维普资讯 http://www.cqvip.com

第24卷 第3期 力学进展 Vol. 24 No. 3
1994年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1994

374-385

地质材料本构模型的最近进展*

章根德
中国科学院力学研究所，北京（邮政编码100080）

TB301

提要 本文回顾了地质材料本构模型最近20年来的发展．对几类地质材料的本构模型，如各向同性硬化模型、多重屈服面模型、边界面模型作了简要的评述．

关键词 地质材料；本构模型；土塑性力学 材料力学

1 引言

解决大型的、复杂的土-结构相互作用问题，如水坝、核电站、海洋工程结构受到地震、爆炸冲击、应力波作用的问题，都需要先进的计算模型．例如典型的海洋平台，自重就达10^5吨，受到猛烈风暴时，水平波浪力可达10^5吨，而引起的倾覆力矩可达10^6吨米．在这样的载荷条件下，如再借助于常规的经验公式来设计将会出现许多不可估量的问题．于是，常常要采用先进的数值计算方法，如有限元方法等，来代替常规的承载力公式进行设计．而这些数值方法中，关键就是对地质材料本构响应的近似模拟．这就导致了人们对地质材料本构模型研究的极大关注，使最近20年来地质材料本构模型的研究取得了较大的进展．

地质材料这种复杂的非线性、非弹性特性是很难模拟的．特别是当载荷包括了多维应力轨迹、反向加载、循环荷载、主应力轴旋转时，更是如此．当我们模拟地质材料时，必须考虑到多种因素的影响，例如材料的初始各向异性，应力引起的各向异性，应变主轴的旋转，孔隙流体的影响、剪胀现象、磁滞现象等等．为了描述地质材料如此多种的复杂特性，出现了多种形态弹塑性本构模型，如多重屈服面模型、边界面模型等．

2 地质材料的本构特征

塑性力学提供了地质材料本构模拟的理论基础．但塑性力学起源于金属材料的本构模拟．所以，根据弹塑性理论来建立地质材料的本构模型，必须根据地质材料的基本特性来修正和扩展塑性力学理论中的某些基本概念．

地质材料的下列特性，在本构模拟过程中是必须特别注意的．

①土与岩石一般情况下是两相介质．所加的总应力是由固相（骨架）和流体相（孔隙流体）所共同承担的．所以，固体相应力-应变关系的模拟要采用有效应力的公式．

* 国家自然科学基金资助项目．

维普资讯 http://www.cqvip.com

②地质材料是摩擦型材料，它的性状依赖于平均正有效应力。

③地质材料的性状与应力轨迹有关。例如在拉伸与压缩时，材料的本构响应是不同的。

④地质材料在纯剪应力作用下会产生塑性体积应变，即所谓剪胀现象。例如松砂和正常固结的粘土受剪切作用时体积会收缩，而密砂和超固结粘土受剪切作用时体积会膨胀。

⑤由于微观结构和沉积环境的影响，原始的岩土介质一般是各向异性的。

⑥地质材料在变形过程中会出现相当可观的由应力引起的各向异性。结果是应力历史会对材料的性状产生深远的影响。

由研究金属材料的塑性变形而建立起来的经典塑性力学理论很难对地质材料的上述本构特征进行模拟。为了模拟地质材料在任意三维应力轨迹、循环加载、主应力轴旋转、应力引起的各向异性等等的特性，传统塑性理论中关于屈服面、塑性势面、流动规律与硬化规律的基本概念必须要加以修正与发展。

3 几类地质材料的本构模型

最近20年来，对地质材料的本构模拟取得了较大的进展。在塑性力学基础上提出了很多不同类型的关于土、岩石、混凝土的本构模型。特别是80年代以来的一些国际会议和专题讨论会，例如1980年在McGill召开的地质工程中的极限平衡塑性力学与一般应力-应变关系的专题讨论会，1982年在Grenoble召开的土的本构关系的国际会议，1980年在Swansea召开的土对循环荷载和瞬态荷载响应的国际专业会议，1983年在Tucson召开的工程材料中的本构定律的国际会议以及地质工程中的数值方法的数次国际会议，都有许多关于地质材料本构模型的报告。

下面对建立在率型无关的塑性力学基础上的几类土与岩石的本构模型作一个简明扼要的评述。重点放在广大读者不太熟悉的多重屈服面模型和边界面模型上。

3.1 各向同性硬化模型

塑性力学应变硬化理论的工作最早是由Drucker，Gibson和Henkel[1]所开创，而后Roscoe，Schofield和Wroth[2]，Roscoe和Poorooshasb[3]，Roscoe，Schofield和Thurairajah[4]，Roscoe和Burland[5]，Schofield和Wroth[6]等人发展成临界状态模型。临界状态理论的建立是基于这样的实验事实：土样受剪时，屈服状态的不断发展，在临界孔隙比情况下达到“破坏”。一旦达到了临界孔隙比，剪切不再会引起孔隙比的进一步变化，Roscoe和他的合作者采用了相关联的流动规律和各向同性的膨胀屈服面，用孔隙比或体积塑性应变作为硬化参量，屈服面就可表示为

$$f(\sigma_{ij}, K) = 0 \tag{1}$$

$$K = \varepsilon_v^p \tag{2}$$

这里K是硬化参量，而ε_v^p是体积塑性应变。方程式（1）代表了一簇屈服面。$\bar{f}$面上的具有$\partial f/\partial J_1 = 0(d\varepsilon_v^p = 0)$的点的轨迹在应力空间中构成了临界状态面。

DiMaggio和Sandler[7]提出了帽盖模型。它在概念上非常类似于临界状态模型。这里的硬化参量也假设是体积塑性应变。而后，Baron，Nelson和Sandler[8]，Sandler，DiMaggio和Baladi[9]，以及Sandler和Baron[10]都进一步修正了帽盖模型。

