

聚能射流的稳定性问题**

郑哲敏

本文概述了我们在聚能射流稳定性方面的一部分理论工作，主要介绍射流颈缩和拉断的规律和机理。本文所依据的实验结果是 204 所提供的。

实验表明，聚能弹所形成的射流在飞行一定的时间和距离后，就在不同的部位上先后产生颈缩，继而拉断，原来是完整的射流断成不连续的许多段。图1.1表示一种聚能射流出现可辨别的颈缩和拉断的时间与位置。

颈缩，特别是拉断后的射流严重丧失侵彻能力。因此，研究颈缩和拉断的规律，明确影响这一现象的物理因素是十分必要的。

1. 射流失稳的量纲分析和半经验公式

颈缩与拉断现象并不陌生。在静拉伸试验中，对于有一定塑性或延展性的材料，试件先经历均匀变形，继而在局部位置发生颈缩。于是试件的变形便集中在颈缩区，使那里的截面积急剧减少，最后导致拉断。通常以断面收缩率 $\Psi (= 1 - \frac{A_1}{A_0})$ 表示材料的延展性。在这里， A_0 表示试件的原始截面积， A_1 表示断口处的截面积。

聚能射流是具有速度梯度的，正常射流的头部速度最大，往尾部走，速度递减，因此射流是处于拉伸变形状态的。我们以 σ 表示拉伸应力，并假设 σ 是与拉伸应变和应变率无关的常数。显然，如果这时射流的一个截面由于某种原因减小了，那么它将继续减小下去直至拉断。这是射流失稳的一个基本原因。

基于这种认识，我们先用量纲分析的方法，建立射流失稳的半经验关系。

首先，质点速度为 u_j 的射流微元在时间 t ，空间的平面上的轨迹为

$$Z = u_j t + b \quad (1.1)$$

射流的头部速度 $(u_j)_{max}$ 和尾部速度 $(u_j)_{min}$ ，以及 $b = b(u_j)$ ，因弹而异。它们是可以适当的试验确定的。如果知道速度为 u_j 的射流出现颈缩或拉断的时间，则由 (1.1) 式可以求出相应的位置。

现考虑一均匀初始半径 a_0 的无限长的理想射流，并假设其初始速度梯度为 $1/t^*$ 。令 σ 和 ρ_j 分别表示拉应力和密度（均为常数），令 t_{b1} 表示出现明显颈缩的时间，则根据量纲分析，我们有

** 本文是力学研究所的研究报告（1977年1月）中的部分内容。

本文于 1981 年 1 月 29 日收到

$$\frac{t_{b1}}{t^*} = f\left(\frac{t^*}{a_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_j}}\right) \quad (1.2)$$

另外, 根据质量守恒原理, 我们有

$$\pi \rho_j a_0^2 dZ \Big|_{t=0} = dm,$$

也即

$$a_0^2 t^* = \frac{1}{\pi \rho_j} \frac{dm}{du_j} \quad (1.3)$$

其中 dm 是速度差为 du_j 的两个射流微元间的质量。

t^* 通常是个很小的量 (与 t_{b1} 相比)。从物理上考虑, 当 $t^* \rightarrow 0$ 并保持 (1.3) 式右端不变的条件, t_{b1} 应当与 t^* 无关。于是有

$$t_{b1} = C_1 \left(\frac{\Omega \rho_j}{\sigma}\right)^{1/3} \quad (1.4)$$

其中

$$\Omega = \frac{1}{\pi \rho_j} \frac{dm}{du_j}, \quad (1.5)$$

这里 C_1 是与 Ω , ρ_j , σ 等射流性质无关的一个纯数。将 (1.4) 式代入 (1.1), 我们得到

$$Z_{b1} = C_1 u_j \left(\frac{\Omega \rho_j}{\sigma}\right)^{1/3} + b \quad (1.6)$$

在考虑拉断时, 需要包括断面收缩率这个因素。根据同样的道理, 在 $t^* \rightarrow 0$ 的条件下, 我们有

$$t_{b2} = C_2(\psi) \left(\frac{\Omega \rho_j}{\sigma}\right)^{1/3}, \quad (1.7)$$

$$Z_{b2} = C_2(\psi) \left(\frac{\Omega \rho_j}{\sigma}\right)^{1/3} u_j + b. \quad (1.8)$$

