维普资讯 http://www.cqvip.com

第 26 卷 第 4 期 力 学 学 报 Vol. 26, No.4
1994 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1994

驱动长方形腔内流动非稳定性的数值模拟[1)]

317-406

伍亚丹 傅德薰* 黄兰洁
(中国科学院计算中心，北京 100080)
*(中国科学院力学研究所，北京 100080)

O 351.3

摘要 本文对长宽比为 2 的驱动腔内流动进行了数值模拟. 采用非均匀交错网格上的修正隐式 Temam 格式，以及压力修正投影法，分别计算了 Re 数为 100 、 400 、 1000 、 2000 、 3000 、 3500 、 5000 、 10000 的驱动长方形腔内流场. 当 $Re \leq 3000$ 时，流场收敛到定常状态；而 $Re \geq 3500$ 时，只能得到渐近周期结果；其中应用了谱分析等方法说明数值是周期性变化. 可见，Hopf 分叉点出现在 Re 数 3000 与 3500 之间.

关键词 驱动长形腔流动，修正隐式 Temam 格式，渐近周期解
流体力学，驱动长腔流动 流场，分叉

引 言

近年来，腔内流动成了热门课题的研究对象，主要用于研究流场的失稳、分叉等物理特征. 以前，人们通常研究定常问题，例如文献 [1] 、 [2] 、 [3], 等等. 随着计算机容量的增加、计算速度的加快，人们才开始研究流场的失稳、分叉等物理现象. 因为这些非定常问题是在 Re 数较大时才可能出现. 1987 年， Gustafson 和 Halasi[4] 第一次指出：Re 为 10000 的驱动长方形腔内流场不可能收敛到定常，而是出现渐近周期状态. 此后，他们及 Goodrich[5] 对此作了进一步研究，证明 Re 为 5000 、 10000 的长形腔内流场的确达到了周期状态. 对正规化的驱动方腔， J.Shen[6] 找到了两个临界 Re 数 Re_1 、 Re_2 的范围：$10000 \leq Re_1 < 10500$, $15000 < Re_2 \leq 15500$, 当 $Re \leq 10000$ 时，流场收敛到定常状态；当 $Re_1 < Re < Re_2$ 时，流场出现渐近周期状态；当 $Re > Re_2$ 时，流场只能是拟周期的. 而对长宽比为 2 的长形腔， Gustafson 等人得到的 Hopf 分叉点在 Re 为 2000 与 5000 之间，此范围太宽了. 本文主要是对此类长形腔内流动的非稳定性进行研究，找到更小范围的 Hopf 分叉点的临界值.

在数值试算中，我们采用非均匀交错网格上的修正隐式 Temam 格式以及压力修正方法 [7,8], 在第二节中做了简单介绍. 为了证明方法的正确性及有效性以及对流场有个全面的了解，我们首先试算了低 Re 数 (100 、 400 、 1000 、 2000) 的长形腔内流场，定常结果在第三节中给出. 第四节给出了 Re 为 5000 及 10000 的渐近周期结果，而 Re 为 3000 、 3500 的数值模拟及 Hopf 分叉点的范围在第五节中给出.

1) 本文由国家攀登计划及自然科学基金资助.
本文于 1993 年 2 月 27 日收到第一稿， 1993 年 12 月 8 日收到修改稿.

维普资讯 http://www.cqvip.com

一、计算方法

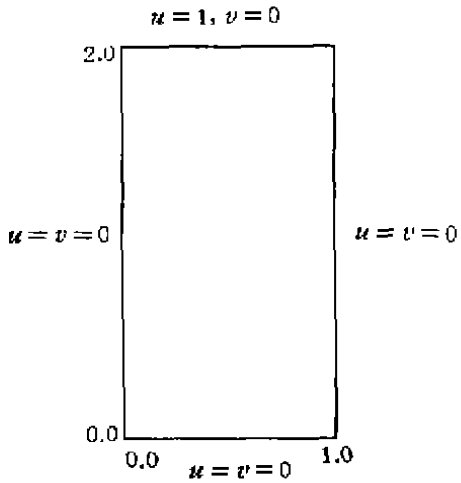

图 1 边界条件示意图
Fig.1 Boundary conditions

二维驱动腔内流动的数学模型的控制方程是不可压 Navier-Stokes(INS) 方程，无量纲形式可写为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