这些体应变硬化模型的缺点是：模拟密砂的膨胀性和超固结土不排水试验的孔压变化时会出现不稳定性，

维普资讯 http://www.cqvip.com

这就导致了偏应变与体应变混合的硬化模型的出现。Nova 和 Wood[11]，Mroz 和 Norris[12] 提出了下列形式的混合型硬化参量 K：

$$K=\beta_1\int de^p_{ij}de^p_{ij}+\beta_2\int d\varepsilon^p_v \tag{3}$$

这里de^p_{ij}是偏塑性应变增量，β_1和β_2是常数。当$\beta_1=0$时，这些模型就简化为临界状态模型。Lade[13] 使用塑性功 W^p 作为硬化参量 K，塑性功定义为

$$W^p=\int\sigma_{ij}d\varepsilon^p_{ij} \tag{4}$$

早期的塑性力学模型是用两个应力不变量J_1，J_2来表达的。这类模型不能模拟土对应力轨迹强烈的依赖性。例如，两个不变量的模型不能考虑所观察到的压缩、拉伸与单剪条件下性状的差别。为了模拟这种差异，屈服面的形状要进行修正，从圆形修改成适当的不对称形状。这只要在公式中包括第三应力不变量就行了。不少研究者采用了三个应力不变量来表示屈服面的公式，例如Lade[13]，Desai[14]，Faruque和Desai[15]，等等。

实验事实证明，地质材料特别是非凝聚土并不显示出相关塑性流动。这样，就导致了非相关流动的塑性力学模型的发展。在非相关流动的模型中，通过修正、调节屈服函数得到了势函数[16]。这样，采用非相关流动塑性力学，由材料的某些特性，如晶粒间摩擦、材料各向异性所引起的对相关流动规律的偏离就能得到较好的模拟。简单加载条件下，这种对相关流动规律的偏离可通过改变塑性势中的材料常数来模拟。复杂加载情况下，这种偏离程度在塑性势中引入一个依赖于应力不变量和内部状态变量的函数来模拟。

3.2 多重屈服面模型

各向同性硬化模型虽然比较简单，但不能用来描述循环荷载条件下土的基本属性。为了比较真实地描述循环荷载条件下土的本构特性，一些研究者提出了多重屈服面模型。

Iwan[17] 提出的多重屈服面模型中，每个屈服面都以纯运动学的方式在空间中移动。这样，个别的服从线性加工硬化规律的模型组合起来总体上就能描述材料的非线性加工硬化特性。

Mroz[18] 基于同样概念，独自提出了多重屈服面塑性力学模型。在所有这类模型中，估算塑性应变增量都采用相关流动准则。塑性应变增量能通过硬化模量H'表示出来，

$$d\varepsilon^p_{ij}=\frac{1}{H'}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}d\sigma_{mn}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{5}$$

多重屈服面模型假设应力空间中有一簇嵌套屈服面，屈服面 f_0，f_1，f_2，f_3和f_4 的初始位置分别如图1(a)所示。当应力由O点向P_1移动时，先产生弹性应变，当应力点达到屈服面f_0时，开始出现塑性流动。而后，f_0再向着屈服面f_1运动，直到它们接触之前，根据相关联的流动法则，塑性流动是由与f_0相关的硬化模量H'_0所控制的。f_0与f_1在P_1接触时，如图1(b)，f_1变成有效屈服面。再进一步加载，流动法则中就采用硬化模量H'_1。随着应力点的移动，f_0和f_1一直保持相切，直到接触屈服面f_2，f_2就变成有效屈服面。这个过程继续下去，接着就是接触屈服面f_3，并采用新的硬化模量H'_3，如图1(c)。对于卸载与反向的重新加载，可作类似处理。

为了讨论一般应力轨迹情况下多重屈服面的性状，我们将各自大小为 $K^{(0)}<K^{(2)}<\cdots<$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$K^{(m)}<\cdots<K^{(p)}$的多重屈服面$f_0, f_1\cdots f_m\cdots f_p$的数学形式定义为

$$f_m=f_m[\sigma_{ij}-\alpha^{m}_{ij}, K^{(m)}]=0 \qquad (m=0,\cdots,p) \tag{6}$$

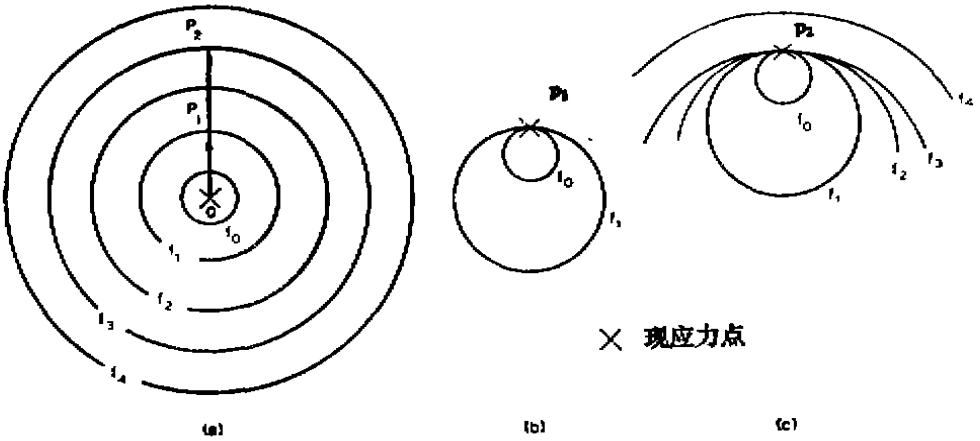

图1 Mroz/Iwan型应变硬化模型中的嵌套屈服面

这里α^{m}_{ij}是屈服面中心在应力空间中的坐标，$K^{(m)}$是屈服面的大小。在某种情况下，α^{m}_{ij}和$K^{(m)}$都假设是塑性应变ε^{p}_{ij}的函数。函数f_m可以方便地选成$[\sigma_{ij}-\alpha^{(m)}_{ij}]$和$K^{(m)}$的同类函数。经由一段任意的应力轨迹之后，应力点达到了屈服面f_m，并且屈服面$f_0, f_1, \cdots, f_m$都互相切于接触点P，如图（2）所示。从式（6），有下列的数学关系式：