对于真实射流 Ω 是 u_j 的函数, 这个函数可由试验测定。如又假设从头部到尾部, $\frac{\sigma}{\rho_j}$ 和 ψ 可以认为是常数, 则公式 (1.4) 和 (1.6) 以及 (1.7) 和 (1.8) 可以统一写为

$$t_b = C' \Omega^{1/3} \quad (1.9)$$

$$Z_b = C' u_j \Omega^{1/3} + b$$

相应于出现明显颈缩和拉断, C' 取不同的数值。由图 1.1 可以看到实验结果与半经验公式 (1.9), 在低速段 ($u_j < 5$ 公里/秒) 相符甚好。这说明在低速段, 射流失稳的机理是与我们的假设一致的。高速段的情况留在

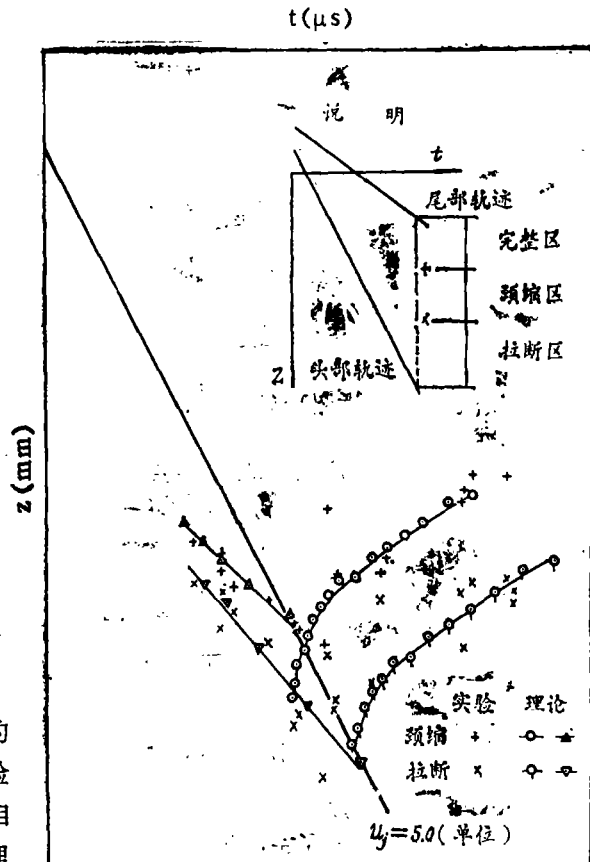


图 1.1

后面讨论。

2. 射流稳定性的微扰方程及其解

在这一节里我们先给出射流稳定性的微扰方程。为此，做以下假设：

(1) 时间等于零时，射流的速度分布是线性的，半径是均匀的，我们分别以 $1/t^*$ 和 a_0 表示这个时刻的速度梯度和射流半径。射流的长度是无限的。我们令 x 表示固定于射流微元的拉格朗日座标系。在射流微元速度不变的条件下，射流微元的位置 Z 和时间 t 有下述关系（参看图1.2）。

$$Z = u_j(t + t^*)$$

$$\text{其中 } u_j = \frac{x}{t^*}$$

我们令 $\zeta(x, t)$ 表示射流微元在 x 方向的微扰位移，则 x 微元在 t 时刻的位置 Z 为

$$Z = u_j(t + t^*) + \zeta$$

射流微元的轴向拉伸应变为 $\frac{\partial Z}{\partial x} - 1$ ，即

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1 + \frac{t}{t^*} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

拉伸应变率为

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial x} = \frac{1}{t^*} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x}$$

$1/t^* \gg 1$ ，因此在微扰假设下，射流微元不经历卸载。

(2) 假设射流材料在塑性变形中是不可压缩的，并忽略弹性变形，另外，又假设射流微元的径向速度 V 沿着半径方向的分布是线性的。这样，就能计算射流微元的瞬时半径 $a(x, t)$ ， $\frac{\partial a}{\partial t}$ 以及半径方向的质点速度。我们得到

$$a_0^2 = a^2 \left(1 + \frac{t}{t^*} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right),$$

