高速射流在孔底的堆积

谈庆明

（1982年5月4日收到）

本文在理论上探讨了射流在侵彻或钻孔过程中，孔径和射流在孔底的堆积厚度之间的关系。用不可压缩流体理论证明在平面问题中孔宽具有极限值，当孔宽变小而趋于该值时，堆厚趋于无穷。

一、前　　言

聚能射流侵彻靶板的晚期，靶板强度起重要的作用，一则使侵彻速度降低，再则使孔径缩小。随着孔径变小，射流会在孔底堆积得更厚，可能降低射流的侵彻能力。高速水射流在煤、岩中钻孔过程中同样也存在这个问题。本文用不可压缩流体理论证明射流在孔底的堆积厚度确实和孔径大小有关，而且存在一个对应于无限堆厚的最小极限孔径。做法是：假设在准定常侵彻阶段靶内形成了具有一定孔径的孔形，求解不可压缩的射流在这固定孔形壁面上的绕流运动，从而考察孔径和射流堆积厚度之间的对应关系。

二、平面不可压缩流体运动模型

为了考察孔径大小对临界侵彻现象的影响，可用下面的模型进行简化分析。讨论一股宽度为Q的不可压缩平面射流以无量纲速度1流入一个不变形的刚性平底直孔内，孔宽为$D=2R\ (>2Q)$，见图1。射流流至孔底而折回，其外表面（自由面）的折转处离孔底距离为δ，可定义δ为堆积厚度。问题是要求堆积厚δ与射流宽Q以及孔宽D之间存在怎样的函数联系，也等于找δ/Q与Q/D之间的关系。

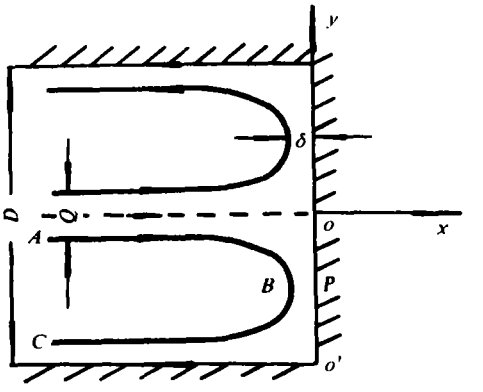


图1　流场示意

要说明，实际问题常是轴对称的，而不是平面运动，孔底也不一定是平直的。这里只求对平面问题进行初步的探讨，定性的结论估计对了解轴对称问题的本质会有帮助的，而孔径与堆厚的定量关系会有所差异。

三、保角变换及流场解

上述平面不可压缩无旋运动可以用保角变换的方法求得解析解

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

图1是物理平面 Z（$=x+iy$）上的流场示意。假设复共轭速度为 w（$=u-iv$）。在 Z 面上，设孔壁位于 $y=\pm D/2$ 上，孔底位于 $x=0$ 上，宽度为 Q 的射流以 x 轴为对称轴从 $x=-\infty$ 沿 x 轴流向孔底。因为运动具有对称性，只要求解下半平面的流场就够了（见图2a）自由面 ABC 从无穷远点 A（即流动起点）开始，在 B 点处折转，最后流向无穷远点 C。显然，原点 o 和孔底的拐角点 o'（$Z=-Di/2$）都是驻点。

边界条件有下面五个：

（1） 射流入口（$x\to-\infty$，$-Q/2\leqslant y\leqslant 0$）处有 $u\to 1$，$v\to 0$；

（2） 对称轴（$y=0$，$x\leqslant 0$）上有 $v=0$；

（3） 孔底（$x=0$，$-D/2\leqslant y\leqslant 0$）处有 $u=0$；

（4） 孔壁（$y=-D/2$，$x\leqslant 0$）上有 $v=0$；

（5） 自由面（位置待定）上有 $u^2+v^2=1$。

求流场实际上就是要寻求一个满足所有边界条件的解析的复位势函数 $\zeta(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$。当然，如果能够找到某一解析函数，它代表复位势 ζ 与复共轭速度 w 之间的关系，那么利用大家所熟知的关系式 $w=d\zeta/dz$，就可求得 $\zeta(z)$，即

$$\zeta=\int w\,dz \qquad 或 \qquad z=\int\frac{d\zeta}{w}$$

下面将进行一系列的保角变换，在不同的复变量平面上，对应点将用同一个字母标志，对应的边界回路方向将在图上用箭头标出。

根据边界条件不难得到复共轭速度 w 和复位势 ζ 面上的对应区域。在 w 面上，它是一个去掉一垂直割线段的半圆，如图2b所示。这里两驻点 o 及 o' 在原点处重合；而 p 点的 w 值为 $w_p=hi$，其中 h 是由无量纲孔宽 D/Q 决定的一个常数，其意义会在后面第四节讨论堆积的一段内得到进一步的明确。在 ζ 面上，由于刚壁边界是零流线，而自由面是外流线，所以对应区域是一个带状区，由图2g所示。