$$\frac{\sigma_{ij}-\alpha^{(0)}_{ij}}{K^{(0)}}=\frac{\sigma_{ij}-\alpha^{(1)}_{ij}}{K^{(1)}}=\cdots=\frac{\sigma_{ij}-\alpha^{(m)}_{ij}}{K^{(m)}} \tag{7}$$

如果在屈服面f_m上的P点再加一个应力增量$d\sigma_{ij}$，$d\sigma_{ij}$指向屈服面的外法向，则求由式（5）所给出的塑性应变增量$d\varepsilon^{p}_{ij}$，应使用与最外层的屈服面f_m相关的硬化模量$H'=H'_m$。硬化模量H'_m可以是常数，也可以是塑性应变ε^{p}_{ij}的函数。在Mroz[18]原先提出的多重屈服面模型中，硬化模量H'_m取成常数，由简单的试验所决定。

为了从数学上来描述多重屈服面的运动，让我们重新考虑图（2）中所示的典型情况。应力空间中两个相似的屈服面f_m和f_{m+1}，它们的中心分别由应力空间中原点到屈服面中心的矢量$\alpha^{(m)}_{ij}$和$\alpha^{(m+1)}_{ij}$所表示。于是，这两个屈服函数就可以表示为

$$f_m[\sigma_{ij}-\alpha^{(m)}_{ij}, K^{(m)}]=0 \tag{8}$$

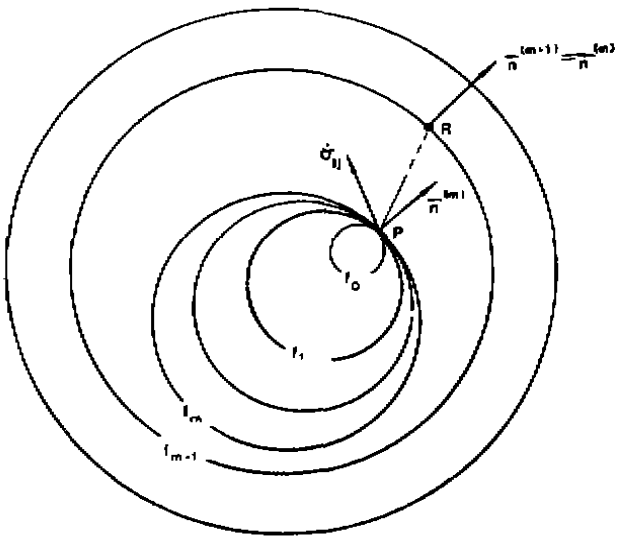

图2 应力空间多重屈服面的移动规则

P点是现时应力状态，PR是屈服面，f_0，…，f_m瞬态运动方程

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$f_{m+1}[\sigma_{ij}-\alpha_{ij}^{(m+1)},\ K^{(m+1)}]=0 \tag{9}$$

屈服面f_m上的点P，如图2所示，相应于应力增量$d\sigma_{ij}$，f_m的瞬态移动将沿着$\overline{PR}$。这里R是屈服面f_{m+1}上的点，它的外法向与f_m上的点P的外法向相同。如用$\sigma_{ij}^{(m)}$和$\sigma_{ij}^{(m-1)}$来分别表示P点和R点的应力状态，则根据式（7），就可得到下列关系式：

$$\sigma_{ij}^{(m+1)}-\alpha_{ij}^{(m+1)}=\frac{K^{(m+1)}}{K^{(m)}}[\sigma_{ij}^{(m)}-\alpha_{ij}^{(m)}] \tag{10}$$

假设现在屈服面f_m移动了$d\alpha_{ij}^{(m)}=d\mu\cdot u_{ij}$，这里$u_{ij}$用张量$[\sigma_{ij}^{(m+1)}-\sigma_{ij}^{(m)}]$来表示，从式（10）能求得

$$d\alpha_{ij}^{(m)}=\frac{d\mu}{K^{(m)}}[\{K^{(m+1)}-K^{(m)}\}\sigma_{ij}^{(m)}-\{\alpha_{ij}^{(m)}K^{(m+1)}-\alpha_{ij}^{(m-1)}K^{(m)}\}] \tag{11}$$

对于两个屈服面的中心是一致的特殊情况，有$\alpha_{ij}^{(m)}=\alpha_{ij}^{(m+1)}$，式（11）变成

$$d\alpha_{ij}^{(m)}=d\mu\frac{K^{(m+1)}-K^{(m)}}{K^{(m)}}[\sigma_{ij}^{(m)}-\alpha_{ij}^{(m)}] \tag{12}$$

$d\mu$的量值由相容性条件$df_m=0$决定。即

$$df_m=\frac{\partial f_m}{\partial\sigma_{ij}}[d\sigma_{ij}-d\alpha_{ij}^{(m)}]=0 \tag{13}$$

将$d\alpha_{ij}^{(m)}=d\mu[\sigma_{ij}^{(m-1)}-\sigma_{ij}^{(m)}]$代入上式，可得

$$d\mu=\frac{(\partial f_m/\partial\sigma_{ij})d\sigma_{ij}}{(\partial f_m/\partial\sigma_{kl})[\sigma_{kl}^{(m+1)}-\sigma_{kl}^{m}]} \tag{14}$$

