维普资讯 http://www.cqvip.com

第 26 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 26, No.5
1994 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sept., 1994

奇怪吸引子分片机理的讨论[1)]

536-540

刘曾荣 赵 鸿*
(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室，北京 100080，
苏州大学数学系，苏州 215006)
*(兰州大学物理系，兰州 730000)

O316

摘要 用已经提出的二维平面映射的奇怪吸引子结构讨论了这类平面映射的奇怪吸引子分片的机理，给出了有关判据．以 Hénon 吸引子为例说明了这种机理的合理性．

关键词 奇怪吸引子，奇怪吸引子的分片，Hénon 映射，Sharkovskii 序列

引 言

对于一维单峰映射的浑沌的倒分叉序列可以用重正化群方法加以讨论．对于二维平面映射，由于奇怪吸引子的结构一直不十分清楚，因而其分片机理的讨论也就显得十分困难．

最近，文献 [1,2] 对于一类二维平面映射的奇怪吸引子提出了一种新的看法，并有实例 [3] 证明这种看法是正确的．利用这种观点在讨论中心型浑沌和随机网形成等问题上也取得了一些进展 [4,5]．按照 [1] 的观点，设 $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ 的微分同胚，p 为 f 的双曲不动点，$W^u(p)$ 为 p 的不稳定流形．如果 $\overline{W^u(p)}$ 上双曲周期点、横截同宿点和横截异宿点为稠时，在一定条件下，$\overline{W^u(p)}$ 能成为 f 的奇怪吸引子．此时 $\overline{W^u(p)}$ 包含了所有双曲周期点的不稳定流形，这种闭包关系是通过横截环来形成．

在本文中，我们用上述观点分析了这类奇怪吸引子分片的机制，并给出了产生分片的判据．在文章最后一部分以 Hénon 映射为例，说明上述观点是正确的．

1 分片机制

设 $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ 的微分同胚．$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为 f 的双曲周期点，如果 $W^u(p_i) \pitchfork W^s(p_{i+1})(i = 1, 2, \cdots, k; k+1 \equiv 1)$，则称 f 具有横截 k 环．当 $p_1, \cdots, p_k$ 为 f 的 k 周期点时，称该环为同周期横截 k 环；当 $p_1, \cdots, p_k$ 不是 f 的同周期点时，称该环为异周期横截 k 环．

命题 1 设 $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ 的微分同胚，p_1 和 p_2 为 f 的双曲周期点 (可以同周期也可异周期)，则 $W^u(p_1) \cap W^u(p_2) = \phi$，$W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \phi$．

1) 国家重大基础性研究项目 "非线性科学" 和国家自然科学基金资助课题．
1992-12-28 收到第一稿，1993-09-20 收到修改稿．

维普资讯 http://www.cqvip.com

证　利用反证法. 假设 $W^u(p_1)\cap W^u(p_2)\neq\phi$, 设 $q\in W^u(p_1)\cap W^u(p_2)$, 取 l 为 p_1 和 p_2 周期的最小公倍数，考虑 $f^{-nl}(q)$, 在 $n\to\infty$, 由极限唯一性，就只能有 $p_1=p_2$, 矛盾.

此命题告诉我们 f 的任意不同的双曲周期点，它们的不稳定流形只可能是处于分离和闭包两种关系中一种. 在成闭包关系时，它们的交集是空集. 对于稳定流形也有类似性质.

命题 2　设 p 为 f 双曲周期点. $p_1,\cdots,p_k$ 为 f 的双曲周期 k 点，且它们的不稳定流形是分离的，p 如能与 f 的双曲周期 k 点中某一点形成横截环，就必有 l 整除 k, 其中 l 为 p 的周期.

证　用反证法. 如 l 不整除 k, 则存在 n_1 和 m_1, 使得 $l=n_1k+m_1$, 其中 n_1 和 m_1 为正整数，且 $m_1<k$. 记 $O(p_1)=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$, $W^u(O(p_1))=U_{i=1}^{k}W^u(p_i)$. 由命题假设，存在 $\delta=\min d(W^u(p_i),\ W^u(p_j))>0$, $(i,j=1,2,\cdots,k,i\neq j)$.