可以找到下列五个保角变换，把 w 面上的流压顺次保角映射到 G、ξ、η、J、ζ 面上去：

$$G=w^2 \qquad 或 \qquad w=G^{1/2}$$

$$\xi=\frac{1}{2}\left(G+\frac{1}{G}\right)$$

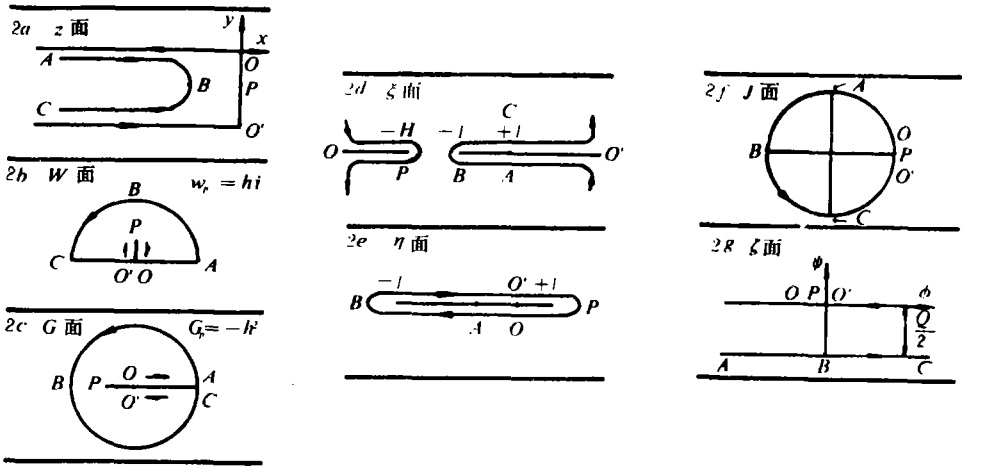
$$\eta=\frac{(H-1)(\xi-1)}{(H+3)\xi+3H+1}，其中 H=\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{1}{h^2}\right)$$

$$J=\eta\pm\sqrt{\eta^2-1} \qquad (\eta\ 在\frac{上}{下}半面，取\ \text{“}-\text{”}/\text{“}+\text{”}\ 号)$$

$$\zeta=\frac{Qi}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,J-\frac{Q}{4}i$$

图2a—2g表示各平面上的映射区域。在 G 面上是去掉一水平割线段的单位圆；ξ 面上是去掉实轴左右两条半无限直线段的无限平面区域；η 面上是去掉实轴上一水平线段的无限平面区域；J 面上是一单位圆。图旁的表给出几个特征点在各平面上的对应关系。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



对应点的复数值表

	A	B	C	O′	P	O
W	1	i	−1	0	hi	0
G	1	−1	1	0	$-h^2$	0
ξ	1	−1	1	∞	−H	−
η	0	−1	0	$\frac{H-1}{H+3}$	1	$\frac{H-1}{H+3}$
J	i	−1	−i	$\frac{H-1}{H+3}-\sqrt{(\frac{H-1}{H+3})^2-1}$	1	$\frac{H-1}{H+3}+\sqrt{(\frac{H-1}{H+3})^2-1}$
ζ	—	$-\frac{Q}{2}i$	·		0	

图2　变换区域对应

从以上诸变换，可以得到用中间变量η表达的联系复位势ζ与复共轭速度w的参数式：

$$\begin{cases} \zeta=\dfrac{Qi}{\pi}arctg\left[\eta\pm\sqrt{\eta^2-1}\right]-\dfrac{Q}{H}i \\ \eta=\dfrac{(H-1)[(1/2)(w^2+w^{-2})-1]}{(1/2)(H+3)(w^2+w^{-2})+3H+1} \end{cases}$$

因为

$$dz=\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dw}\cdot\frac{dw}{w}$$

因此

$$dz=\frac{Qi}{\pi}\cdot\frac{1\pm\eta/\sqrt{\eta^2-1}}{1+(\eta\pm\sqrt{\eta^2-1})^2}\cdot\frac{b}{(\xi+a)^2}(1-\frac{1}{w^4})dw$$

其中常数$a=\frac{3H+1}{H+3}$，$b=\frac{4(H^2-1)}{(H+3)^2}$。进一步积分，即得到物理平面上$Z$点和复共轭速度面上$w$点之间的一一对应，即：

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$Z=\frac{Qbi}{\pi}\cdot\int\frac{1\pm\eta/\sqrt{\eta^2-1}}{1+(\eta\pm\sqrt{\eta^2-1})^2}\cdot\frac{d\xi}{(\xi+a)^2\cdot w}$$

上式中符号的选择约定和前面$J\sim\eta$变换中相同。

四、堆积的极限孔宽

我们最关心的问题是：对于一定宽度Q的射流，孔宽D和堆积厚δ之间存在什么样的联系，从而搞清是否存在极限孔宽D_*，即当D变小到D_*时堆积厚δ会趋于无穷。这里不必把共轭速度分布$w(z)$具体地积分出来，而只要求出D/Q与δ/Q之间的关系就可以了。