上面的模型假设硬化模量是常数。当然也可以认为硬化模量是变数。例如，它是某个标量参数的函数。这个标量参数可以表示为

$$\xi=\int(d\varepsilon_{ij}^{p}d\varepsilon_{ij}^{p})^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

这样，就可以得到更一般的多重屈服面模型。

Prager[19]的运动硬化模型中，屈服面的大小是固定不变的。只是屈服面能在应力空间中随着应力移动。由于屈服面保持不变，所以这种模型只意味着常值塑性模量和模拟线性应力-应变关系。而多重屈服面模型包括了应力空间中一族大小不同的屈服面，每一个大的屈服面都包容了所有比它小的屈服面。屈服面越大则对应的塑性模量值越小。这样，一族多重屈服面就定义了一个应变硬化模量场。由于材料的硬化过程是连续的，所以理论上就需要无限多个屈服面。而实际上只采用有限多个屈服面。这是用分段的线性响应来近似实验观察到的非线性响应。

Mroz[18]早先提出的模型是用于金属材料的。之后，许多研究者都采用这个概念并发展了这个模型的各种修正模型用于金属或地质材料。Prevost[20]采用多重屈服面的概念提出了一个不排水条件下粘土的本构模型。之后，又将此模型加以推广用于研究排水条件下土的性质[21]。其屈服函数可表示为

$$f_m(\sigma_{ij}-\alpha_{ij}^{m})-K_m=0 \tag{16}$$

这里，$m=1,2,\cdots,p$，p是屈服面的总的数目，α_{ij}是屈服面的中心而K_m是它的大小。屈服面初始位置和尺寸反映了材料过去的应力-应变历史。H_m是与每一个屈服面相关的塑性模量，

维普资讯 http://www.cqvip.com

屈服面能移动，大小可以变化，所以K_m和H_m在变形过程中也变化。

本构关系中关于应力（或应变）增量单值性的要求决定了多重屈服面中的每一个屈服面相互不能重叠。两个相邻的屈服面之间的接触只能是在同一外法线方向上的点接触，这个点就称为共轭点。这个要求支配了屈服面的移动规律。

多重屈服面模型虽未跳出经典塑性力学的框架，但可以估计土的各向异性的、依赖于应力轨迹的弹塑性应力-应变关系。可以估算卸载和重新加载的影响，模拟单调加载和循环加载条件下土的性状。这类模型的主要缺点是参量的个数太多（每个屈服面都有尺寸和位置的参量），较难用于工程实践之中。

3.3 边界面模型

上面所述的多重屈服面模型虽然能描述经典塑性理论所不能描述的土的特性，如循环加载过程的 Bauschinger 效应，应力引起的各向异性等等。但是必须定义、更新和保留模型中的每一个屈服面的记忆。这必然要使计算变得复杂并且费用更加昂贵。这就导致了人们去寻求更简单的模型。

边界面模型最早是由Dafalias和 Popov [22] 提出并用于金属材料的循环加载。边界面模型假设应力空间中存在一个能包含所有屈服面和加载面的曲面。它的定义与经典塑性力学中的屈服面的定义是一样的。一般地，在塑性加载过程中，边界面与屈服面都能变形并能在应力空间中移动。

在Dafalias的模型中，边界面总是包含了里面的加载面，加载面内部只是弹性区，如图3所示。加载面的方程定义为

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij},q_n)=0 \tag{17}$$

这里，α_{ij}是加载面中心的坐标，如图3(a)中的K点，而q_n是塑性内变量，例如塑性应变。加载面可以根据任何认为合适的硬化规则而变形和移动，它可以和边界面接触、相切，但不能与边界面相交。在相关流动规则的构架内，与加载面相对应的硬化模量一般可写成

$$H'=H'(\delta,W_p) \tag{18}$$

这里，δ是加载面上a点（表示现时的应力状态σ_{ij}）与边界面上的b点之间的距离，b点由线$\overline{Ka}$与边界面相交而得，如图3(a)所示。W_p是塑性功，它是塑性变形过程中沿着加载轨迹

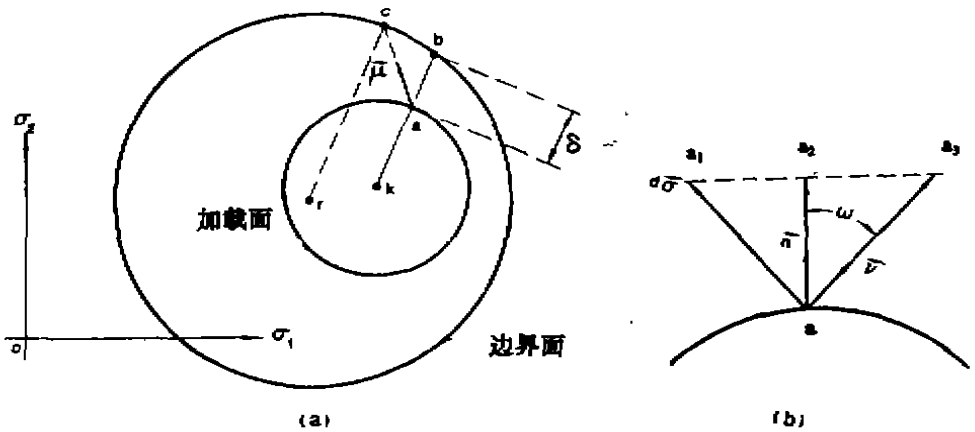

图3 加载面、边界面和它们运动说明的示意图

维普资讯 http://www.cqvip.com

在塑性应变空间中积分而得到。

加载面上的塑性硬化模量假设依赖于加载面和边界面的相对形状而变化。这是区别现在的公式与前面多重屈服模型面的公式的一个重要的假设。

边界面定义成与加载面相同类型的函数形式

$$F(\sigma_{ij}-\alpha^*_{ij},q_n)=0 \tag{19}$$

这里，α^*_{ij}是边界面中心点的坐标。边界面在应力空间中的移动由下列规则给出：

$$d\alpha^*_{ij}=\frac{d\sigma}{\cos(\omega)}\gamma_{ij}-\left(1-\frac{H'_0}{H'}\right)d\sigma u_{ij} \tag{20}$$

