[21] TURKEL E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 72(2): 277 – 298.

[22] WEISS J M, SMITH W A. Preconditioning applied to variable and constant density flows [J]. AIAA Journal, 1995, 33(11): 2050 – 2057.

[23] COLES D, WADCOCK A J. Flying-hot-wire study of flow past an NACA 4412 airfoil at maximum lift [J]. AIAA Journal, 1979, 17(4): 321 – 329.

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Preconditioning HLLEW Scheme for Flows at All Mach Numbers

LIU Zhongyu, ZHANG Mingfeng, ZHENG Guannan, YANG Guowei
(*Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, CAS, Beijing* 100190, *China*)

Abstract: Based on HLLEW (Harten-Lax-Van Leer-Einfeldt-Wada) scheme, low speed preconditioning technology is introduced to develop a three-dimensional Navier-Stokes solver for flows at all Mach numbers. Low speed preconditioning techniques is introduced to reconstruct dissipative term in HLLEW scheme and preconditioning HLLEW scheme is proposed. Implicit time-marching method is constructed based on preconditioning Jacobian Matrix. Results of NACA 4412 incompressible flow and RAE 2822 transonic flow with preconditioning HLLEW scheme are compared with results by original method and experimental data. It shows that preconditioning HLLEW method improves accuracy and convergence rate for low speed flow. It can be applied for flows at all Mach numbers.

Key words: preconditioning; flow at all mach number; incompressible flow; HLLEW scheme; implicit time-marching

Received date: 2015-03-25; **Revised date:** 2015-05-28

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net