

波动问题的一个逆问题

——从测得的应变波形建立材料的应力——应变——应变率关系的

寇绍全

(1982年2月6日收到)

这篇文章导出了从应变波形计算材料的应力、应变和应变率关系的方程式。利用这些方程，本文建议了一个鉴别应变率无关材料的方法，指出了仅从测应变波形来得到其它物理量的基本步骤及算得的物理量可能具有的误差。作为应用的例子，我们得到了石灰岩在低压区的应力应变关系。

本文还指出，应力峰值的衰减指数不仅依赖于材料性质，也依赖于加载波形，因而不能用化爆来模拟核爆炸时的应力峰值衰减。

一、前言

为了究研材料的动态本构关系，近年来在我国一些单位先后建起了一维应力波加载设备。然而，基本的量测手段仍旧是测应变。因此，在不附加关于材料性质本身的假设的前提下，从实测的应变波形如何得到可用的应力、应变、应变率关系是作材料动态性质研究的人十分关心的一个问题。就材料性质而言，一些材料对应变率比较敏感或者说与应变率有关，另一些材料则在一定范围内与应变率无关或者说对应变率不那么敏感。无论从研究材料性质的角度，还是从使用材料性质的角度来看，涉及应变率无关的材料问题都可以大大简化，因此，人们急切地需要一个简单可行的办法来判别一种材料究竟是应变率有关或无关。迄今尚未见到上述问题的明确答案。本文遵循 Lagrange 分析方法的一些基本思想⁽¹⁾，企图对上述问题予以回答。

二、基本关系式

假设有一半无限长杆，均匀、连续、各向同性，变形过程中垂直于轴线的平面始终保持平面，在横截面上的应力分布均匀，忽略横向惯性，应力波未到之前，物理量保持常数且不随空间坐标而变化。由于过程很短，假设绝热。显然物理量只是空间 Lagrange 坐标 x 和时间

t 函数, 守恒方程为

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} - u \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (3)$$

ε 、 u 、 σ 、 ρ_0 和 H 分别为应变、质点速度、应力、密度和单位质量的内能。假定压应变、压应力为正。

为了使这些函数的反函数 $x=x(\varepsilon, t)$, $x=x(u, t)$, ... 单值, 我们用 $\varepsilon(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma(x, t)$ 等函数的极值线在 x, t 平面上的投影把 x, t 平面分成若干个区。我们称每一个区为一个支面, 如图 1。在每一个支面内, $x=x(\varepsilon, t)$, $x=x(u, t)$, ... 是单值的。下面的讨论限在同一支面内进行。

首先我们定义物理量 p 在某一固定幅度下的传播速度 C_p :

$$C_p = \frac{\partial x(p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} / \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

如果 p 代表质点速度 u 或应力 σ 等, 相应地 C_p 就是质点速度的波速或应力波速等等。一般情况下, 不同物理量的波速彼此并不相等。然而, 在第三节中, 我们将会看到, 在一些特殊情况下它们是相等的, 也只有在那时笼统地谈波速才有明确的意义。通常这些波速是 x, t 的函数, 只在一些特殊情况下才是常数。

把 (4) 式与 (1)、(2)、(3) 式结合起来。

在 $x = \text{常数}$ 的面上

$$\frac{\partial u(\varepsilon, x)}{\partial \varepsilon} = C_u, \quad \frac{\partial \sigma(u, x)}{\partial u} = \rho_0 C_\sigma, \quad \frac{\partial H(u, x)}{\partial u} = \frac{\sigma}{\rho_0 C_u} \quad (5)$$

在 $t = \text{常数}$ 的面上

$$\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = C_t, \quad \frac{\partial \sigma(u, t)}{\partial u} = \rho_0 C_u, \quad \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} = \frac{\sigma}{\rho_0 C_H} \quad (6)$$

方程式 (5)、(6) 是以波速为媒介建立各物理量的关系。如果采用光测的办法, 得到了某些固定时刻全场的物理量分布, (6) 式是很有用的; 如果是测某几个 x 处的波形, (5) 式就特别有用。但 (5)、(6) 两式仍不方便, 因为一次试验通常只能测一种物理量的波形, 而这两式则要求同时测几个物理量。所以, 我们要建立从测一个物理量的波形 (如应变波形) 来