这里，$d\alpha^*_{ij}$是边界面中心移动的增量。$d\sigma\gamma_{ij}/\cos(\omega)$表示由于加载面的移动点$a$在单位矢量$\gamma_{ij}$方向的增量，$H'_0$是两曲面接触$\delta=0$时的硬化模量，$d\sigma$是$d\sigma_{ij}$在点$a$的法向矢量$n_{ij}$上的投影，$u_{ij}$是沿$a$和$c$的单位矢量[见图3(a)]。注意到当加载面的运动是刚体运动时，式(20)中的第一项$d\sigma\gamma_{ij}/\cos(\omega)$与加载面中心的移动增量$d\alpha_{ij}$一致。而当两个面接触时，$H'=H'_0$，两个面以相同的速率一起运动，则

$$d\alpha^*_{ij}=d\alpha_{ij} \tag{21}$$

硬化规则。作为一种特殊的情况，这个模型采用了Prager的运动学硬化规则，$d\alpha_{ij}$能表示为

$$d\alpha_{ij}=cd\varepsilon^p_{ij} \tag{22}$$

这里，c是材料参量。应用$\partial f/\partial\alpha_{ij}=-(\partial f/\partial\sigma_{ij})$，式（5）和式（21），其相容性条件变成

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}-\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}c\frac{1}{H'}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}-d\sigma_{mn}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=0 \tag{23}$$

于是可得到

$$c=\frac{H'}{(\partial f/\partial\sigma_{ij})(\partial f/\partial\sigma_{ij})} \tag{24}$$

应用式（5）并将式（24）代入式（22），可以得到

$$\begin{aligned}d\alpha_{ij}=cd\varepsilon^p_{ij}&=c\frac{1}{H'}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}d\sigma_{mn}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\\&=\frac{(\partial f/\partial\sigma_{mn})d\sigma_{mn}}{[(\partial f/\partial\sigma_{kl})(\partial f/\partial\sigma_{kl})]^{1/2}}\ \frac{(\partial f/\partial\sigma_{ij})}{[\partial f/\partial\sigma_{rs})(\partial f/\partial\sigma_{rs})]^{1/2}}\end{aligned} \tag{25}$$

注意到$(\partial f/\partial\sigma_{mn})/[(\partial f/\partial\sigma_{kl})(\partial f/\partial\sigma_{kl})]^{1/2}$是单位法向矢量$n_{mn}$，式（25）就可写成

$$d\alpha_{ij}=n_{mn}d\sigma_{mn}n_{ij}=d\sigma n_{ij} \tag{26}$$

由于对于Prager运动学硬化规则，$\gamma_{ij}=n_{ij}$，$w=0$，故式（20）变成

$$d\alpha^*_{ij}=d\sigma n_{ij}-d\sigma\left(1-\frac{H'_0}{H'}\right)u_{ij}=d\alpha_{ij}-d\sigma\left(1-\frac{H'_0}{H'}\right)u_{ij} \tag{27}$$

在这种情况下，边界面的移动增量由混合Prager硬化规则所描述。

如果模型应用Ziegler的运动学硬化规则，$d\alpha_{ij}$可写作

$$d\alpha_{ij}=d\mu(\sigma_{ij}-\alpha_{ij}) \tag{28}$$

这里$d\mu$为比例因子，见图4．从图4可知

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\sigma_{ij}-\alpha_{ij}=\rho u_{ij} \tag{29}$$

这里 u_{ij} 是沿 $\overline{Ka}$ 的单位矢量，ρ 是点 K 和 a 之间的距离，所以式（28）可表示成

$$d\alpha_{ij}=d\mu\rho u_{ij} \tag{30}$$

与采用Prager硬化规则的情况相似，由相容条件 $df=0$，可得

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}-\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\mu\,\rho\,u_{ij}=0 \tag{31}$$

由上式可得出

$$d\mu=\frac{(\partial f/\partial\sigma_{kl})d\sigma_{kl}}{\rho(\partial f/\partial\sigma_{kl})\mu_{kl}} \tag{32}$$

或使用单位法向矢量 n_{ij}

$$d\mu=\frac{n_{ij}d\sigma_{ij}}{\rho n_{kl}\mu_{kl}} \tag{33}$$

注意到 $n_{ij}d\sigma_{ij}=d\sigma$，$n_{kl}\mu_{kl}=\cos\theta$（见图 4）．式（30）中的 $d\alpha_{ij}$ 就变成

$$d\alpha_{ij}=\frac{d\sigma}{\cos\theta}\mu_{ij} \tag{34}$$

将 $\gamma_{ij}=\mu_{ij}$，$\omega=\theta$ 代入式（20），可得出 $d\alpha^*_{ij}$

$$d\alpha^*_{ij}=\frac{d\sigma}{\cos\theta}\mu_{ij}-d\sigma\left(1-\frac{H'_0}{H'}\right)\mu_{ij}=d\alpha_{ij}-d\sigma\left(1-\frac{H'_0}{H'}\right)\mu_{ij} \tag{35}$$

从上面的讨论可以清楚地看到：为了发展不同类型的边界面模型，可以采用不同形式的加载面的运动和变形规律．

基于早先为模拟金属材料而建立起来的边界面模型的概念，Krieg[23] 发展成了较为简单的土的各向异性应变硬化塑性力学模型．

Mroz，Norris 和 Zienkiewicz[24,26] 对土介质提出了一个双曲面的各向异性硬化模型．包围纯弹性区的屈服面与边界面的形状、方位都相同．对应边界面内任一应力点 P，以它的