即

$$a = \frac{a_0}{\left(1 + \frac{t}{t^*} \right)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{1 + \frac{t}{t^*}} \right),$$

$$V = \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial t}.$$

(3) 假设射流材料的拉伸应力 σ 是常数，它不受应变率和加工硬化的影响。由于射流较细，所以忽略 r 方向的正应力。

由图 1.3 可见，射流表面的剪应变 γ_0 为

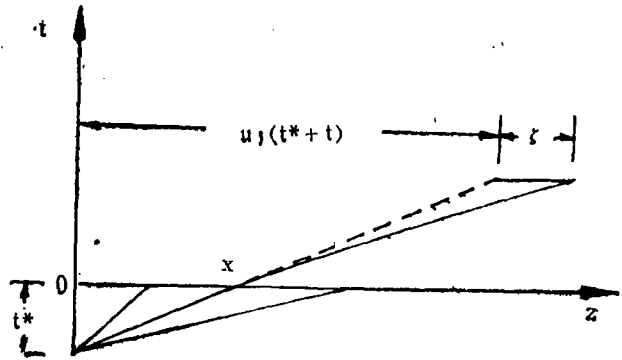


图 1.2

$$\gamma_0 = \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{1 + \frac{t}{t^*}} = -\frac{a_0}{2} \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{5/2}} \circ$$

我们假设剪应变 γ 随 r 的变化规律是线性的, 即 $\gamma = r_0 \frac{r}{a}$ 。这样, 射流截面上的剪应力就可表示为

$$\tau = \sigma r_0 \frac{r}{a} \circ$$

(4) 假设射流材料有足够的延展性, 因而在拉伸前有个颈缩阶段。我们又假设射流材料的密度 ρ_1 和表面张力 T 都是常数。

采用以上假设, 我们就能根据动力学的普遍原理, 建立射流稳定性的基本方程。我们在这里应用哈密顿原理, 它表示为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K_i - V) dt = 0, \quad (1.10)$$

其中 K_i 表示系统的动能, V 表示势能, t_1, t_2 是任然而固定的积分限, δ 表示变分。参与变分的函数是 $\zeta(x, t)$ 。 K_i 中既包括 x 方向速度, 也包括 r 方向速度对动能的贡献。势能 V 包含三部分, 它们是拉伸变形势能, 剪切变形势能与表面张力势能。由 (1.10) 我们得出,

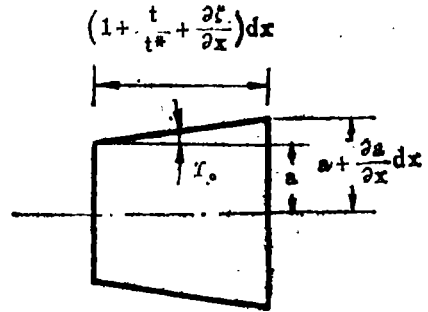


图 1.3

$$\begin{aligned} \pi \rho_1 a_0^2 \left[-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{a_0^2}{8} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{3 a_0^2}{4 t^{*2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^5} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{3 a_0^2}{8 t^*} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} \right] \\ - \pi a_0^2 \sigma \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\pi a_0^2 \sigma}{8} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^5} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \frac{\pi a_0^2 T}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \\ - \frac{\pi a_0^3 T}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{5/2}} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

为了便于分析各种物理量对射流稳定性影响。我们引进以下无量纲自变数

$$\xi = \frac{x}{t^* \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1}}} = \frac{u_i}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1}}}, \quad \tau = \frac{t^* + t}{\left(\frac{\Omega \rho_1}{\sigma}\right)^{1/2}}$$