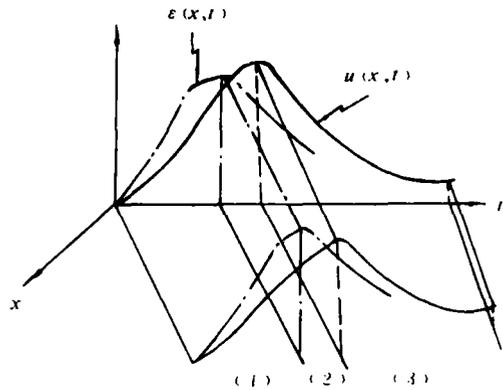


图 1 支面分割

推算其它物理量的表达式。我们在一个支面内来建立这种关系。

因为

$$\begin{aligned} C_u - C_\varepsilon &= \frac{\partial x(u, t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial x(u, t)}{\partial t} + \frac{\partial x(u, t)}{\partial t} \frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) \\ &= - \frac{\partial x(u, t)}{\partial u} \frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)可得

$$\frac{\partial C_\varepsilon(\varepsilon, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) \quad (8)$$

联合式(7)、(1)可得

$$\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} = (C_u - C_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} \quad (9)$$

由式(8)、(9)可得

$$\int_\varepsilon \frac{\partial C_\varepsilon(\varepsilon, t)}{\partial t} d\varepsilon = (C_u - C_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} + f(t) \quad (10)$$

由初始条件可知 $f(t) \equiv 0$ ，于是

$$C_u = C_\varepsilon + \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t}} \int_{\varepsilon_0}^\varepsilon \frac{\partial C_\varepsilon(\varepsilon, t)}{\partial t} d\varepsilon \quad (11)$$

$$u - u_0 = \int_{\varepsilon_0}^\varepsilon C_u d\varepsilon \quad (12)$$

类似推导可得

$$C_\sigma = C_u + \frac{1}{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}} \int_{u_0}^u \frac{\partial C_u(u, t)}{\partial t} du \quad (13)$$

$$\sigma - \sigma_0 = \rho_0 \int_{u_0}^u C_\sigma du \quad (14)$$

$$H - H_0 = \int_{u_0}^u \frac{\sigma}{\rho_0 C_u} du \quad (15)$$

当应变波形连续可微时,利用式(4)及式(11)~(15),仅从测得的应变波形就可以算出质点速度、应力、能量,应变率是容易得到的,从而建立了它们之间的对应关系。

三、应变率无关材料的判别

首先我们证明波在杆中传播时,如果应变在某个区间 $[\varepsilon_0, \varepsilon]$ 内,满足 $\frac{\partial C_\varepsilon(\varepsilon, t)}{\partial t} \equiv 0$, 那么材料在这段应变范围内,应力、应变关系不依赖于应变率。考察一下式(11)~(15),上述结论是明确的。这时

$$C_\sigma = C_u = C_\varepsilon = C(\varepsilon)$$

$$u = u(\varepsilon), \quad \sigma = \sigma(\varepsilon), \quad H = H(\varepsilon)$$

如果材料的性质与应变率无关, 这时 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 。 $C^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = C^2(\varepsilon)$, $C d\varepsilon = de$, 并引入 ξ , η 两个新变量, 则方程式 (1)、(2) 化成两族特征线关系

$$\xi = x - Ct, \quad \frac{d}{d\xi}(e - u) = 0$$

$$\eta = x + Ct, \quad \frac{d}{d\eta}(e + u) = 0$$

设杆中传播的是右行波, 且波前均匀, 则在 $\xi = x$ 的特征线上, u, ε, σ 都是常数。特征线就是等幅值物理量的传播线, 特征线的斜率即为这一幅度物理量的传播速度, 且相应于某一个 ε 的 σ 和 u 以同一速度传播, 即

$$C_\xi = C_u = C_\sigma = C(\varepsilon)$$

II.

$$\frac{\partial C_\xi(\varepsilon, t)}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

所以, 波在初状态均匀的杆中传播时, $\frac{\partial C_\xi(\varepsilon, t)}{\partial t} = 0$ 是判别应变率无关材料的充分必要条件。因此, 我们可以利用冲击试验测得未知材料性质的杆中不同位置的几个应变波形并求出 $C_\xi(\varepsilon, t)$, 利用 (16) 式来判别这种材料是否是应变率无关材料。如果 (16) 式成立, 式 (14) 化为

$$\sigma = \rho_0 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} C_\xi^2 d\varepsilon + \sigma_0 \quad (17)$$