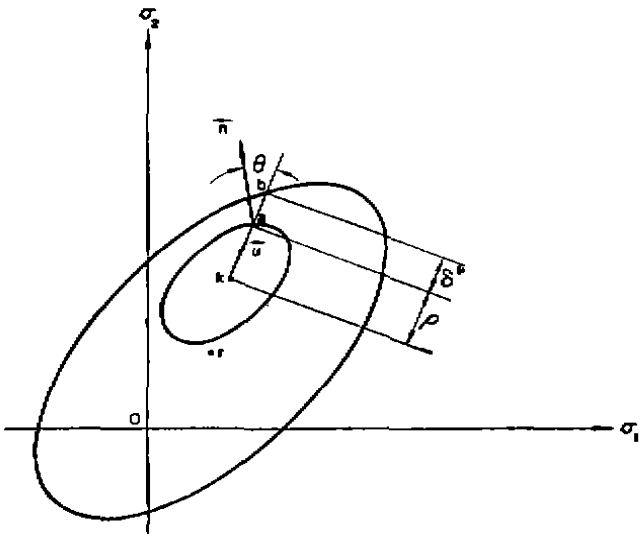

图4　加载面和边界面的示意图

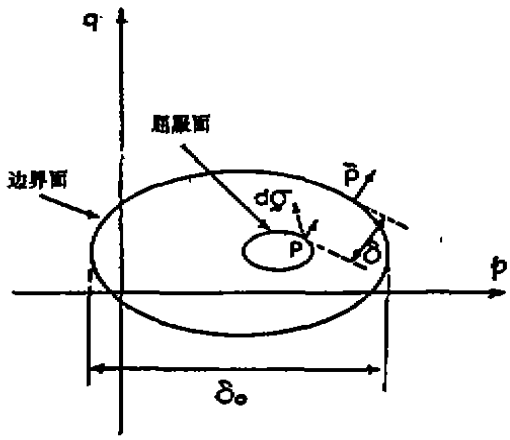

图5　Mroz等的边界面模型的示意图

维普资讯 http://www.cqvip.com

共轭点为影象点，如图（5）所示。插值规则用应力空间中现时应力点与影象之间的距离 δ 来表示，即

$$H = \bar{H} + (\hat{H} - \bar{H})(\delta/\delta_0)^m \tag{36}$$

这里，H是P点的塑性模量，$\bar{H}$是$\bar{P}$点的塑性模量，$\hat{H}$是一个大的正值，δ_0是椭圆边界面的直径，而m是材料常数。屈服面中心移动的增量假设是$P\bar{P}$的方向。

Dafalias和Popov[26]，Dafalias和Herrmann[27]利用消去公式中有界屈服面的做法进一步简化了边界面的概念。这样，如图（6）所示，纯弹性区就不再存在了。边界面内任意一点塑性应变方向由边界面上的影象点$\bar{P}$的法向$\bar{n}$给出。P点的塑性模量、由插值规则给出[27]

$$H = \bar{H} + \hat{H}(\delta/\delta_0 - \delta)^m \tag{37}$$

这里$\bar{H}$是第一应力不变量J_1的函数，而其他量的定义与式（36）相同。影像点$\bar{P}$由简单地延长DP线而得到。此模型虽然能模拟卸载和重新加载过程中的塑性变形，但不能模拟应力引起的各向异性。

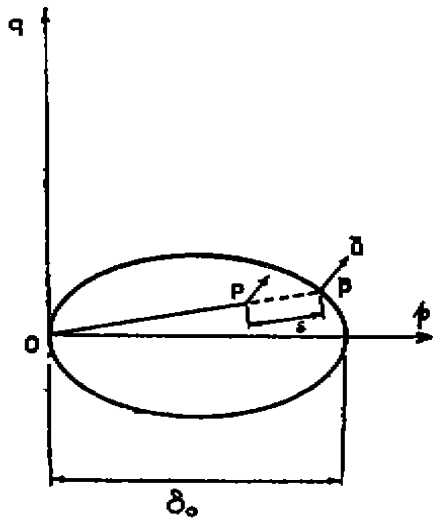

图6　封闭区域消失的边界面模型

Mroz[28]还给出了一个边界面概念的修正模型——无限屈服面模型。之后，这个模型被用于描述砂土的本构性状和粘土的K_0固结情况[29,30]。模型中引入了记忆衰减的概念，即循环加载过程中大幅度波能抹去过去的小幅度波却必须仍“记住”以前的大幅度波。在每一加载反转时刻应力反转点所形成的屈服面通称同族曲面。这种同族曲面随应力点膨胀，大的同族屈服面能抹去小的。这种模型对某种加载历史还算通用，可是需要记忆大量逆同族屈服面。

相比于多重屈服面模型，边界面模型无需“记忆”多个屈服面的位置和大小，相对地比较简单。但它用塑性模量的插值公式来代替原先的硬化模量场，而插值规则的选择却带有很大的先验性。

4　应力引起的各向异性及其模拟

地质材料受到荷载作用后，材料的结构组织会产生相当大的变化。这种结构变化能使原先是各向同性的材料显示出各向异性的特性。这种现象就称之为应力引起的各向异性。70年代后期以来，不少研究者曾报道了应力引起的各向异性现象。