其中 u 、 v 是 x 、 y 方向的速度分量， p 是压力. 考虑无量纲 1×2 的长形腔，边界条件如图 1 所示，上壁是速度为 1 的固定水平流，左右壁面及下壁为固壁.

我们知道， Re 较大时会出现小尺度的边界层. 为了有效地处理这类问题，提高计算效率，在设置网格时采用光滑的坐标变换来实现非均匀网格的分布 (见 [8] 与 [9]), 因为随意突变的网格距会影响计算精度和流场稳定性. 对求解区域为 $[a,b]$ 、两端有边界层的一维问题，采用 [9] 中变换

$$\xi=\frac{c}{2}\left[\frac{\tanh m_1(2z)}{\tanh 2m_1}-\frac{\tanh m_2(2-2z)}{\tanh 2m_2}\right]+(1-c)z+\frac{c}{2}$$

其中 $z=\dfrac{x-a}{b-a}$, $x\in[a,b]$, m_i 为实数， $i=1,2$, c 是常数. 此函数的导数无奇异性且变换灵活. 对二维问题， x 、 y 方向分别单独考虑坐标变换.

由于网格距时大时小，要选用稳定性较好的格式才能在时间步长不太小时全场满足稳定性条件，因此我们选取了非均匀交错网格上修正全隐 Temam 格式 (MT)(见 [8]), 此格式在均匀交错网格上用中心差分，对流项取 "守恒型" 与 "非守恒型" 的平均形式，且 $n+1$ 层用简单线性化，这样保持非线性无条件稳定.

设二维坐标变换为 $\xi=\xi(x)$, $\eta=\eta(y)$, 其逆变换为 $x=x(\xi)$, $y=y(\eta)$. 在变换后的区域上设置均匀的交错网格，见图 2. 设 $I=\{jk\}$, $I^x=\{\underline{j}k\}$, $I^y=\{j\underline{k}\}$, 则 $u_{\underline{j}k}$, $v_{j\underline{k}}$, p_{jk} 分别定义在 I^x, I^y, I 上. 令 $x_j=x(\xi_j)$, $x_{\underline{j}}=x(\xi_{\underline{j}})$, $y_k=y(\eta_k)$, $y_{\underline{k}}=y(\eta_{\underline{k}})$, 如果变换函数的导数和未知量的导数都用中心差分近似，则未知量的一阶导数差分为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j=\xi_x\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_j\approx\frac{\Delta\xi}{x_{\underline{j}}-x_{\underline{j-1}}},\qquad \frac{u_{\underline{j}}-u_{\underline{j-1}}}{\Delta\xi}=\frac{u_{\underline{j}}-u_{\underline{j-1}}}{x_{\underline{j}}-x_{\underline{j-1}}}$$