于是, ζ 的方程变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{8 \tau^3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{3}{8 \tau^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\tau^5} - \frac{1}{\tau^2} - \frac{S}{\tau^{3/2}} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{8 \tau^5} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} \\ + \frac{S}{\tau^{3/2}} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中

$$S = \frac{T}{2\sigma} \left(\frac{\rho_j}{\sigma \Omega^2} \right)^{1/2}$$

T、 σ 、 ρ_j 和 Ω 的典型数据如下:

$$T = 10^8 \text{ dynes/cm}, \quad \sigma = 0.5 \text{ kb} = 5 \times 10^8 \text{ dynes/cm}^2,$$

$$\rho_j = 8.6 \text{ g/cm}^3, \quad \Omega = 70 \text{ (近头部)} \sim 550 \text{ (近尾部)} \text{ mm}^2 \cdot \mu\text{s}$$

因此 s 是个介于 $10^{-6} - 10^{-5}$ 间的很小的量。这就说明了, 与 σ 相比, 表面张力的影响可以忽略不计。于是 (1.12) 式简化为

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{8\tau^3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{\tau^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\tau^5} - \frac{1}{\tau^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{8\tau^6} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = 0 \quad (1.13)$$

我们取下述形式的解

$$\zeta = A(\tau) e^{in\xi},$$

其中 n 是常数。代入 (1.13), 得到

$$\left(1 + \frac{n^2}{8\tau^3} \right) \frac{d^2 A}{d\tau^2} - \frac{3}{8} \frac{n^2}{\tau^4} \frac{dA}{d\tau} - \frac{n^2}{\tau^2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{n^2}{\tau^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{\tau^3} \right) A = 0 \quad (1.14)$$

这里 n 表示波数, $1/n$ 正比于波长。分析我们所做的假设, 可以看到以上所推导的公式只适用于波长较大时的情况。为了使 (1.13) 亦适用于波长较小时的情况, 必须对 (1.14) 作必要的修正。

根据贝塞尔函数的特性, 当 $n \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$1 + \frac{n^2}{8\tau^3} = \frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \quad (1.15)$$

另外, 理论分析表明, 在 $t^* \rightarrow \infty$ 的情况下, 理想流体的解应当包括 I_0 和 I_1 。因此, 我们就根据 (1.15), 将 (1.14) 中的系数按 (1.15) 加以更换。我们有:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n^2}{8\tau^3} &= \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})}}, \\ -\frac{3}{8} \frac{n^2}{\tau^4} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \right], \\ \frac{3}{2} \frac{n^2}{\tau^6} &= \frac{d^2}{d\tau^2} \left[\frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \right]. \end{aligned}$$

于是 (1.14) 变为:

$$\frac{n}{2\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \frac{d^2 A}{d\tau^2} + \frac{dA}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \right] -$$

$$-\left\{ \frac{\frac{n^2}{\tau^2}}{\frac{n}{2\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})}} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left[\frac{1}{2} \frac{n}{\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \right] \right\} A = 0 \quad (1.16)$$

引进新的函数 $B(\tau)$,

$$A(\tau) = f(\tau)B(\tau),$$

其中

$$f(\tau) = \frac{1}{\left[\frac{n}{2\tau^{3/2}} \frac{I_0(n/\tau^{3/2})}{I_1(n/\tau^{3/2})} \right]^{1/2}},$$

则 B 所需满足的方程为:

$$\frac{d^2 B}{d\tau^2} - \frac{4I_1^2(\eta)}{I_0^2(\eta)} \frac{1}{\tau^2} \left\{ \tau^3 - \frac{9}{16} \left[\frac{d}{d\eta} \frac{\eta}{2} \frac{I_0(\eta)}{I_1(\eta)} \right]^2 \right\} B = 0, \quad (1.17)$$

其中 $\eta = n/\tau^{3/2}$ 。

由方程(1.17)不难看出,当 τ 充分小时,式(1.17)花括号中的量取负值,因而 B 随 τ 的变化的是振荡型的,其振幅保持有限;当 τ 充分大时,式(1.17)花括号中的量取正值, B 的一个解随 τ 的增加而指数增长,它反映了射流的不稳定性。