Stipho[31]报道了先各向异性固结，之后在排水条件下剪切破坏的粘土试样的应力-应变性状受固结所引起的各向异性程度的显著影响。但是，破坏时临界状态线的斜率对各向异性的程度并不太敏感。Lewin[32]发现，如果各向异性固结试样在偏应力卸载之后再受到流体静水压加载，增量塑性应变矢量在负偏应力方向偏离流体静水压力轴的方向。他进一步观察到，随着流体静水压加载的继续，这种偏离会逐渐消失。Arther等人[33]报道了砂土情况中应力引起的刚度各向异性的显著现象。在砂土中，特别是当主应力轴相对于材料晶轴旋转时，应力引起的各相异性就特别明显。在主应力轴旋转之后重新加载时，发现应力引起的各

维普资讯 http://www.cqvip.com

向异性对达到给定的应力比和割线模量所要求的应变有很大的影响．而对剪阻力角的影响却可以忽略．

随着加载过程的继续，应力引起的各向异性的程度也连续地发展．对地质材料的各向异性的现象学描述可以通过本构模拟来实现．从70年代后期以来，不少研究者提出了模拟各向异性的材料本构模型．前面提到的 Prevost 的模型[20,21]是说明初始各向异性的，从某种意义上来说，它可以推广用于应力引起的各向异性．模型中，各向异性用应力空间中多重屈服面的不同位置来表示．这类模型适合预言连续各向同性加载条件所产生的各向异性．而 Pietruszczak和Mroz[30]的模型用边界面的旋转和偏移来描述各向异性，但是没有给出决定各向异性参量的明确步骤．Kawadas[34]提出的模型，基于临界状态的概念，通过屈服面的连续旋转来表示应力引起的各向异性．Anandarajah，Dafalias和Herrmam[35]提出的边界面模型能计算初始各向异性和应力引起的各向异性，它通过边界面的膨胀和环绕应力空间中原点的转动来实现．Dafalias[36]提出了一个变化的不相关联的流动准则来计算凝聚土在压缩加载过程中引起的应力各向异性．这里所采用的不相关联的流动准则规定了塑性变形过程中应变率张量偏离材料屈服面的法线方向，其偏离程度随着偏量塑性应变的增加而增加，随着体积塑性应变的减少而增加．Desai等[37,38]提出了描述应力引起的各向异性的地质材料本构模型．在他们的模型中，初始屈服面在大小变化的同时，还可以移动、改变方位（旋转）和形状，通过屈服面的这种变化来描述应力引起的各向异性．

Zhang[39]通过导入弹性区性状的非线性假设，得出了新的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型与非线性弹/粘塑性的动力帽盖模型．Sahel等[40]通过修正一般帽盖模型的运动硬化规则，导出了能模拟循环荷载的新的帽盖模型．Dafalias[41]在亚塑性范畴内推广了边界面模型．Wang和Dafalias[42]在一般的亚塑性边界面构架内进一步提出了一个模拟砂土性状的新的边界面模型，成功地模拟了砂土“旋转剪切”响应，该模型能用来描述循环荷载作用下砂土的液化现象，包括模拟主应力数值及主应力方向的周期变化．关于岩土本构模型的理论、实验及其工程应用，可详见科学出版社出版的《土的本构模型及其工程应用》一书．

5 结 语

建立复杂加载条件下地质材料的本构模型是一件十分困难的事．其之所困难不仅在于所建立的本构模型要能较好地模拟地质材料的复杂的特征，而且还要能够方便地使用．这就要求在地质材料本构模型的研究工作中将理论上严密性与使用上的简易性结合起来．使建立的本构模型既能全面地模拟地质材料的本构特性，又不能含太多的待定常数，易于实际应用．

如实地模拟复杂加载（循环荷载，非比例加载）下地质材料的本构特性是当前地质材料本构模型研究的主要发展方向．

参 考 文 献

1 Drucker D C, Gibson R E, Henkel D J. Soil Mechanics and Work Hardening Theory of Plasticity. *Trans., ASCE*, **122** (1957) : 338—346

2 Roscoe K H, Schofield A, Wroth C P. On the yielding of Soils. *Geotechnique*, **8** (1958) : 22—53

3 Roscoe K H, Poorooshasb H B. A Theoretical and Experimental study of Stress-strain in Triaxial Compression Tests on Normally Consolidated Clays. *ibid*, **13** (1963) : 12—28

4 Roscoe K H, Schofield A, Thurairajah A. Yielding of Clays in State Wetter Than Critical. *ibid*, **13**, 3 (1963) : 211—240

