学

通

耦合映射中的时空图案

何国威 李家春

(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京 100080)

关键词 耦合映射、图案、时空混沌

低维动力系统的混沌只涉及时间复杂性,难以讨论空间图案,而连续介质力学模型都具有 时空结构. 耦合映射(CML)四作为模拟时空图案的简洁模型,已经受到广泛的重视,因为由 此发展起来的时空混沌理论有可能用于解释湍流的机理,

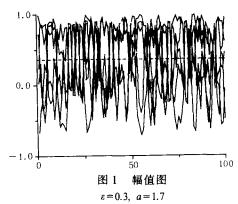
CML 是一维格点链上的高维动力系统,它包含扩散和非线性这两种物理机制:

$$\begin{cases}
 u_{n+1}^{k} = (1-\varepsilon)f(u_{n}^{k}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[f(u_{n}^{k+1}) + f(u_{n}^{k-1}) \right], \\
 u_{n}^{0} = u_{n}^{N}, \ u_{n}^{1} = u_{n}^{N+1}.
\end{cases}$$
(1)

这里 $n=1, 2, \cdots$ 是离散时间, $k=1, 2, \cdots, N$ 是空间格点位置, ε 是扩散参数, 而非线性函数 $f(x) = 1 - ax^2$, $a \in [0, 2]$, 就是 Logistic 映射.

数值模拟表明(1)式具有丰富的时空图案[2]. 显示这些时空图案的方法之一就是幅值图, 其中横轴是格点 k 的位置, 纵轴是状态值 uk. 每次迭代得 k-uk, 平面上一条折线, 多次迭代的

结果反映了 CML 图案的几何构形. 从幅值图发 现,单个格点的时间演化可以是平衡点、周期或 拟周期、混沌解,而 CML 的图案是由大小不同的 kink 和 domain 组成.这里的 domain 表示平行于 横轴的线段,而 kink 表示不平行于横轴的线段. 更详细的, kink 是从左至右向上连接的线段, 而 antikink是从左至右向下连接的线段(参见图 1). 显然, CML 的图案由不同尺度的 kink 和 domain 构成,本文将分别讨论它们的动力学行为,并用 kink-antikink 说明 CML 图案的几何特征.



1 domain 的倍周期分叉到混沌

如果 CML 的图案是空间均匀的,即 $u_n^l = u_n$, 它就是一个 domain. 这时(1)式简化为 $u_{n+1}^l = u_n$ $f(u_{x}^{k}) = f(u_{x})$, 就是 Logistic 映射. 因此, 当 CML 保持 domain 时, 各格点以相同的方式演化, 并随 a 增大按倍周期分叉通往混沌. 为严格证明这点,现分析如下:

¹⁹⁹³⁻¹⁰⁻¹⁶ 收稿, 1994-02-16 收修改稿.

引入小扰动 $x_n^k = u_n^k - u_n$, 它满足下述线性化方程:

$$\begin{cases}
x_{n+1}^{k} + \left[(1 - \varepsilon) x_{n}^{k} + \frac{\varepsilon}{2} \left(x_{n}^{k+1} + x_{n}^{k-1} \right) \right] f(u_{n}), \\
x_{n}^{0} = x_{n}^{N}, x_{n}^{1} = x_{n}^{N+1},
\end{cases} \tag{2}$$

记

$$X_{n} = \begin{bmatrix} x_{n}^{1} \\ \vdots \\ x_{n}^{N} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon/2 & 0 \cdots 0 & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & 1 - \varepsilon & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & 0 \cdots & 0 & \varepsilon/2 & 1 - \varepsilon \end{bmatrix},$$

(2) 式可以写成

$$X_{n+1} = f'(x_n) T X_n = \prod_{j=1}^n [f'(u_j)] T^n X_0.$$
 (3)

为求 T的特征值,把它化为差分方程:

$$\begin{cases}
TV = \lambda V, \\
\{v_0 = v_N, v_1 = v_{N+1},
\end{cases}$$

其中 $V = [v_0, v_1, \dots, v_N]^t$, 那么

$$\begin{cases} (1-\varepsilon-\lambda)v_{j} + \frac{\varepsilon}{2} (v_{j+1} + v_{j-1}) = 0, \\ v_{0} = v_{N}, v_{1} = v_{N+1}. \end{cases}$$

按照解差分方程的方法,取 $v_i = \rho^i$ 代入上式

$$\frac{\varepsilon}{2} \rho^2 + (1 - \varepsilon - \lambda) p + \frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

再令 $1-\varepsilon-\lambda=-\varepsilon\cos\theta$, 就得 $p_{\pm}=e^{\pm i\theta}$, 从而 $u_{j}=c_{i}\cos(j\theta)+c_{z}\sin(j\theta)$. 应用边界条件确定非平凡解,可以得到 $\theta_{K}=2k\pi/N$, $(k=1,2,\cdots N)$, 那么 T 的特征值就是

$$\lambda_k(T) = 1 - \varepsilon (1 - \cos \theta_k) = 1 - 2\varepsilon \sin^2 \left(\frac{K\pi}{N}\right).$$

据此求出扰动方程(3)的系数矩阵的特征值:

$$\left(1-2\varepsilon\sin^2\frac{K\pi}{N}\right)^n\cdot\prod_{j=1}^n[f'(u_j)],\tag{4}$$

那么 Liapunov 指数(以下简称 L 指数)就是

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lg \left| \left(1 - 2\varepsilon \sin^2 \frac{K\pi}{N} \right)^n \prod_{j=1}^n f'(u_j) \right|$$

$$= \lg \left(1 - 2\varepsilon \sin^2 \frac{K\pi}{N} \right) + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lg \left| \prod_{j=1}^n f'(u_j) \right|,$$

显然,上式的第二项就是 Logistic 映射的 L 指数. 扩散系数 ϵ 能够减小 $k=1, 2, \cdots, N-1$ 对应的 L 指数,但不能改变最大 L 指数 (k=N),即 CML 的最大 L 指数与 Logistic 映射完全相同. 因此,CML 的 domain 将按周期倍化分叉至混沌.

