DOI:10.16483/j.issn.1005-9865.1994.01.010

第12卷 第1期 海 洋 工 程 Vol.12, No.1
1994年2月 THE OCEAN ENGINEERING February, 1994

随机载荷下的疲劳损伤计算公式

伍义生
（中国科学院力学研究所，北京 100080）

摘 要 本文推导了随机载荷下的疲劳损伤计算公式。数值计算结果表明：P. H. Wirsching给出的公式在宽带情况下与实际情况不符；G. Chaudhury给出的公式在窄带情况下与实际不符；本文给出的公式不仅适合于窄带，也适合于具有各种不同带宽的宽带随机载荷。

关键词 随机 载荷 疲劳 损伤 计算公式 宽带

1 前言

实践经验表明，疲劳破坏是海洋平台钢结构的一个重要问题。近年来海洋结构疲劳寿命估算方法已从简单的确定性分析方法发展为疲劳谱分析方法。Miles[1] 1954 年曾给出随机载荷下的疲劳损伤计算公式，他假定的是窄带随机载荷，应力峰值符合Rayleigh分布。但这种假定通常过高地估计了疲劳损伤，低估了疲劳寿命。P.H.Wirsching[2] 1980年研究了宽带随机应力下的疲劳。给出海洋结构在波浪作用下的宽带随机响应应力谱，并给出了修正窄带的计算公式。他用的方法是根据给定的应力谱产生伪随机时间历程，再用雨流计数法和Miner公式计算疲劳损伤，与窄带计算结果比较得出修正系数。这种方法耗费大量计算时间。G.Chaudhury[3] 1986年根据宽带应力谱应力峰值的分布，给出一个宽带随机应力谱的疲劳损伤计算公式。本文认为G.Chaudhury给出的计算公式不尽合理，因此对宽带随机应力谱的疲劳损伤计算公式进行了推导。并用数值积分的方法对P.H.Wirsching、G.Chaudhury和本文给出的结果进行比较。

2 计算公式

2.1 Miles的窄带疲劳损伤计算公式

对于稳态高斯随机过程已证明其应力峰值符合Rayleigh分布[4]：

$$P(s)=\frac{S}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

式中$P(S)$是应力峰值S的概率密度，σ是随机过程的均方根应力。

疲劳累积损伤用Miner公式[5]进行估算：

$$D=\sum\frac{n_i}{N_i} \tag{2}$$

式中D为累积损伤，n_i是在某一应力水平下的循环次数，N_i是在该应力水平下循环至破坏的次数。在应力峰值连续分布的情况下，（2）式以下列积分式代替：

$$D=n\int_0^{\infty}\frac{P(S)\mathrm{d}s}{N} \tag{3}$$

将（1）式代入（3）式，Miles[1]得到疲劳损伤的计算公式如下：

$$D=\frac{n}{K}(\sqrt{2}\,\sigma)^m\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) \tag{4}$$

式中n是与该应力谱相应的总循环次数，σ是应力谱的均方根应力，k和m为S-N曲线参数（$N=kS^{m}$），注意此处的S为应力幅值，即变程的一半，Γ（ ）为Γ函数。

2.2 P.H.Wirsching的宽带应力谱及疲劳损伤计算公式

P.H.Wirsching[2]给出海洋平台结构在波浪载荷作用下的宽带随机响应应力谱为

$$S(f)=AH_s^{\phi}\frac{\exp\left[-\dfrac{1050}{(2\pi T_d f)^4}\right]}{T_d^4(2\pi f)^5\left\{[1-(f/f_n)^2]^2+\left(2\zeta\dfrac{f}{f_n}\right)^2\right\}} \tag{5}$$

式中 A——标尺系数；H_s——有效波高（m）；

f_n——结构固有频率（Hz）；f——频率（Hz）

T_d——波浪主周期（s）；ζ——阻尼系数；

ϕ——反映应力随波高变化的一个指数。

P.H.Wirsching给出的修正损伤计算公式为

$$D_{BB}=\lambda D_{NB} \tag{6}$$

式中 D_{BB}是宽带应力谱的损伤，D_{NB}是相应的具有同样均方根应力的窄带应力谱的损伤。修正系数λ与应力谱的带宽ε及S-N曲线的斜率m有关：

$$\lambda=a+(1-a)(1-\varepsilon)^b$$

其中

$$a=0.926-0.033m \tag{7}$$

$$b=1.587m-2.323$$

2.3 G.Chaudhury的宽带应力谱损伤计算公式

文献〔6〕给出宽带应力谱峰值应力概率分布的一般表达式：

$$P(s)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2\varepsilon^2}\right)$$
$$+\frac{S}{2\sigma^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\times\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\exp\left(-\frac{S}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$