这表面上如实际区域上的不等距差分，但的确有二阶截断误差，因此 INS 方程的 MT 格式为

$$\frac{u_{\underline{j}k}-u_{\underline{j-1},k}}{x_{\underline{j}}-x_{\underline{j-1}}}+\frac{v_{j\underline{k}}-v_{j\underline{k-1}}}{y_{\underline{k}}-y_{\underline{k-1}}}=0$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_{\underline{j}k}-u^0_{\underline{j}k}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^0_{\underline{j+1},k}u_{\underline{j+1},k}-u^0_{\underline{j-1},k}u_{\underline{j-1},k}}{2(x_{j+1}-x_j)}+\frac{\tilde{v}^0_{\underline{j},k+1}u_{\underline{j},k+1}-\tilde{v}^0_{\underline{j},k-1}u_{\underline{j},k-1}}{2(y_k-y_{k-1})}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[u^0_{\underline{j}k}\frac{u_{\underline{j+1},k}-u_{\underline{j-1},k}}{2(x_{j+1}-x_j)}+\tilde{v}^0_{\underline{j}k}\frac{u_{\underline{j},k+1}-u_{\underline{j},k-1}}{2(y_k-y_{k-1})}\right]+\frac{p_{j+1,k}-p_{jk}}{x_{j+1}-x_j}\\
&=\frac{1}{Re}\left[\frac{1}{x_{j+1}-x_j}\left(\frac{u_{\underline{j+1},k}-u_{\underline{j}k}}{x_{\underline{j+1}}-x_{\underline{j}}}-\frac{u_{\underline{j}k}-u_{\underline{j-1},k}}{x_{\underline{j}}-x_{\underline{j-1}}}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{y_{\underline{k}}-y_{\underline{k-1}}}\left(\frac{u_{\underline{j}k+1}-u_{\underline{j}k}}{y_{k+1}-y_k}-\frac{u_{\underline{j}k}-u_{\underline{j}k-1}}{y_k-y_{k-1}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

其中上标 0 表示第 n 层，上标 $n+1$ 略去；$\tilde{v}^0_{\underline{j}k}$ 是周围四点的平均值；v 的动量方程的差分格式类似．由于变换函数和未知量的导数都采用中心差分近似，以上 MT 格式仍有空间二阶截断误差，且对 $n+1$ 层而言，方程是线性的．

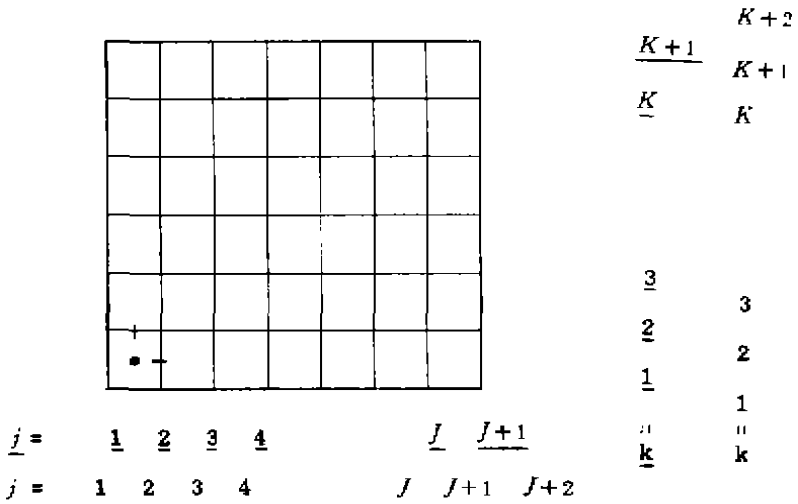

图 2　网格点标号的示意图 (ξ,η)
Fig.2　Mesh points in the ξ,η plane

求解 INS 方程时，每时间层必须满足连续性条件，为此我们采用了 Delta 型压力修正投影法，其中间步满足相容性条件且边界条件不需特殊处理，此方法对原差分格式保证精度 (见 [7])．压力 Poisson 方程采用 FISHPAK 中的广义循环约减快速求法，这样，每层离散散度大约 10^{-5}．为了证明格式的有效性，我们对 Re 为 100 、400 、1000 、5000 的驱动方腔流场进行了数值模拟，定常结果见 [8]，与前人结果非常吻合，而网格点数较少，大大节约了计算时间．