可以用WKB法写出(1.17)的解。

当花括号中的量取正值时,我们有

$$B = \frac{a_1 \text{Exp} \left[\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{P_n(\xi)} d\xi \right] + b_1 \text{Exp} \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{P_n(\xi)} d\xi \right]}{(P_n(\tau))^{1/4}}, \quad (1.18)$$

其中 a_1, b_1 是积分常数

$$\begin{aligned} P_n(\tau) &= \frac{4I_1^2(\eta)}{I_0^2(\eta)} \frac{1}{\tau^2} \left\{ \tau^3 - \frac{9}{16} \left[\frac{d}{d\eta} \frac{\eta}{2} \frac{I_0(\eta)}{I_1(\eta)} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{4I_1^2(\eta)}{I_0^2(\eta)} \frac{1}{\tau^2} \left\{ \tau^3 - \frac{9}{64} \left[2 \frac{I_0(\eta)}{I_1(\eta)} + \eta - \eta \frac{I_0^2(\eta)}{I_1^2(\eta)} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

τ_0 是

$$P_n(\tau) = 0$$

时的根, $\tau > \tau_0$ 。

积分常数 a_1, b_1 应由射流的初始扰动来确定。然而它们是未知的。因而一个合理的假设是认为各种振幅和波长的初始扰动都是同等可能的。需要回答的问题是,1.在给定 n 值的条件下,当 $\tau > \tau_0$ 时,扰动的增长有多快? 2.对于什么 n 值,扰动增长得最快? 这样,就绕过了积分常数的确定问题。核心是讨论(1.18)式中第一项的指数,即

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{P_n(\xi)} d\xi, \quad \tau > \tau_0$$

这个指数大到一定程度,就要出现可以辨认的颈缩。根据上述考虑,我们提出以下判断射流失稳的准则:

(1)对于任意指定的 n 值, τ 到达下述值时,射流失稳

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{P_n(\xi)} d\xi = \alpha \quad (1.19)$$

与出现颈缩和刚刚拉断相对应, α 取不同的数值,是一个经验常数,必须由试验确定。

(2)实际出现的 n 值是这样的,它使满足(1.19)的 τ 为最小,即

$$\frac{d\tau}{dn} = 0 \quad (1.20)$$

注意到(1.19)中的上、下积分限和积分核都是 n 的函数,同时 $P_n(\tau_0) = 0$ 因此(1.20)与下式是等价的。

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial n} \sqrt{P_n(\xi)} d\xi = 0 \quad (1.21)$$

将 $P_n(\tau)$ 的具体表达式代入(1.19)和(1.21),我们就能得出计算 τ 和 n 的公式。

下面,我们利用实验数据,从(1.19)计算 α 。我们将看到,所得的 α 是相当大的,从而说明,对于速度较低的射流微元,应力 σ 是导致射流失稳的主要因素。

由实验结果,可以确定 C' (公式1.9)的数值。若再给定材料常数 σ 和 ρ_i ,就能确定(1.4)中的 C_1 ,在 t^* 很小的情况下, C_1 就是 τ_0 ,由试验可得射流拉断后的段数以及射流头部和尾部的速度,从而得出 n 。将这两个数字代入(1.19),我们得到 $\alpha = 7.81$ 。做为 e 的指数,这显然是个很大的数。

3. 空气动力对射流稳定性的影响

在这一节里,我们讨论空气动力的作用,目的是解释高速段射流的失稳问题。

令 P_s 表示空气作用于射流表面的压力,则哈密尔顿原理应写为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K_i - V) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int P_s 2\pi a \left(1 + \frac{t}{t^*} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \delta a dx dt = 0$$

其中 δa 是 $\delta \zeta$ 所引起的半径的变分。于是得到

$$\begin{aligned} & \pi \rho_i a_0^2 \left[-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + a_0^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{3}{4} \frac{a_0^2}{t^{*2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{3}{8} \frac{a_0^2}{t^*} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} \right] - \\ & - \pi a_0^2 \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^2} - \frac{\pi a_0^4 \sigma}{8} \frac{\partial^4 \zeta}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^3} - \frac{\pi a_0 \Gamma}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}} - \\ & - \frac{\pi a_0^2 \Gamma}{2} \frac{\partial^4 \zeta}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}} - \frac{\pi a_0^2}{1 + \frac{t}{t^*}} \frac{\partial P_s}{\partial x} = 0 \quad (1.22) \end{aligned}$$