顺带指出, 由式 (11)~(15) 还可以看到, 当 $\varepsilon - \varepsilon_0$ 趋于零时, 也就是波头上, 关系式

$$C_\sigma = C_u = C_\xi = C(\varepsilon)$$

成立。所以, 在连续波的波头上, 在应变率无关材料内传播的单波区内, 与某一应变相应的应力、应变、质点速度的波速彼此相等。

四、本构关系的求法及误差估计

求一根杆的应力、应变、应变率关系时, 必须对它进行冲击试验, 并测出杆的几个不同位置的应变波形。利用 (4) 式, 我们可以得到应变波速, 再利用 (11) 到 (15) 可以求得质点速度 u , 应力 σ 及能量 H 。我们看到, 至少要两个应变波形才能得到应变波速, 至少要两个应变波速才能确定质点速度及质点速度波速, 而至少要两个质点速度波速才可以确定应力。因而, 我们必须至少得到四个不同位置的完整的应变波形, 且它们的时间零点相同, 才可以得到这种材料的应力、应变、应变率、质点速度、能量之间的关系。由于从应变波形计算其它物理量的程序是固定的, 上述方法将为材料性质的研究带来方便。

仅从测应变波形来确定其它物理量究竟会引入多大误差是人们十分关心的一个问题。下面我们对这些导出物理量可能具有的误差进行粗略估计。我们考虑测量系统误差, 读数误差, 计算舍入误差, 但忽略材料性质的不均匀性, 应变片间距影响到积分步长而引起的误差。

我们让应变片间距 h 相等, 由于贴片工艺及长度测量引起的距离偏差为 Δh 。 ε 的某一固定幅度传过这段距离的时间为 T , 时间误差为 ΔT 。 Δh 、 ΔT 都是与这些物理量有关的系统误差和读数误差之和。 $\Delta\varepsilon$ 、 $\Delta\rho$ 作类似定义。 计算积分时, 我们利用辛普松公式, 并假定在 $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ 区间内, $\frac{d^4}{d\varepsilon^4} \left(\frac{dC_\varepsilon}{d\varepsilon} \right) \sim O(1)$, $\frac{dC_\varepsilon(\varepsilon, t)}{d\varepsilon} \sim O(1)$ 。 在上述条件下, 由第二节的关系式可以很方便地得到物理量的相对误差

$$\frac{\Delta C_u}{C_u} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{2}{3} \frac{\Delta h}{h} + \frac{7}{3} \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{2}{3} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{14}{9} \frac{\Delta T}{T} + \frac{4}{9} \frac{\Delta h}{h}$$

$$\frac{\Delta C_\sigma}{C_\sigma} = \frac{4}{3} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{43}{9} \frac{\Delta T}{T} + \frac{8}{9} \frac{\Delta h}{h}$$

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{8}{9} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{86}{27} \frac{\Delta T}{T} + \frac{16}{27} \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{34}{27} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{298}{81} \frac{\Delta T}{T} + \frac{68}{81} \frac{\Delta h}{h} + \frac{4}{3} \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

可见时间的精度对结果影响最大。 所以, 首先要提高时间的精度。

在使用动态电阻应变仪, 1MHz 频率响应的示波器及其它相应设备的情况下, 要测物理量的误差 (包括系统误差和读数误差) 可分别达到 $\Delta\varepsilon/\varepsilon = 3\%$, $\Delta\rho_0/\rho_0 = 1\%$, $\Delta h/h = 2\%$, $\Delta T/T = 3\%$ 。 因而, 由应变变形算得的质点速度和应力的相对误差分别为 $\Delta u/u = 8\%$, $\Delta \sigma/\sigma = 14\%$, 这些数据可以给我们一个粗略的概念。

五、石灰岩在低压时的动态力学性质

我们利用上述方法来具体考察一下石灰岩的动态力学性质, 采用文献[2]提供的应变波形。 文献[2]用动态光弹性方法测得了应力波在 Salem 石灰岩, Charcoal 花岗岩和 Berea 砂岩杆中的传播和衰减。 载荷是由 560 毫克迭氯化铅在杆的一端起爆产生的。 石灰岩杆中几个不同位置的应变波形如图 2、图 3 所示。 石灰岩的密度约为 2.34g/cm^3 , 实验的应力最大为 930kg/cm^2 , 波前的传播速度为 5130m/s , 波在传播过程中能量要衰减, 其衰减指数为 $C_R = 0.771 \times 10^{-1} \text{mm}^{-1}$ 。