二、低 Re 的驱动长形腔内流动的数值模拟

为了了解驱动腔内流动的失稳和分叉等物理特性，对驱动长形腔内流场作了一些试算．首先，为了肯定方法的有效性，对 Re 较低的流场进行了数值模拟，试算了 Re 为 100 、400 、1000 、2000 的流场．布置网格时，x 、y 方向采用相同控制网格分布的参数，随 Re 上升，最小 $\Delta=\Delta x=\Delta y$ 从 1×10^{-2} 到 7×10^{-3}．采用时间相关法进行计算，当无量纲时间达到一定程度，流场收敛到定常状态．

维普资讯 http://www.cqvip.com

定常状态的全场等流线图依次在图 3(a)、(b)、(c)、(d) 中给出. 从图可看出占据腔的上、下两半的一、二级涡反向旋转、在腔中央形成剪切层，这正是与方腔流场的最大区别；此外，腔右、左下角出现三级涡，左边的稍大. 随 Re 增大，主涡涡心向左下移动，二级涡涡心往左上移动，三级涡增大；$Re = 2000$ 时，左上角偏下处出现与主涡反向的三级涡.

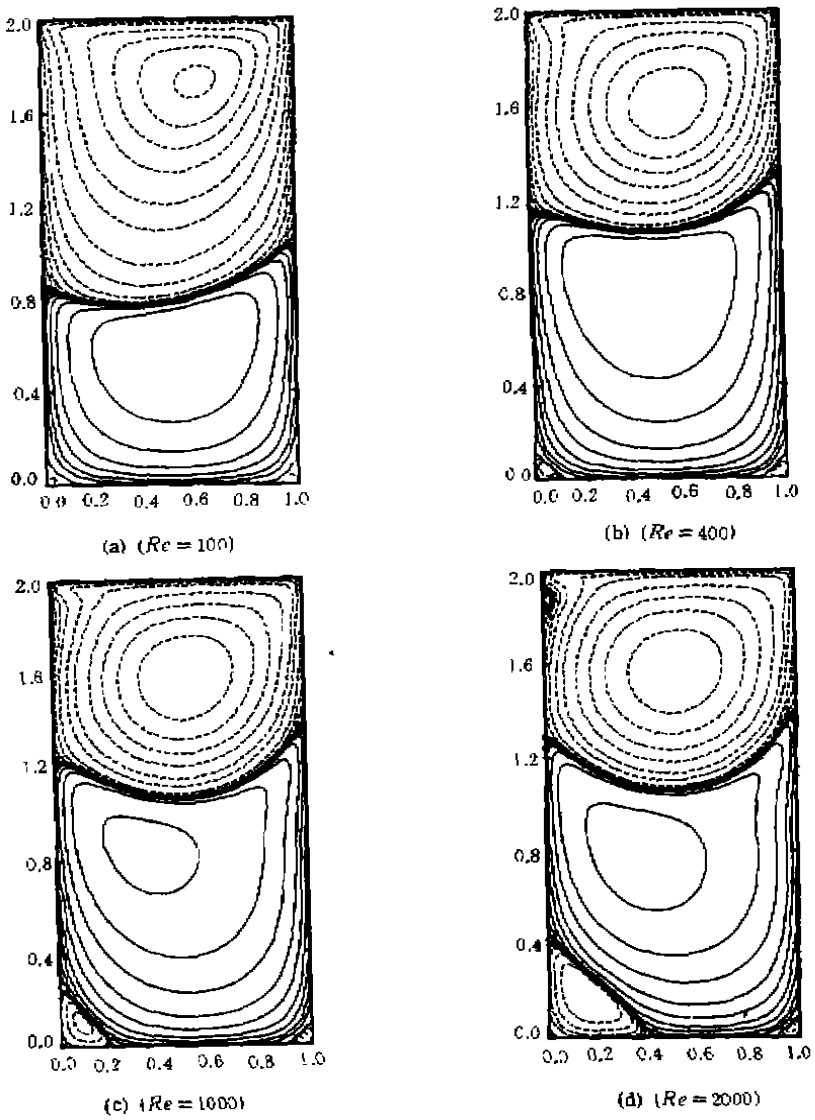

图 3 定常等流线
Fig.3 Steady-state streamlines

对定常流场的一些主要性质，我们与前人结果进行了比较. 表 1 给出定常时过腔中心垂直方向 u 的最大、最小值及位置、一、二级涡涡心的流函数值及位置与 Bruneau et al.[3] 结果的比较. 从表中可看出，两者非常相近. Bruneau 采用的网格为 128×256 或 256×512、而我们的网格只有 64×128、网格点数虽少、结果基本一致. 可见、采用