式中erf（ ）为误差函数。

对于窄带随机载荷，

$$\varepsilon=0,\ P(S)=\frac{S}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Rayleigh分布} \tag{9}$$

对于带宽为1的白噪声随机载荷,

$$\varepsilon=1,\ P(S)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Gaussion分布} \tag{10}$$

G.Chaudhury根据(8)式,给出疲劳损伤计算公式如下:

$$D=\frac{n}{K}(\sqrt{2}\,\sigma)^m\left[\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)+0.75\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right] \tag{11}$$

相应于公式(6),修正系数λ为

$$\lambda=\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}+0.75\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{12}$$

2.4 本文给出的计算公式

在公式(11)中的0.75是一个固定的数值,本文通过仔细地分析,发现这个值不应是一个固定的数值,而是一个与应力谱的带宽和S-N曲线的斜率m有关的数值,其变化范围在0.5到1.0之间。因此本文给出的疲劳损伤计算公式如下:

$$D=\frac{n}{K}(\sqrt{2}\,\sigma)^m\left[\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)+\frac{1+\beta}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right] \tag{13}$$

$$\lambda=\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}+\frac{1+\beta}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{14}$$

$$\beta\approx\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\times\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) \tag{15}$$

β值的变化范围从0到1,如取$\beta=0.5$,则(13)式与(11)式相同。公式(13)的推导详见附录。

2.5 数值计算

将公式(8)代入公式(3)可得出宽带应力谱疲劳损伤计算的积分表达式如下:

$$D=\frac{n}{K}\int_0^{\infty}S^m\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2\varepsilon^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{S}{2\sigma^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\times\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\right\}ds \tag{16}$$

公式（16）可用数值积分求解。

表1至表3、图1至图3给出9种不同带宽的应力谱按Wirsching、Chaudhury、本文和数值积分得出的修正系数。

表1　用不同方法得到的修正系数的比较（$m=3$）

带宽	修正系数			
	Wirsching	Chaudhury	本文	数值积分
0.000	1.000	0.750	1.000	1.000
0.202	0.927	0.735	0.979	0.971
0.345	0.889	0.705	0.940	0.928
0.504	0.858	0.655	0.866	0.855
0.639	0.841	0.600	0.765	0.768
0.737	0.834	0.553	0.665	0.631
0.803	0.830	0.518	0.588	0.609
0.848	0.829	0.491	0.531	0.565
0.873	0.823	0.470	0.491	0.522
0.899	0.828	0.453	0.461	0.493
1.000	0.827	0.212	0.212	0.212

表2　不同方法得到的修正系数的比较（$m=4$）

带宽	修正系数			
	Wirsching	Chaudhury	本文	数值积分
0.000	1.000	0.750	1.000	1.000
0.202	0.877	0.735	0.979	0.970
0.345	0.832	0.704	0.939	0.926
0.504	0.806	0.651	0.865	0.852
0.639	0.797	0.590	0.761	0.762
0.737	0.795	0.537	0.663	0.674
0.803	0.794	0.497	0.581	0.602
0.843	0.794	0.467	0.520	0.545
0.878	0.794	0.445	0.477	0.503
0.899	0.794	0.427	0.445	0.470
1.000	0.794	0.138	0.183	0.188

表3 不同方法得到的修正系数的比较（$m=5$）

带宽	修正系数			
	Wirsching	chaudhury	本文	数值积分
0.000	1.000	0.750	1.000	1.000
0.202	0.828	0.735	0.979	0.956
0.345	0.783	0.704	0.939	0.916
0.504	0.766	0.649	0.864	0.843
0.639	0.762	0.584	0.765	0.752
0.737	0.761	0.527	0.663	0.664
0.803	0.761	0.484	0.579	0.590
0.848	0.761	0.451	0.515	0.533
0.878	0.761	0.427	0.469	0.490
0.899	0.761	0.409	0.435	0.465
1.000	0.761	0.170	0.170	0.170