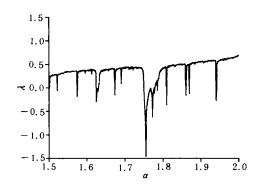
图 2 给出了 ε =0.1 时 CML 的 domain 对应的最大 L 指数图, 它和 Logistic 映射完全一

样,从而验证了上述结果.

2 kink-antikink 的拟周期分叉至混沌

如果 CML 图案由完全相同的 kink-antikink 组成,即 $u_n^{2k}=x_n$, $u_n^{2k+1}=y_n$, $k=1,2,\cdots,N$, N=2m (总格点数为偶),它就是一种锯齿波.这时格点链上的奇数点和偶数点分别以相同的规律演化,那么(1)式就可以简化为[3]

$$\begin{cases} y_{n+1} = (1-\varepsilon)f(y_n) + \varepsilon f(x_n), \\ x_{n+1} = (1-\varepsilon)f(x_n) + \varepsilon f(y_n). \end{cases}$$
 (5)



1.0 0.6 0.2 -0.2 -0.6 -1.0 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0

图 2 domain 的 L 指数图

图 3 kink-antikink 的 L指数图

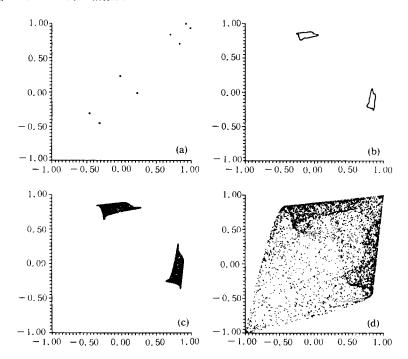


图 4 相图 N=2, (a) a=1.5, (b) a=1.8, (c) a=1.9, (d) a=2.0

根据 (5) 式,就可以按 Resband^[4] 的方法计算保持 kink-antikink 的 CML 在周期扰动下的最大 L 指数. 图 3 给出了 ε =0.1 时的最大 L 指数图.显然指数不是直接由负变正的,而是在 1.7—1.8 附近经历指数为 0 的很长一段平台后才变正的.注意到最大 L 指数从小于零到等于零的平台直至正数,代表着周期或拟周期分叉至混沌^[5],因此我们猜测:保持kink-antikink的 CML 图案,在周期扰动下按拟周期分叉通向混沌.这个猜测可以从 CML (5)式的吸引子变化得到进一步的验证.从图 4 发现,吸引子从周期点,到对称的圆圈形闭轨,这代表一种拟周期解,直至混沌.

3 用 kink-antikink 描述 CML 的图案特征

CML 的时空图案由不同尺度的 kink-antikink 和 domain 构成,这里只讨论最大尺度者,现定义如下:

设 x^* 是 Logistic 映射的不动点,即 $x^* = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2a}$. 如果相邻格点 (k, k+1) 上的值满 是: $u_n^k - x^* < 0$, $u_n^{k+1} - x^* > 0$, 就称 k 和 k+1 上的连线是一个 kink; 反之 $u_n^k - x^* > 0$ 、 $u_n^{k+1} - x^* < 0$, 就称为 antikink; 而一串格点 $(k, \cdots, k+p)$ 使得 $u_n^{k+j} - x^* \ge 0$ $(j=0, 1, \cdots, p)$ 或 $u_n^{k+j} - x^* \le 0$ $(j=0, 1, \cdots, p)$ 就称它们构成一个 domain. 显然,kink-antikink 构成 domain 的边界,有时也称之为 domain wall.

从最大尺度看, CML 的图案只包含 kink-antikink 和 domain, 而 domain 完全由 kink-antikink 的位置和数目确定. 因此, CML 的图案完全由 kink-antikink 确定. 这样, 对 CML 图案的研究就转化为 kink-antikink 的研究. 事实上, CML 通往时空混沌道路上的各种图案都可以由 kink-antikink 刻画:

- (1)图案冻结: kink-antikink 的数目和位置不变,它们完全依赖于初值.
- (2)图案选择: kink-antikink 的数目的位置不变,它们不依赖于初值只依赖于系统的参数.
- (3)图案竞争间歇: kink-antikink 的数目不变,但位置做混沌游动.
- (4) 时空混沌: kink-antikink 的数目和位置都做混沌演化.

4 结 论

一维格点链 CML 的时空图案是由不同尺度的 kink-antikink 和 domain 组成,这些 kink 具有与 domain 不同的动力学特性,它们按不同的道路通往混沌. 从 kink-antikink 出发,可以描述通往时空混沌道路上的各种图案,阐述时空混沌的机理⁶⁰.

参考文献

- [1] Crutchfield, J. P., Kaneko, K., in Direction in Chaos (ed. Han Bai-lin), World Scientific, Singapore, 1987, 272-353.
- [2] Kaneko, K., Physica., D, 1989, 34:1-41.
- [3] Amritkar, R. E., Gade, P. M. et al., Phys. Rev., A, 1991, 44(6): 3407-3410.
- [4] Resband, R. S., Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems, A, Wiley Intersciences Publication, 1990, 187-195.
- [5] Hao Bai-lin, Elementary Symbolic Dynamics, World Scientific, Singapore, 1989, 383-385.
- [6] Crutchfield, J. P., Kaneko, K., Phys. Rev. Lett., 1988, 60(26): 2715-2718.