维普资讯 http://www.cqvip.com

合适的非均匀网格及较好的格式能用较少的网格点很好地模拟驱动腔内流场，即使在腔的中心附近，网格距虽然较大，但结果仍令人满意.

表 1

Table 1

Re	Present	Bruneau et al.[3]
100	−0.1993(1.4483), 0.00196(0.3438) −0.1041(0.6182, 1.7360) 0.791×10^{-3}(0.5485, 0.5979)	−0.1968(1.4531), 0.00195(0.3438) −0.1033(0.6172, 1.7344) 0.783×10^{-3}(0.5391, 0.5859)
400	−0.3297(1.2911), 0.0173(0.6075) −0.113(0.5486, 1.602) 0.893×10^{-2}(0.4277, 0.8320)	−0.3146(1.2578), 0.0178(0.5703) −0.1124(0.5547, 1.5938) 0.909×10^{-2}(0.4297, 0.8125)
1000	−0.3985(1.2178), 0.0257(0.5537) −0.1179(0.5295, 1.574) −0.0129(0.3569, 0.8248)	−0.3851(1.168), 0.0310(0.5) −0.1169(0.5273, 1.5625) 0.0148(0.3516, 0.7891)
2000	−0.4239(1.1894), 0.0380(0.4905) −0.1161(0.5295, 1.574) −0.0148(0.3842, 0.7685)	

三、 Re 为 5000 及 10000 的驱动长形腔的数值模拟

从上述计算可见，当 Re 增大时最好在所有剪切层附近加密网格，但为了简单，为了节约机时，这里先采用 48×96 的均匀网格，这与 [5] 一致，对流场进行初步试算，时间步长取 0.08. 当然，对于大 Re 的腔内流动，网格距取得过大可能会漏掉一些空间小尺度物理量的影响，所以，计算到无量纲时间 $T=1075$ 时，重新设置了网格，总网格点数保持不变，只是在 x 方向采用非均匀网格法布置网格，对边界层加密，最小的网格距约 7×10^{-3}.

将计算结果插值到非均匀网格上，取 $\Delta t=0.025$, 继续计算，当 $T=1630$(累计), 出现周期的渐近解，每个周期时间为 2.8 个无量纲时间单位. 每隔 14 步画一等流线图，这九个图依次在图 4 中给出，图 4(a) 与图 4(i) 完全一致，这显示了渐近周期状态的一个完整的循环过程. 流场的周期性主要表现以下三个方面：

(1) 一、二级涡之间的剪切层周期变化.

(2) 剪切层附近两个反向三级涡交替出现. 首先，二级涡右上角与右壁之间出现一个反向的三级涡，此涡逐渐增大并与主涡合并，成为主涡的一个突出部分并将二级涡的右上角隔离出来；过后，突出部分从主涡中撕裂开并逐渐变小、最后消失，而此上方的三级涡也重新与二级涡合并成一个整体.

(3) 腔左上角的三级涡周期变化.

从以上可看出，流场变化主要发生在剪切层及其附近，这说明长方形腔内流动中，上、下涡之间的剪切流的非稳定性起主导作用.