式中的 P_s 是未知的。所以严格说, (1.22) 应当和空气动力学方程联合求解。由于 (1.22) 是变系数的, 求解比较困难。为此, 我们先假设 $t^* \rightarrow \infty$, 即射流无速度梯度, 从而求出与这个假设相对应的压力 P_s 。然后我们再修正这个压力, 使之能应用于 t^* 并非无限大的情况。

在 $t^* \rightarrow \infty$ 的情况下, 取

$$\zeta = A(t)e^{-ikx} = \bar{A} e^{i\omega t - ikx}, \quad (1.23)$$

在这里 \bar{A} 、 ω 、 k 都是常数。根据线性超音速流的基本方程, 我们不难得出:

$$P_s = -i \frac{\rho_0 c^2}{2} \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} a_0 k^2 \frac{H_0^{(2)}(a_0 k \sqrt{M^2 - 1})}{H_1^{(2)}(a_0 k \sqrt{M^2 - 1})} \bar{A} e^{i\omega t - ikx}, \quad (1.24)$$

其中 c 是空气的声速, ρ_0 是未扰动空气的密度, $H_0^{(2)}$ 、 $H_1^{(2)}$ 分别是零阶和一阶的第二类汉克尔函数。

$$M^2 = \frac{\left(u_j + \frac{\omega}{k}\right)^2}{c^2}$$

在 t^* 并非无限大的情况下, 射流的半径和欧拉坐标中的波长都是随时间变化的。因此 (1.24) 中的 a_0 和 k 应做以下替换:

$$a_0 \rightarrow \frac{a_0}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{1/2}},$$

$$k \rightarrow \frac{k}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)},$$

$$\bar{A} e^{i\omega t} \rightarrow A(t).$$

因此修正后的 P_s 应为:

$$P_s = -i \frac{\rho_0 c^2}{2} \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{a_0}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{1/2}} \frac{k^2}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^2} \frac{H_0^{(2)}\left[\frac{a_0 k \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}}\right]}{H_1^{(2)}\left[\frac{a_0 k \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}}\right]} A(t) e^{ikx}.$$

同理

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} = - \frac{\rho_0 c^2}{2} \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{a_0 k^3}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{7/2}} \frac{H_0^{(2)}\left[\frac{a_0 k \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}}\right]}{H_1^{(2)}\left[\frac{a_0 k \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{t^*}\right)^{3/2}}\right]} A(t) e^{-ikx}, \quad (1.25)$$

由于 u_j 很大, 因此

$$M = \frac{u_j}{c}$$

将(1.25)代入(1.22), 并注意到 $\zeta = Ae^{-ikx}$, 我们得到,

$$\begin{aligned} & \pi\rho_j a_0^2 \left[1 + \frac{a_0^2 k^2}{8(1+t/t^*)^3} \right] \frac{d^2 A}{dt^2} - \pi\rho_j a_0^2 \frac{3}{8} \frac{a_0^2 k^2}{t^*} \frac{1}{(1+t/t^*)^4} \frac{dA}{dt} + \\ & + \left\{ -\frac{\pi a_0^2 k^2 \sigma}{(1+t/t^*)^2} \left[1 - \frac{a_0^2 k^2}{8(1+t/t^*)^3} \right] + \pi\rho_j a_0^2 \frac{3k^2}{4t^{*2}} \frac{1}{(1+t/t^*)^5} + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_0 c^2}{2} \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}} - \pi \frac{k^3 a_0^3}{(1+t/t^*)^{3/2}} \frac{H_0^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]}{H_1^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]} \right\} A = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