因为

$$\frac{D}{Q}=\frac{2(Q+y_A-y_C)}{Q}$$

为求D/Q可先算y_A-y_C，取Z面上自由面作积分路径，求积并取虚部，即得

$$y_A-y_C=Im\left[\int_{CBA}dz\right]=Im\left[\int_{CB}dz+\int_{BA}dz\right]$$

其中符号Im表示取虚部。实际上，在ξ面上算积分最为方便，因在ξ面上沿线段CB和BA，ξ均为实数。经简单的代数运算，求得

$$y_A-y_C=\frac{Q}{\pi}\cdot\sqrt{H+1}\int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{(1-\xi^2)(\xi+H)}$$

即有

$$\frac{D}{Q}=2\left[1+\frac{\sqrt{H+1}}{\pi}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{(1-\xi^2)(\xi+H)}\right]$$

注意到在Z面上堆积厚δ就等于x_P-x_B，在ξ面上求积可化为实数积分，于是有

$$x_P-x_B=\int_{BP}dz=\int_{\xi_B}^{\xi_P}\frac{Q}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{H+1}{2}}\cdot\frac{d\xi}{(\xi-1)\sqrt{(\xi+1)(\xi+H)(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}}$$

化简即得

$$\frac{\delta}{Q}=\frac{\sqrt{H+1}}{2\pi}\left[\int_1^H\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-H)}}+\frac{1}{\sqrt{H+1}}ln(H+\sqrt{H^2-1})\right]$$

综合以上公式，我们求得了联系管宽和堆积厚之间的关系式，即$D/Q\sim\delta/Q$关系，这是一个以H作为参数的表达式：

$$\frac{D}{Q}=2\left[1+\frac{\sqrt{H+1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi+H)}}\right]$$

$$\frac{\delta}{Q}=\frac{\sqrt{H+1}}{2\pi}\left[\int_1^H\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-H)}}+\frac{1}{\sqrt{H+1}}ln(H+\sqrt{H^2-1})\right]$$

附表给出它的数值结果。

从图2b的共轭速度w面上可以看出，h有一个变化范围，即$0\leqslant h\leqslant 1$。下面讨论随着h从1逐渐减小到0流动性质会有什么样的变化。

当$h\to 1$，P点趋向于B点，速度趋向于最大值1。反映到物理平面Z（图2a）上，

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

说明当射流在孔底滑流至P点时速度可以达到和自由面上速度相同的大小，这只有管宽很大才有可能。事实上，当$h\to 1$，相应有$H\to 1$，这时有

$$\frac{y_A-y_C}{Q}\to\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi+1)\sqrt{1-\xi}}\to\infty$$

当宽管逐渐减小，W面上P点向原点靠拢，P点所对应的速度也就越来越小。

当$h\to 0$，P点趋向于原点，即速度趋于零。反映到物理平面Z（图2a）上，说明沿整个孔底OPO'速度趋于零，这只有堆积厚度趋于无穷才有可能。事实上，当$h\to 0$，相应有$H\to\infty$，由以上解答容易证明

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi+H)}}\to\frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

及

$$\int_{1}^{H}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-H)}}\to\frac{1}{\sqrt{H}}ln(H+\sqrt{H^2-1})$$

于是证明了D/Q存在一个极限比值$(D/Q)_*$，它等于4，即当$D/Q\to 4$，相应有$\delta/Q\to\infty$。

至此，证明了孔宽不能无限缩小，为保证流体的自由面在孔底光滑折回，孔宽最小不能小于射流厚度的四倍。当比值接近于4时，射流堆积厚度急剧增加。

五、小　　结

以上分析表明孔宽会影响侵彻，孔宽与射流宽度之比D/Q存在一个极限值$(D/Q)_*$。在平面运动情况，这个值是4。在实际的轴对称问题中，也会发生类似现象，但因孔底不会是方槽形，具体的极限值会有些差异。在聚能射流侵彻晚期，靶板的强度效应使孔径逐渐变小，射流在孔底堆积逐渐增厚。当D/Q向$(D/Q)_*$值接近时，堆积剧增，侵彻的定常性质不复存在。由于这种急剧堆厚，射流对孔壁的高压作用面积迅速扩大，部分能量用于扩孔，便使侵彻减速和停止，然而孔径的增大又会使堆积减轻，从而形成侵彻晚期葫芦状的孔形，这是一种实际发生的典型孔底形状。上述分析只是一种可能，尚需实验的仔细考察和验证。

附　　表

Q/D	0.25	0.249	0.193	0.147	0.119	0.077	0.048	0
δ/Q	$-\infty$	1.692	0.629	0.531	0.510	0.502	0.501	0.5

作者得到郑哲敏同志在选题和确定模型等方面的指导和帮助，在此表示感谢。还要感谢闻国春同志和梁德寿同志的讨论和帮助。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

THE ACCUMULATION OF HIGH VELOCITY JET ON THE HOLE BOTTOM

Tan Qingming

Abstract

In this paper the relation between the hole diameter and the pile thickness of the jet on the hole bottom for a jet penetrating or drilling process is theoretically examined. Applying the theory of imcompressible fluid, it is proved that the hole width has a limit for the plane case. When the hole width decreases and approaches to this limit, the pile thickness increases and approaches to infinity correspondingly.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net