不失一般性，设 p 与 p_1 成横截环，$q\in W^s(p)\cap W^u(p_1)$, 且 $W^s(p)\ \overline{\pitchfork}_q\ W^u(p_1)$, 那么应该有 $f^{nl}(q)\to p$, $n\to\infty$, 其中 $f^{nl}(q)\in W^s(p)$. 另一方面，$nl=n(kn_1+m_1)=knn_1+nm_1$, 显然有

$$
\begin{array}{ll}
k|_{nm_1} & f^{nl}(q)\in W^u(p_1)\\
k|_{nm_1-1} & f^{nl}(q)\in W^u(f(p_1))=W^u(p_2)\\
\cdots & \\
k|_{nm_1-(k-1)} & f^{nl}(q)\in W^u(p_k)
\end{array}
$$

由于 δ 存在，在 $n\to\infty$ 时，$f^{nl}(q)$ 的极限不存在，因而产生矛盾.

此命题告诉我们，当 $W^u(O(p_1))=W^u(p_1)\cup W^u(p_2)\cdots\cup W^u(p_k)$ 中各个 $W^u(p_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 是分离时，只有那些周期为 k 倍数的双曲周期点可以通过横截环方式使得其不稳定流形包含在 $\overline{W^u(O(p_1))}$ 中. 另一方面，此时 $\overline{W^u(O(p_1))}$ 分离成为 k 个孤立部分 $\overline{W^u(p_i)}(i=1,2,\cdots,k)$, 如果在每一个 $\overline{W^u(p_i)}$ 上满足我们在 [1] 中提出要求的话 (事实上只要有一块成立即可),$\overline{W^u(O(p_1))}$ 就成为一个奇怪吸引子. 这个奇怪吸引子是分离成 k 片的.

利用上述思想，我们就可以讨论奇怪吸引子分片的机理. 考虑含参数平面映射 $f_\mu:\ \mathcal{R}^2\to\mathcal{R}^2$. 假设在 $\mu=\mu_0$ 时，f 有一个双曲不动点 p, 同时 $\overline{W^u(p)}$ 构成一个奇怪吸引子. 此时允许在 $\overline{W^u(p)}$ 上含有任意周期的双曲周期点. 不失一般性，可假设 $\overline{W^u(p)}$ 上含有一组双曲周期 2 点 (p_1,p_2). 当参数 μ 由 μ_0 开始增加，所有在 $\overline{W^u(p)}$ 上双曲周期点和它们的不稳定流形的相对位置发生变化. 当 $\mu=\mu_c$ 时，由 p_1 和 p_2 形成同周期横截 2 环处于临界状态. 那么当 $\mu>\mu_c$ 时，由 p_1 和 p_2 的不变流形构成的同周期 2 环发生破裂，即 $W^u(p_1)\cap W^s(p_2)=\phi$, $W^s(p_1)\cap W^u(p_2)=\phi$, $W^u(p_1)$ 与 $W^u(p_2)$ 不形成闭包关系，$W^u(p_1)$ 和 $W^u(p_2)$ 发生分离，$\overline{W^u(p_1)}$ 和 $\overline{W^u(p_2)}$ 形成孤立的两片. 如果在 $\overline{W^u(p_1)}$(或 $\overline{W^u(p_2)}$) 上还满足奇怪吸引子形成条件，那么就出现了

维普资讯 http://www.cqvip.com

由一片奇怪吸引子到两片奇怪吸引子的分片现象. 用类似方法可以讨论奇怪吸引子的其它分片现象.

现在我们再进一步讨论同周期 2 环的破裂问题. 如果在 $\mu=\mu_b$ 时, p_1 和 p_2 分别位于双曲不动点 p 的稳定流形两侧, 同时由 p_1 和 $p(p_2$ 和 $p)$ 形成的异周期 2 环处于临界情况 (见图 1). 那么, 当 $\mu>\mu_b$ 时, $W^s(p)\cap W^u(p_1)=\phi$, $W^s(p)\cap W^u(p_2)=\phi$, 由 μ 对 f 的连续性, 此时 $W^u(p_1)$ 和 $W^u(p_2)$ 分离. 因而在这种情况下, 同周期 2 环的破裂与异周期 2 环破裂是等价的. 在这种条件下, 也可以用异周期 2 环的破裂来讨论奇怪吸引子的分片问题.

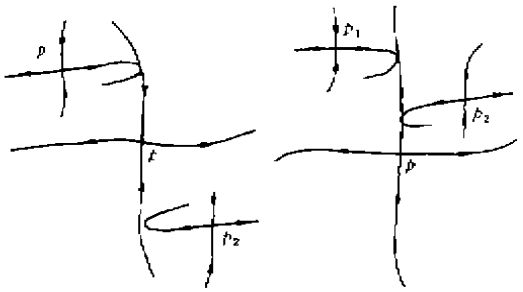

图 1
Fig.1

2 Hénon 映射

我们以 Hénon 映射为例加以说明

$$\begin{cases} x_{n+1}=1-ax_n^2+by_n \\ y_{n+1}=x_n \end{cases}$$

取 $b=0.5$, 利用 [6] 中提供的数值方法来讨论 : a 变化时, 映射的奇怪吸引子的变化情况.