5 Roscoe K H, Burland J B. On the Generalized Stress-strain Behaviour of 'Wet' Clays. Engineering

维普资讯 http://www.cqvip.com

Plasticity (Heyman J and Leckie F A eds). Cambridge Univ. Press, Cambridge (1968)
6 Schofield A N, Wroth C P. Critical State Soil Mechanics. McGraw-Hill Book Company, London (1968)
7 DiMaggio F L, Sandler I S. Material Model for Granular Soils. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **97**, EM3 (1971) : 935—950
8 Baron M L, Nelson I, Sandler IS. Influence of Constitutive Models on Ground Motion Predictions. *ibid*, **99**, EM6 (1973) : 1181—1200
9 Sandler I S, DiMaggio F L, Baladi G Y. Generalized Cap Model for Geologic Materials. *J. Geotech. Eng. Div., ASCE*, **102**, GT7 (July 1976) : 683—699
10 Slander I S, Baron M L. Recent Developments in the Constitutive Modelling of Geological Materials. Proc., 3rd Int. Conf. Num. Meth. in Geomech. (Aachen W Germany, W Wittke Eds), Balkema Press, Rotterdam, **1** (1979) : 363—376
11 Nova R, Wood D M. A Constitutive Model for Sand in Triaxial Compression. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech.*, **3** (1979) : 255—278
12 Mroz Z, Norris V A. Elastoplastic and Visco-plastic Constitutive Models for Soil with Application to Cyclic Loading. Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loads (Pande G N, Zienkiewicz O C eds.) John Wiley & Sons. Ltd., London (1982) : 173—218
13 Lade P V. Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surface. Report UCLA-ENG-7594. Univ. of Calif., Los Angeles (Nov. 1975)
14 Desai C S. A General Basis for Yield, Failure and Potential Function in Plasticity. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech.*, **4** (1980) : 361—375
15 Faruque M O, Desai C S. Implementation of a General Constitutive Model for Geological Materials. *ibid.*, **9**, 5 (1985)
16 Desai C S, Faruque M O. A Generalized Basis for Modelling Plastic Behavior of Materials. Proc., Int. Conf on Const. Laws for Eng. Mat.: Theory and Application. Tucson, Arizona (1983)
17 Iwan W D. On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, **34**, E3 (1967) : 612—617
18 Mroz Z. On the Description of Anisotropic Work Hardening. *J. Mech. and Physics of Solids*, **15** (1967) : 163—175
19 Prager W. A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids. *J. Appl. Mech.*, **78** (1956) : 493—496
20 Prevost J H. Mathematical Modeling of Monotonic and Cyclic Undrained Clay Behavior. *Int. J. Num. Analyt. Mech. in Geomech.*, **1**, 2 (1977) : 195—216
21 Prevost J H. Plasticity Theory for soil Stress-strain Behavior. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **104**, EM5 (Oct. 1978) : 1177—1194
22 Dafalias Y F, Popov E P. A Model of Non-linearly Hardening Materials for complex Loadings. *Acta Mechanica*, **21**, 3 (1975) : 173—192
23 Krieg R D. A Practical Two-Surface Plasticity Theory. *J. Appl. Mech., Trans. ASCE*, E42 (1975) : 641—646
24 Mroz Z, Norris V A, Zienkiewicz O C. An Anisotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loading. *Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech.*, **2** (1978) : 203—221
25 Mroz Z, Norris V A, Zienkiewicz O C. Application of an Anisotropic Hardening Model in the Analysis of Elasto-plastic Deformation of Soils. *Geotechnique*, **29** (1979) : 1—34
26 Dafalias Y F, Popov E P. Cyclic Loading for Materials with a Vanishing Elastic Region. *Nuclear Eng. and Design*, **41**, 2 (1977) : 293—302
27 Dafalias Y F, Herrmann L R. A Bounding Surface Soil Plasticity Model. Proc., Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading. Swansea, U. K. (1980)
28 Mroz Z. On Hypoelasticity and Plasticity Approaches to Constitutive Modelling of Inelastic Behavior of Soils. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech.*, **4** (1980) : 45—55
29 Mroz Z, Pietruszczak St. A Constitutive Model for Sand with Anisotropic Hardening Rule. *ibid.*, **7** (1983) : 305—320
30 Pietruszczak St, Mroz Z. On Hardening Anisotropy of K_0-Consolidated Clays. *ibid.*, **7** (1983) : 19—38
31 Stipho A S A. Experimental and Theoretical Investigation of Behavior of Anisotropically Consolidated Kaolin. Ph. D. Thesis, University College, Cardiff, University of Wales (1978)
32 Lewin P I. The Deformation of Soft Clay Under Generalized Stress Conditions. Ph. D. Thesis,

维普资讯 http://www.cqvip.com

Kings College, University of London (1978)
33 Arthur J R F, Chua K S, Dunstan T. Induced Anisotropy in Sand. *Geotechnique*, **29**, 1 (1977) : 13—30
34 Kavvadas M J. A Constitutive Model for Clays Based on Nonassociated Anisotropic Elastoplasticity. Proc., Int. Conf. Const. Laws for Eng. Mtls., Tucson, Arizona. (Jan. 1983) : 263—270.
35 Anandarajah A, Dafalias Y F, Merrmann M. A Bounding Surface Plasticity Model for Anisotropic Clays. Proc. 5th ASCE—EMD Conf., Laramie, Wyoming (Aug. 1984) : 937—940
36 Dafalias Y F. Initial and Induced Anisotropy of Cohesive Soils by Meams of a Varying Nonassociated Flow Rule. *Colloque Internationale du C. N. R. S.*, **319**. Villard-du-Lans, Grenoble, France. (June 1981)
37 Desai C S, Frantziskonis G N, Somasundaram S. Constitutive Modelling for Geological Materials. Proc. 5th Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., Nagoya, Japan (Apr. 1985) : 19—34
38 Desai C S, Somasundaram S, Faruque M O. Constitutive Modelling for Geological Materials: A General Procedure. Developments in Soil Mechanics and Foundation Engineering (Banerjee P K, Butlerfield R Eds), Elsevier Applied Science Publishers, London (1985) : 43—67
39 Zhang Gende. The Nonlinear Constitutive Model for Geological Material, Proc. Int. Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, China (Oct. 1985) : 201—206
40 Sabel N A, Isa M Al-Buraim, Hamdan N Al-Ghamedy. Mixed Hardening, Three Invariants Dependent Cap Model. *J. Eng. Mechanics*, **118**, 3 (1992) : 620—637
41 Dafalias Y F, Bounding Surface Plasticity I: Mathematics Foundation and Hypoplasticity. *ibid*, **112**, 9 (1986) : 966—987
42 Wang Z L, Dafalias Y F, Shen C K: Bounding Surface Hypoplasticity Model for Sands. *ibid*, **116**, 5 (1990) : 983—1001

RECENT DEVELOPMENT OF CONSTITUTIVE MODELS FOR GEOLOGICAL MATERIALS

Zhang Gen-de
Institute of mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing, 100080

Abstract In this paper, the development of constitutive models for geological materials over the last twenty years is reviewed. An attempt is made here to review in a very concise manner some of the common models for geological materials, such as, isotropic hardening models, nested surface models, bounding surface models, etc.

Keywords *geological material, constitutive models, soil plasticity*