以上只是定性说明流场达到了周期状态，为了从定量上准确说明流场运动的周期性，引入参量：

第 n 步的总动能： $E^n=\sum_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\left[(u_{ij}^n)^2+(v_{ij}^n)^2\right]$

维普资讯 http://www.cqvip.com

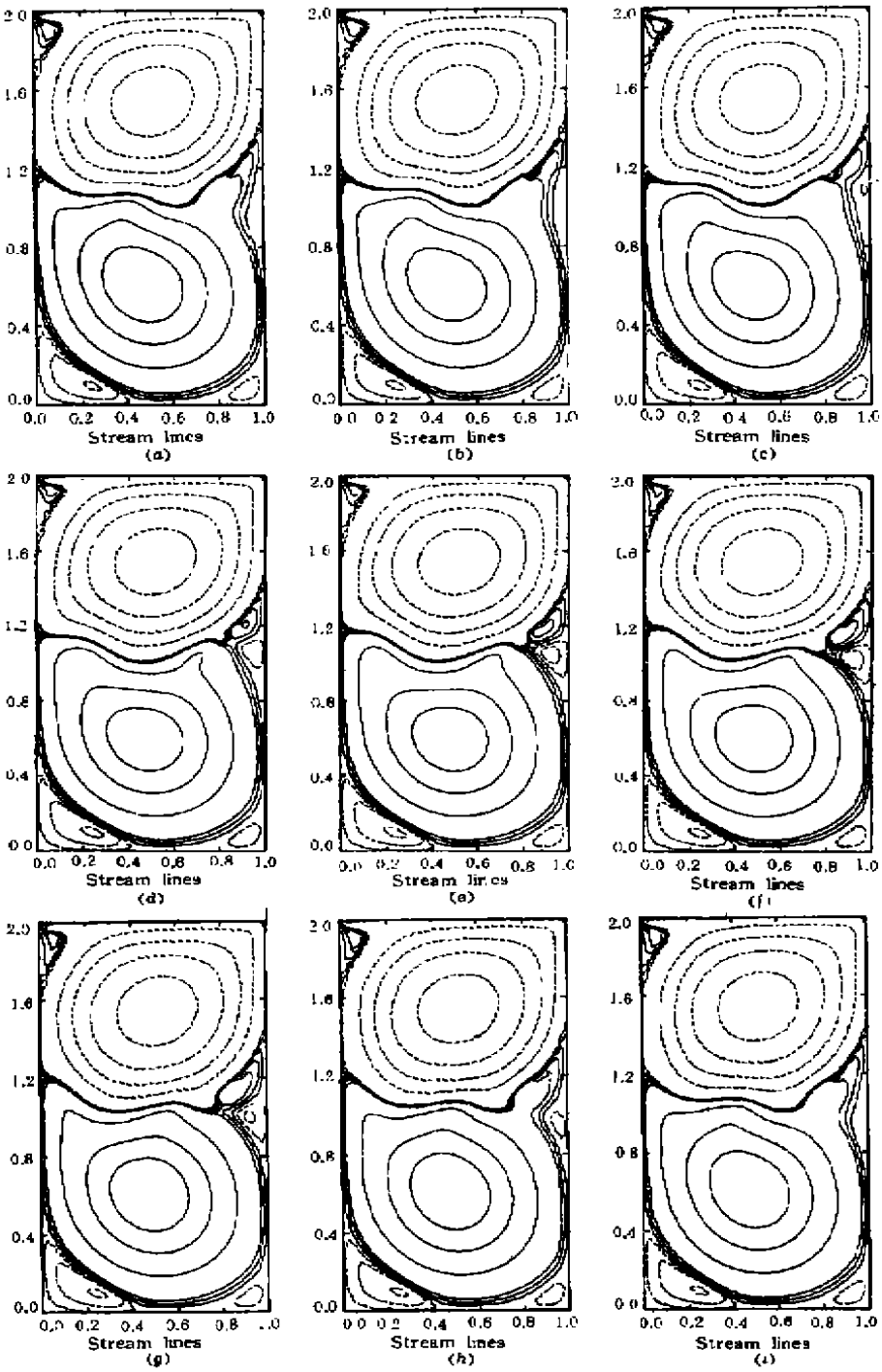

图 4 等流线分布的周期特征 ($Re = 5000$)
Fig.4 Periodic character of streamlines for $Re = 5000$