当 $a>1.0334$ 时, 数值计算表明, 此时奇怪吸引子为一片, 同时的确存在各种双曲周期点形成的同周期环和异周期环.

当 $a=1.0334$ 时, 数值计算表明, 此时双曲不动点的不变流形仍产生横截同宿点 (见图 2), 但此时双曲周期 2 点分别位于双曲不动点的稳定流形两侧, 且双曲周

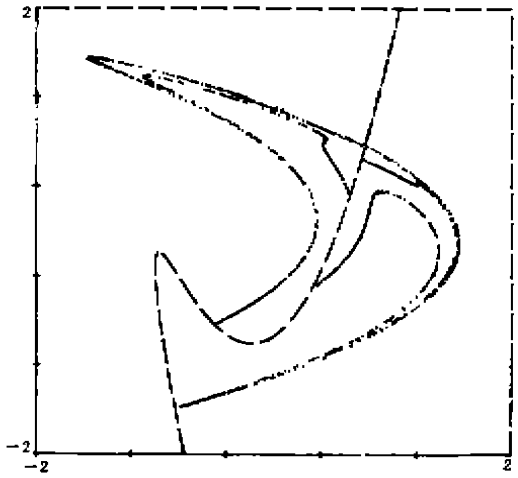

图 2
Fig.2

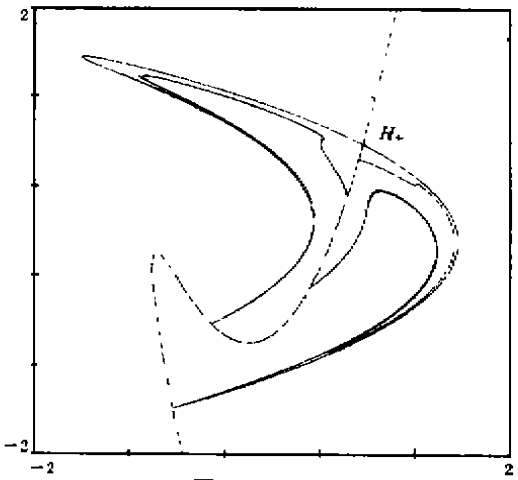

图 3
Fig.3

维普资讯 http://www.cqvip.com

期 2 的两个点的不稳定流形与双曲不动点的稳定流形发生异宿相切，吸引子仍为一片．现在情况是临界情况．文献中认为 $a = 1.0334$ 是奇怪吸引子出现从一片到两片转换的参数值 [6]．

当 $a = 1.0317$ 时，数值计算表明，此时双曲不动点的不变流形产生同宿相切 (见图 3)；但两个双曲周期 2 点的不稳定流形发生分离，且与双曲不动点的稳定流形不发生异宿相交 (见图 4)．数值计算发现，此时的奇怪吸引子的确是两片，而且形状与双曲周期 2 点的不稳定流形闭包一致．此外，数值计算表明周期 4 点和周期 8 点的不变流形都与双曲周期 2 点的不变流形形成横截环．

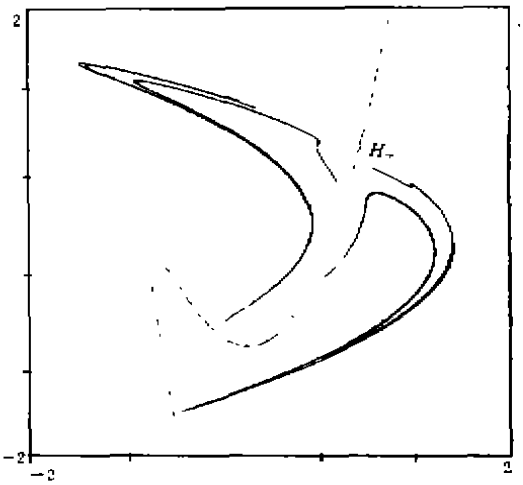

图 4
Fig.4

于是在 $1.0317 < a < 1.0334$ 时，双曲不动点的不变流形仍产生同宿相交，而两个双曲周期 2 点的不变流形与双曲不动点的不变流形不产生异宿点，它们的不稳定流形是分离，自然此时的奇怪吸引子为两片．