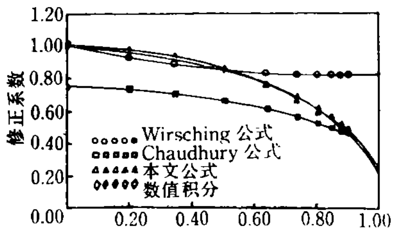

图1 用不同方法得到的修正系数的比较（$m=3$）

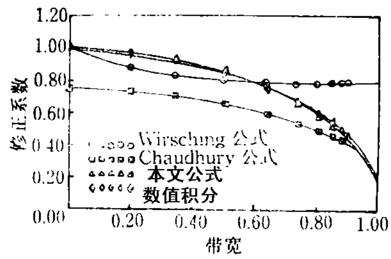

图2 用不同方法得到的修正系统的比较（$m=4$）

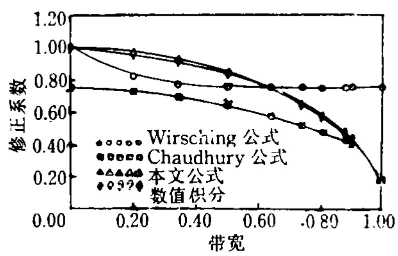

图3 用不同方法得到的修正系数的比较（$m=5$）

从表和图中可以看出，在窄带情况下本文与Wirsching计算结果一致。在宽带白噪音情况下本文与Chaudhury计算结果一致。实际上在窄带情况下修正系数应等于1，而Chaudhury 公式给出 0.75，因此在窄带情况下Chaudhury 的公式与实际不符。在宽带白噪音情况下，理论推导得出：

$$\lambda_{\varepsilon=1}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \qquad (17)$$

本文和Chaudhury的公式与此相符，而Wirsching的公式与此相差甚远，与实际不符。从表和图可以看出Wirsching给出的结果在带宽小于0.5时与数值积分结果相差不大，但在带宽大于0.5以后与数值积分结果相差很大。Chaudhury给出的结果在窄带情况下与数值积分相差很大，仅在带宽大于0.8以后才与数值积分接近。而本文给出的公式在整个带宽范围内与数值积分结果一致，误差在4%之内。

3　实际海况下的计算比较

作为一个例子，本文用不同的公式计算了北海海况下某一结构热点的疲劳损伤。北海1种海况下各参数值见表4。表中H_S为各海况的有效波高、T_z为各海况的主周期、α为各海况在全年所占的时间比、f_0为穿零频率、f_s为峰值频率、ε为带宽。

表4　北海11种海况下的各参数值

H_s (m)	T_z (s)	α	f_0 (Hz)	f_s (Hz)	ε
16.0	17.3	0.0000368	0.098	0.209	0.884
14.5	16.5	0.0000932	0.104	0.213	0.873
13.0	15.8	0.00037	0.110	0.216	0.862
11.4	14.7	0.0022	0.120	0.222	0.841
9.9	13.6	0.0073	0.132	0.228	0.816
8.4	12.7	0.0135	0.143	0.233	0.789
6.9	11.6	0.0265	0.159	0.240	0.719
5.3	10.3	0.06	0.179	0.247	0.689
3.8	9.1	0.21	0.199	0.254	0.620
2.3	7.7	0.49	0.224	0.261	0.516
0.8	4.4	0.19	0.268	0.277	0.257

表5　用不同公式得出的疲劳损伤计算结果

H_s (m)	σ (MPa)	n_i (周次)	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
16.0	48.25	113	0.000497	0.000388	0.000215	0.000273	0.000243
14.5	42.12	305	0.000738	0.000577	0.000326	0.000416	0.000373
13.0	36.19	1280	0.001595	0.001246	0.000717	0.000919	0.000831
11.4	30.43	8337	0.004857	0.003796	0.002259	0.002915	0.002669
9.9	25.38	30436	0.008014	0.006264	0.003872	0.005031	0.004672

续表

H_s (m)	σ (MPa)	n_i (周次)	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
8.4	20.48	61041	0.006278	0.004907	0.003141	0.004105	0.003357
6.9	16.03	132563	0.004664	0.003646	0.002449	0.003221	0.003068
5.3	11.71	338556	0.003008	0.002353	0.001685	0.002229	0.002153
3.8	7.88	1317786	0.002071	0.001624	0.001237	0.001643	0.001601
2.3	4.43	3454893	0.000435	0.000343	0.000281	0.000374	0.000366
0.8	1.76	1604991	0.000004	0.000003	0.000003	0.000003	0.000003
损伤总和			0.032160	0.025147	0.16184	0.21131	0.019834

表5给出不同公式得出的计算结果。

表中 D_1为用Miles公式计算的损伤； D_2为用Wirsching公式计算的损伤；
D_3为用Chaudhury公式计算的损伤； D_4为用本文公式计算的损伤；
D_5为用数值积分计算的损伤。