维普资讯 http://www.cqvip.com

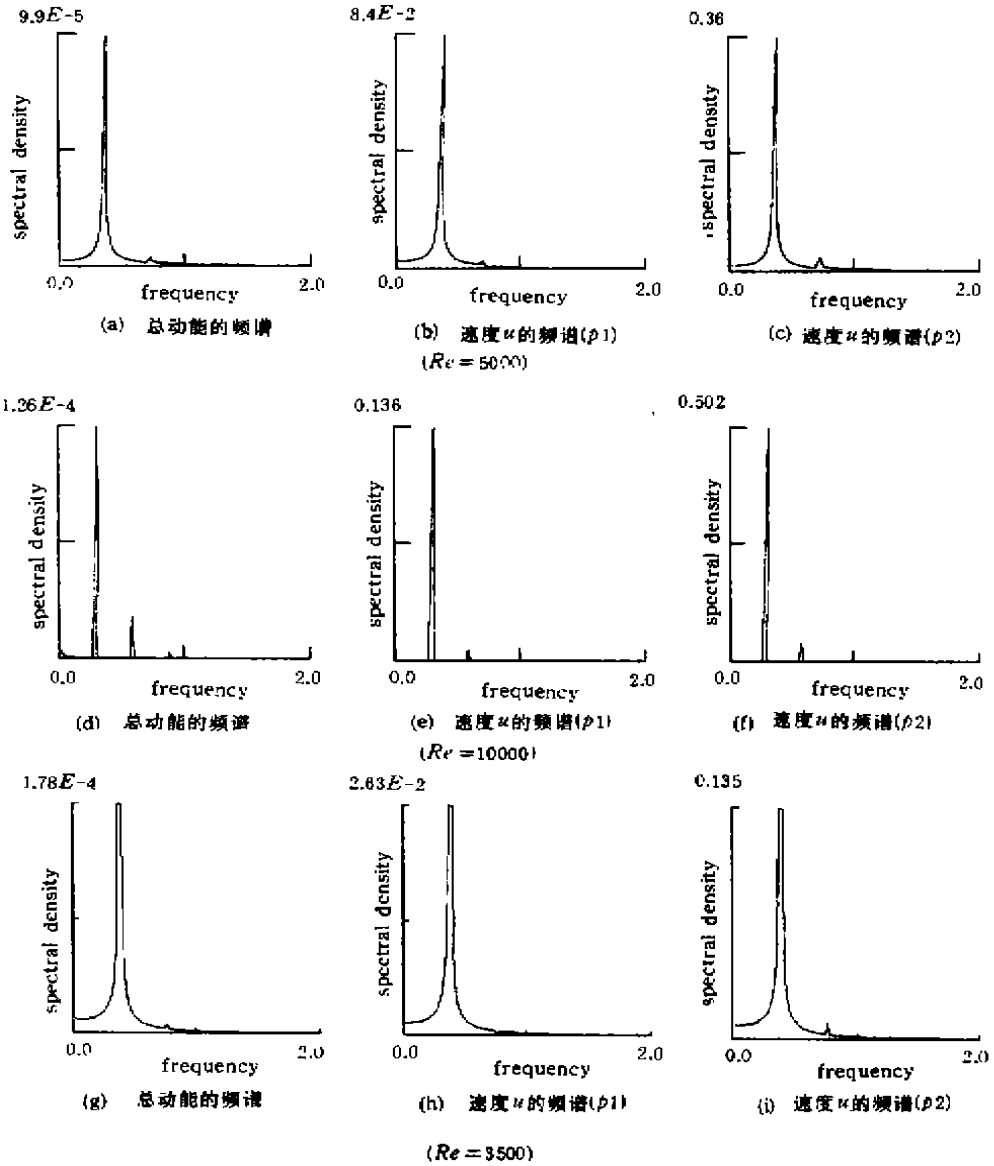

图 5 频谱分析

Fig.5 Spectral analysis

(a),(d),(g) frequency of global kinetic energy (b),(c),(e),(f),(h),(i) frequency of velocity u