考察图 2 及图 3, 可将 x, t 平面割成两个支面。

波形的加载部分比较陡峻, 可近似认为无滞散, 以常数 C 传播。 初始时刻 ε, u 和 σ 都为零, 满足应变率无关材料的判别式 (16) 因此, 这种石灰岩在加载时表现得对应变率不敏感。

分析图 2、图 3 可以看到, 波后卸载的 ε 随到波头的距离近似按指数衰减。 对于图 2 所示的应变随 x 的变化, 我们用 $\varepsilon_0 e^{-Cx}$ 去逼近卸载部分, 其近似程度是比较好的, 其中 $x,$

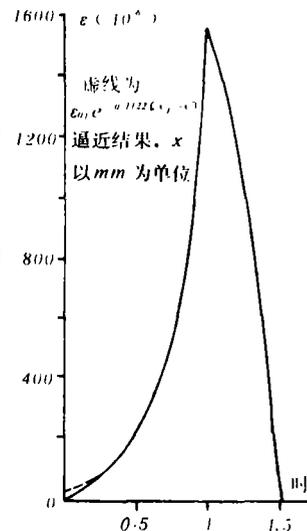


图 2 石灰岩杆中 $\varepsilon - x$ 图

为波峰的位置, x_1 , x 以 mm 为单位, $A = 0.1122mm^{-1}$ 。应变随时间的变化也可近似用指数衰减来描述。综合上述特点, 我们采用

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\beta q} e^{-ax} \quad (18)$$

来近似描述波的卸载部分, 其中 ε_0 为常数, $g = (t - x/c) \neq 0$, C

为波头的传播速度, 应等于加载波前的速度。

当 $t = t_1$ 时, 波头位置在 $x_1 = C t_1$ 处, 式(18)变成

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-ax_1} e^{-\beta \cdot C \cdot (t_1 - x_1/c) - ax} \quad (19)$$

比较式(19)和图 2 中的波形逼近式可知

$$\frac{\beta}{C} - a = 0.1122mm^{-1} \quad (21)$$

文献[2]指出, 能量是随波传播距离的增加而成指数衰减的

$$\frac{W_2}{W_1} = e^{-C_R(x_2 - x_1)} \quad (22)$$

C_R 已如前所述, W_2, W_1 分别表示波头到达 x_2, x_1 时, 杆所具有的变形能, 并采用了近似公式

$$W = \frac{1}{2} E_R A \int_l \varepsilon^2 dx$$

来计算, 其中 l 是波长, E_R 为杆的弹性模量, A 为横截面积。把 ε 的表达式(18)代入, 容易证明,

$$\frac{W_2}{W_1} = e^{-2a(x_2 - x_1)} \quad (23)$$

比较式(23)和(22), 可得

$$a = \frac{C_R}{2} = 0.386 \times 10^{-1} mm^{-1} \quad (24)$$

由式(21)和(24)可以得到 a 和 β , 从而确定了式(18)。

利用(4)式所定义的波速, 从式(18)可得

$$C_0 = C \left(1 - \frac{Ca}{\beta} \right) \quad (25)$$

可见卸载时的波速 C_0 也是常数。因此 Salem 石灰岩在实验的应力范围内, 无论加载还是卸载都可以认为是应变率无关的。利用式(17)可求得应力应变关系

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon && \text{加载} \\ \sigma - \sigma_m &= E_1 (\varepsilon - \varepsilon_m) && \text{卸载} \end{aligned} \quad (26)$$

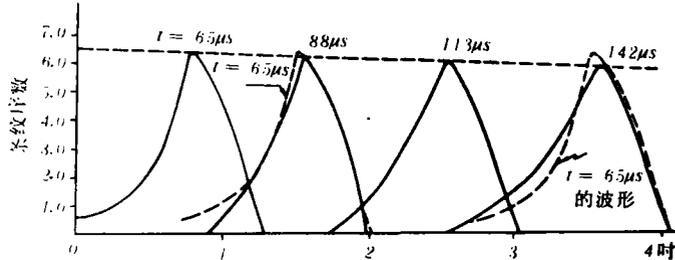


图 3 杆中不同时刻的应变分布

其中 $E = \rho_0 C^2$, $E_1 = \rho_0 C^2 / (1 - \frac{Ca}{\beta})^2$, σ_m 和 ε_m 分别为峰值应力和应变。一般地说, 因为

$$0 < C_1 < +\infty$$

且 C 、 a 、 β 为正数, 所以

$$0 < \frac{Ca}{\beta} < 1$$

因而

$$E_1 > E$$

代入 C 、 a 、 β 和 ρ_0 的值, 可得

$$E = 0.617 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_1 = 0.621 \times 16^6 \text{ kg/cm}^2$$