令 $A(t) = f(t)B(t)$,

$$f = \frac{1}{\left[1 + \frac{a_0^2 k^2}{8(1+t/t^*)^3} \right]^{1/2}},$$

则(1.26)变为

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{a_0^2 k^2}{8(1+t/t^*)^3} \right] \frac{d^2 B}{dt^2} + \left\{ \frac{9}{256} \frac{a_0^4 k^4}{(1+t/t^*)^8} \frac{1}{t^{*2}} - \frac{\sigma}{\rho_j} \frac{k^2}{(1+t/t^*)^2} \times \right. \\ & \left. \times \left[1 - \frac{a_0^2 k^2}{8(1+t/t^*)^3} \right] + \frac{\rho_0 c^2}{2\rho_j} \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{a_0 k^3}{(1+t/t^*)^{3/2}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{H_0^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]}{H_1^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]} \right\} B = 0. \end{aligned}$$

可以证明, 当射流的速度很高时, 空气动力的影响大于强度。因此下面讨论 $\sigma = 0$ 的情况。为了使所得方程也适用于短波长的情况, 我们做(1.15)式所规定的那种置换, 从而得到:

$$\frac{a_0 k}{2(1+t/t^*)^{3/2}} \frac{I_0 \left[\frac{a_0 k}{(1+t/t^*)^{3/2}} \right]}{I_1 \left[\frac{a_0 k}{(1+t/t^*)^{3/2}} \right]} \frac{d^2 B}{dt^2} + \left\{ \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{a_0 k}{2(1+t/t^*)^{3/2}} I_0 \left[\frac{a_0 k}{(1+t/t^*)^{3/2}} \right] \right) \right)^2}{\frac{a_0 k}{2(1+t/t^*)^{3/2}} I_0 \left[\frac{a_0 k}{(1+t/t^*)^{3/2}} \right]} + \right.$$

$$+ \frac{\rho_0 c^2}{2\rho_i} \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{a_0 k^3}{(1+t/t^*)^{3/2}} \frac{H_0^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]}{H_1^{(2)} \left[a_0 k \sqrt{M^2-1} / (1+t/t^*)^{3/2} \right]} \Big\} B = 0$$

这个方程的积分显然是十分繁杂的。不过由试验中射流被拉断的数目可以看出 $a_0 K$ 是个很大的数，而且高速段出现颈缩的时间很早。因此可以认为 $a_0 k / (1+t/t^*)^{3/2}$ 是个相当大的数。根据贝塞尔函数渐近展开的理论，做为零阶近似，我们有

$$\frac{I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 1.0 \quad ,$$

$$\frac{H_0^{(2)}(\xi)}{H_1^{(2)}(\xi)} = -i \quad , \quad \xi \rightarrow \infty \quad .$$

同时，由于 M 很大，可以将 $M^2/\sqrt{M^2-1}$ 写做 M 。于是 B 的微分方程简化为

$$t^{*2} \frac{d^2 B}{dt^2} - i \frac{\rho_0 c^2 t^{*2}}{\rho_i a_0^2} \frac{a_0^2 k^2}{(1+t/t^*)^{3/2}} M B = 0 \quad (1.27)$$

这个方程的通解是可以写出来的，不过在这里并无必要。和前面一样，我们用WKB方法讨论(1.27)的解，并应用相同的判断准则得出出现颈缩或拉断的时间和位置。虚数的平方根是 $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ，从(1.18)不难看出，分子中的指数项既有随时间振荡的部分，又有随时间指数增长的部分，两部分的特征时间是相同的。这一点和前面所讨论的只考虑强度而忽略空气动力的情况不同。在那里，当 $\tau > \tau_0$ ，射流微元的直径变化随时间是没有振荡的。

把失稳的判断准则(1.19)应用于(1.27)并只取实数部分，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{t/t^*} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_i} \frac{ct^*}{a_0}} M^{1/2} m \frac{1}{(1+t/t^*)^{3/2}} dt = \alpha \quad ,$$

其中 $m = ka_0$ 。再经简单的运算，得出

$$t + t^* = \frac{t^*}{\left[1 - \frac{\alpha}{m} \sqrt{\frac{\rho_i}{2\rho_0} \frac{a_0}{ct^*} \frac{1}{M^{1/2}}} \right]^2} \quad (1.28)$$