表中的σ是计算得出的该结构热点在各海况下的均方根应力。从表5可以看出用Miles公式计算的损伤过于严重。用本文公式计算的结果在Wirsching和Chaudhury公式计算结果之间，与数值积分结果最接近。

4 结语

1. Wirsching的宽带应力谱疲劳损伤计算公式，在带宽超过0.5以后与实际不符。Chaudhury的计算公式在窄带情况下与实际不符。本文给出的公式不仅适用于窄带应力谱，也适用于具有任意带宽的宽带应力谱。

2. 北海11种海况下的算例计算表明，用Miles的窄带公式计算实际海况下的损伤过于严重。本文公式的计算结果位于Wirsching公式和Chaudhury公式计算结果之间，与数值积分计算结果最接近。

参考文献

1 Miles, J.W., "On Structural Fatigue Under Random Loading," Journal Aeronautical Sci 21 (1954), PP.753—762.

2 Wirsching, P.H.et al, "Fatigue Under Wide Band Random Stress," Journal of the structural Division (1980), PP.1593—1606.

3 Chaudhury, G., "Spectral Fatigue of Broad-Band stress Spectrum with One or More Peaks," OTC5333 (1986), PP.387—396.

4　Newland D E. "An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis," Longoman, 1975.

5　Miner, M.A. "Cumulative Damage in Fatigue," J.Appl. Mech.12 (1945), A—159.

6　Lin, Y.K., "Probabilistic Theory of Structural Dynamics," McGraw-Hill, 1967, P.303.

附　录

根据公式（3），在应力峰值连续分布情况下疲劳损伤可按以下公式计算：

$$D=\frac{n}{K}\int_0^\infty S^m P(S)\mathrm{d}S \tag{18}$$

式中S为应力峰值，$P(S)$为应力峰值的概率密度函数，K和m为S-N曲线参数，n为总循环次数。将宽带应力谱应力峰值分布的表达式（8）代入（18）式得出：

$$D=\frac{n}{K}\int_0^\infty S^m\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}S$$

$$+\frac{n}{K}\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{2\sigma^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\cdot\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S \tag{19}$$

利用Γ函数，$\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$，并引进$t=\frac{S^2}{2\sigma^2\varepsilon^2}$，可以积出（19）式中的第一部分积分，

$$\int_0^\infty S^m\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}S=(\sqrt{2}\,\sigma)^m\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \tag{20}$$

对于公式（19）中第二部分的积分，利用以下积分公式：

$$\int_0^\infty g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=g(x_w)\int_0^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$

（21）式仅在$g(x)$为线性函数时才成立，式中x_w是$\int_0^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x$的重心坐标。在（19）式中$\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]$在0至$\infty$的范围内不是线性函数。但因为函数$S^{m+1}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)$在$S>3\sigma$以后衰减很快，近似为零。数值计算表明在0至$3\sigma$的范围内，$\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]$可近似作为线性函数处理。因此（19）式中的第二部份积分可近似表达如下：

$$\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{2\sigma^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$\approx\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S_w}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S \tag{22}$$

式中S_w是$\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S$的重心，可用以下公式计算：

$$S_w=\frac{\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S}{\int_0^\infty\frac{S^m}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S}=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \tag{23}$$

令

$$\beta=\mathrm{erf}\left(\frac{S_w}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) \tag{24}$$

得出（19）式的第二部分积分为

$$\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{2\sigma^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S$$

$$\approx\frac{1+\beta}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\int_0^\infty\frac{S^{m+1}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}S$$

$$\approx\frac{1+\beta}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\sqrt{2}\sigma)^m\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) \tag{25}$$

将（20）式和（25）式代入（19）式得出本文的宽带应力谱疲劳损伤计算公式如下：

$$\mathrm{D}=\frac{n}{K}(\sqrt{2}\,\sigma)^m\left[\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)+\frac{1+\beta}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right] \tag{26}$$

式中

$$\beta\approx\mathrm{erf}\left(\frac{S_w}{\sqrt{2}\,\sigma}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)$$

$$S_w=\sqrt{2}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

A FORMULA FOR FATIGUE DAMAGE CALCULATION UNDER RANDOM LOADING

Wu Yisheng
(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper, a formula for fatiogue damage calculation under random Loading is presented. It is shown that, in the case of broad band random Loading, the results given by wirsching's formula is not in agree ment whit that given by numerical calculation; in the case of narrow band random Loading, the results given by Chaudhury' s formula is not in agreement with that given by numerical calculation. However, the formual presented in this paper can be applicable in both broad and narrow band random loading.

Key words random, load, fatigue, damage Computatiomal formula, wide band