所以这种石灰岩具有线性滞回的应力应变关系, 如图 4, 从而我们把文献(2)中所试验的石灰岩的应力应变关系给出来了。由图 2、图 3 可以看到, 式(18)的逼近在卸载区的低应力部分是不满意的, 因此, 线性滞回的应力应变关系在载荷卸到应力较低时必须予以修正。

Charcoal 花岗岩与石灰岩有类似的波传播特点, 然而 Berea 砂岩的应变波速不仅是应变幅值的函数, 还与时间有关。因此, Berea 砂岩表现了明显的应变率效应。由此, 我们还可以看到, 有些岩石应变率效应不甚敏感, 动态应力应变关系与静态的基本上是一致的; 而有些岩石, 如 Berea 砂岩, 则不可能用静态应力应变关系去定性描述动态情况。

我们还可以看到, 如果有一线性滞回材料的半无限长杆, 端面边界条件是

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\beta t}$$

其中 $\beta \neq 0$ 。初始时刻杆中 ε 、 u 、 σ 为零。那么, 式(18)是波在杆中传播的解, 且这个解是唯一的。其中

$$a = \frac{\beta}{C} \left(1 - \frac{C}{C_1} \right) \quad (27)$$

这里 $C = \sqrt{E/\rho_0}$, $C_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$ 。由式(27)可知, $0 < a < \beta/C$ 。其中 β 被称为减幅指数, 衰减指数 a 最大不超过 β/C , $a = \beta/C$ 相应于刚性卸载。

若材料是理想弹性体, 式(27)中 $C = C_1$, 尽管载荷是随时间成指数衰减的, 仍有 $a = 0$; 若材料是非弹性的 ($C \neq C_1$), $\beta = 0$, 同样有 $a = 0$ 。所以, 应力波在介质中衰减指数的大小应由材料性质和加载波形两个因素决定。球面应力波在岩石介质中传播的波头渐近解⁽⁴⁾也说明了这一点。研究核爆炸产生的应力波在岩石介质中衰减时, 岩石不可能当成弹性介质, 且核爆与核爆的波长有着很大的差别。因此, 就应力波衰减指数而言, 小型化爆是很难模拟核爆的。

一般波动问题中, 我们是知道材料性质, 初始条件及边界条件, 求波动方程的解。本文提出的是一个逆问题, 波动方程的解是已知的, 要求的是材料性质。我们看到, 至少要在杆

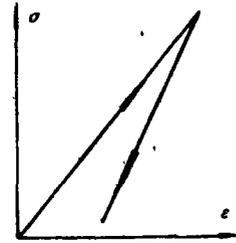


图 4 Salem 石灰岩的应力应变关系

的四个不同位置得到可靠的应变波形后才能得应力、应变、应变率关系。可是, 当前应变片测量中的一些具体技术问题对所得结果的精度给予了限制。随着测量技术的不断提高, 尤其能用光学的办法求出全场的 $\varepsilon(x, t)$, 那么, 定会得到这个逆问题更精确的解。如果再有微处理机及从应变求其它物理量的标准程序, 可能为材料性质的研究开辟广阔的前景。

感谢郑哲敏、朱兆祥、谈庆明、赵士达和杨振声等同志对本文的初稿提出的许多指导性意见。

参 考 文 献

- (1) Fowles, G. R., "Experimental Technique and Instrumentation", *Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading*, ed. by Chou, P. C. and Hopkins, A. K. (1972).
- (2) Fourny, W. L., et al., *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 33(1) (1976), 121.
- (3) Jaeger, J. C. and Cook, N. G. W., *Fundamentals of Rock Mechanics*, third edition, London, Chapman and Hall (1979).
- (4) 白以龙, "应力波在线性磁滞体中的衰减", 力学学报, No. 2 (1978).

AN INVERSE PROBLEM TO WAVE PROPAGATION

Kou Shaoquan

Abstract

This paper presents derivations of the equations which can be used to construct the stress-strain-strainrate relations of materials by strain profiles. On the basis of these equations, a method of assessment of the strain rate independent materials is proposed. The errors of the physical quantities, such as stress, particle velocity etc., derived from strain are discussed. An example of application of this method is illustrated and it shows that at low pressure, the dynamic properties of the limestone can be approximated by linear hysteresis model. It is also shown that the ratio of the attenuation of peak stress not only depends on the properties of materials but also on the shape of the stress wave.