这就是出现颈缩或拉断的时间与射流参数间的关系，相应的位置是

$$Z = \frac{u_j t^*}{\left[1 - \frac{\alpha}{m} \sqrt{\frac{\rho_i}{2\rho_0} \frac{a_0}{ct^*} \frac{1}{M^{1/2}}} \right]^2} + b \quad (1.29)$$

式中 α/m 可以做为一个常数来看待，其数值需由试验确定。以上二式又可写为

$$t + t^* = \frac{t^*}{\left(1 - \beta \frac{\Omega^{1/2}}{u_j^{1/2}} \right)^2} \quad ,$$

$$Z = u_1(t + t^*) + b$$

$$\text{其中 } \beta = \frac{\alpha}{m} \sqrt{\frac{\rho_1}{2\rho_0}} \frac{1}{c^{1/2} t^{*2}} .$$

从图1.1可见, 选择适当的 β (及 t^*) 可以使计算结果与试验结果在高速段相符。

4. 小结

以上分析表明, 这里所建立的包含惯性、强度和空气动力影响的射流稳定性方程和失稳的判断准则与实验结果基本上相符。失稳准则中的常数需由试验确定。

射流高速段的失稳主要是由于空气动力, 低速段的失稳则主要是由于强度。

在实际问题中, 低速段的失稳比高速段重要。这是因为, 在有靶板的条件下, 高速段在失稳前就已经着靶了。因此1.1节中所给出的半经验公式具有直接的实用意义。

由以上公式可见, 增加射流稳定性, 从而提高破甲弹穿深能力的措施是增加 ρ_1 和 Ω , 减小 σ , 同时要求加工后的药形罩材料有充分的塑性储备。过度的冷加工将使 ψ 减少, 塑性储备减少, 从而导致射流过早地被拉断。

除以上条件外, 对药形罩材料还有一个更重要的因素, 即材料的声速。为了能够形成稳定的射流, 有一个必要的条件, 那就是 (参看图1.4), 相对于碰撞点0的药形罩压垮速度 V 必需小于药形罩材料的声速 c_i 。在这方面我们可以用铅做为一个例子。铅的强度低, 密度大, 断面收缩率也大, 但却不能做为药形罩材料来使用。原因就在于铅中的声速太小, 只有 $1.96 \text{ mm}/\mu\text{s}$, 远比紫铜中的声速 $4.76 - 5.00 \text{ mm}/\mu\text{s}$ 要小, 因而铅制药形罩不能形成可靠的射流。

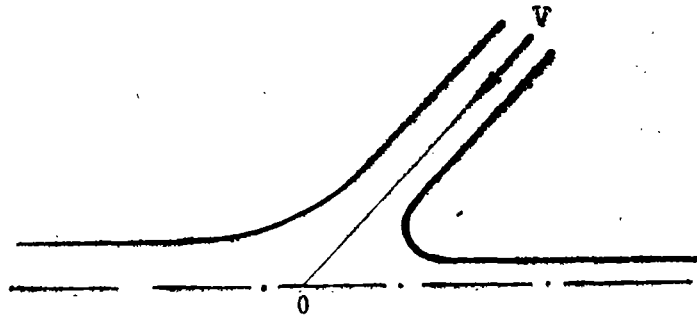


图 1.4

概括起来, 就药形罩材料而言, 先决条件是具有足够高的声速 (相对于压垮速度), 然后要求有充分的延展性, 高密度和低的强度。

STABILITY OF JET PRODUCED BY SHAPED CHARGE

Zheng Zhe-ming

Paper presents results of a theoretical investigation on the necking and breaking up of a free metal jet in air produced by shaped charge. It is shown that for the slower portion of the jet, instability develops as a consequence of plastic deformation just as in the case of a tension specimen in material testing, except that in the former case, one has to take into account of inertia effect. On the other hand, the high speed portion (greater than 5 km/s in the present case) of the jet loses stability by virtue of aerodynamic effect. In both cases, formulas are developed from basic principles to account for the instability. Satisfactory agreement with experimental findings is shown.

* Part of a Research Report (Jan. 1977) of the Institute of Mechanics, Academia Sinica.