上述 Hénon 吸引子的数值结果告诉我们，奇怪吸引子由一片到两片的转换；不是由于双曲不动点的横截同宿点的消失，而是由于双曲不动点和双曲周期 2 点产生的异周期 2 环发生破裂所导致的结果．在现在情况下，异周期 2 环破裂是与同周期 2 环的破裂是一致的，由此可见数值结果与我们的理论分析相吻合．

3 讨　论

由上述结果，我们可以给出如下讨论：

1. 对于 [1] 中定义的奇怪吸引子可作如下推广：设 f：$\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ 为微分同胚，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为 f 的双曲周期 k 点，且 $W^u(p_i)(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是互相分离的，如果周期为 $nk(n \in \mathcal{Z})$ 的双曲周期点在 $\overline{W^u(O(p_1))} = U_{i=1}^{k} \overline{W^u(p_i)}$ 上为稠，且满足 [1] 中提出的一系列假设，则 $\overline{W^u(O(p_1))}$ 为 f 的一个奇怪吸引子．这个奇怪吸引子是由 k 片构成的．当双曲周期 k 点被双曲不动点代替，就回到了 [1] 所定义的奇怪吸引子，它是一片的．

2. 在 k 片构成的奇怪吸引子中，只有周期为 $kn(n \in \mathcal{Z})$ 的双曲周期点的不稳定流形才有资格加入．如果映射在参数 μ 变化时，它的奇怪吸引子经历了倍周期的倒分叉序列，那么我们可以把全体自然数作如下排列

$$
\begin{array}{l}
1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots \\
2,\ 2\times 3,\ 2\times 5,\ 2\times 7,\ \cdots \\
2^2,\ 2^2\times 3,\ 2^2\times 5,\ 2^2\times 7,\ \cdots
\end{array}
$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\cdots$$
$$2^n,\ 2^n\times 3,\ 2^n\times 5,\ 2^n\times 7,\ \cdots$$
$$\cdots$$

在一片奇怪吸引子时，所有周期的周期点都可能存在于 $\overline{W^u(p)}$ 中. 当奇怪吸引子分成两片时，周期数为上述排列中第一列的周期点是被吸引子排斥在外. 当奇怪吸引子分成 2^n 片时，周期数为上排列中前 n 列的周期点被排除在吸引子外. 这是一个类似于 Sharkovskii 序列的有趣序列. 当然一个具体映射是否有这种周期点还得由具体映射决定，我们用这个序列仅仅是判断吸引子应当排除的周期点.

3. 设一个奇怪吸引子是 n 片的，当映射的参数变化后，它变成 m 片. 从上述结果来看，产生这种现象的条件为：

(1) m 是 n 的整数倍；

(2) 由 m 个双曲周期点所形成的同周期横截 m 环发生破裂. 这儿尤其要指出，不能把 n 个双曲周期点作为 f^n 不动点所形成的横截同宿点的消失，作为判定这种现象产生的判据.

参 考 文 献

1 刘曾荣，秦文新，谢惠民，曹永罗. 一类二维平面映射的奇怪吸引子结构和动力学行为. 中国科学 A 辑, 1993, 23(7): 702

2 Liu Zengrong, Cao Yonglao. Discussion on the geometric structure of strange attractor. *Chinese Phys Lett*, 1991, 8(10): 503

3 刘曾荣，秦文新，谢惠民. Lauwerier 吸引子的结构和动力学行为. 科学通报, 1992, 37(14): 1269

4 Liu Zengrong, Zhao Nan. A centrosymmetric chaos, *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 8(1): 21

5 刘曾荣，许政范，王启高，候殿辉. 完全和不完全随机网. 应用数学和力学, 1991, 12(7): 587

6 Zhao Hong, Gu Yan. A method for calculating stable and unstable manifold of high periodic hyperbolic orbits. *Chinese Phys Lett*,1992, 9(2): 65

THE DISCUSSION ON MECHANISM OF BAND-EMERGING OF STRANGE ATTRACTOR

Liu Zengrong Zhao Hong*

(*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080, *China*, *Dept. of Math., Suzhou University, Suzhou* 215006, *China*)

*(*Dept. of Physics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

Abstract Based on the geometric structure of strange attractor which has been suggested in [1], the mechanism of band-emerging of strange attractor is discussed, and the criterion producing band-emerging of strange attractor is obtained. As an example. Henon map is used to illustrate that the mechanism is reasonable.

Key words strange attractor, band-emerging of strange attractor, Hénon map, Sharkovskii sequence