第 n 步的总体相对误差：$e^n = \dfrac{\sum_{ij}(|u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| + |v_{ij}^n - v_{ij}^{n-1}|)}{\sum_{ij}(|u_{ij}^n| + |v_{ij}^n|)}$ 当 $T = 1630$ 时，这些参数出现周期变化.

我们对总动能作了谱分析，频谱信号在图 5(a) 中给出，从图中可看出只有一个基频并在频率 $0.357 \approx \dfrac{1}{2.8}$ 附近出现. 此频谱是针对整体数据而言，因而反应了所有

维普资讯 http://www.cqvip.com

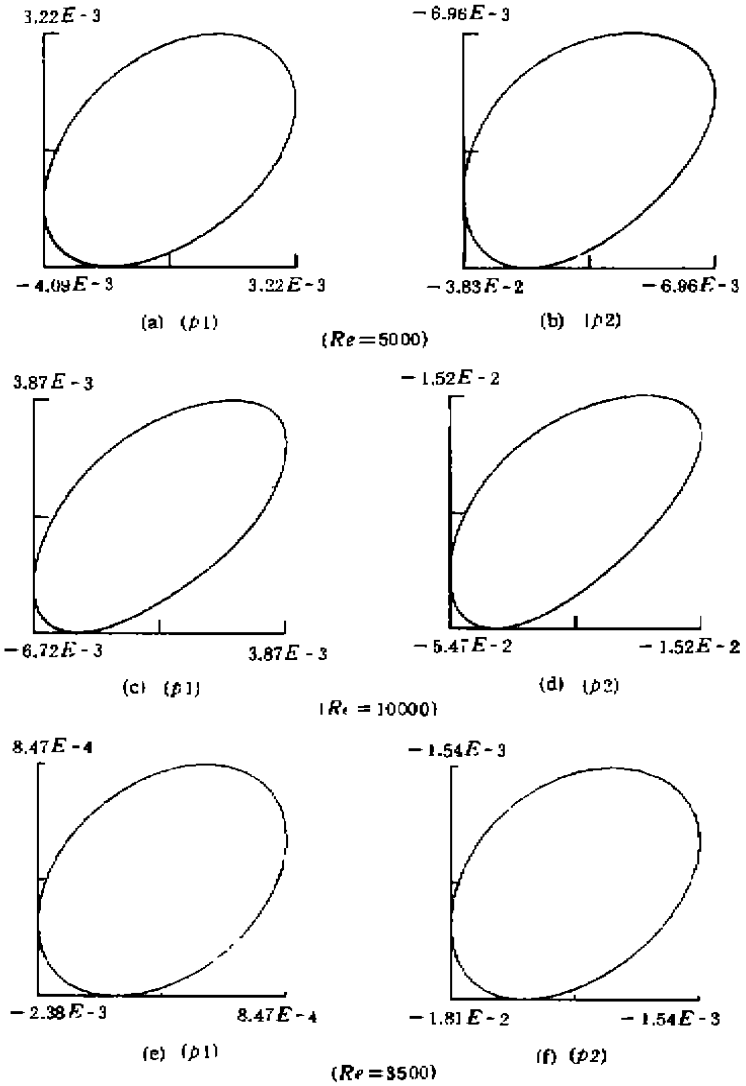

图 6 $[u(t), u(t+0.5)]$ 18 个周期
Fig.6 $[u(t), u(t+0.5)]$ 18 periods

网格的总体动力学性质.

此外，我们记录某些固定点的速度场. 因为剪切层对流动非定常过程的发展起重要作用，选取了其附近的两个点 $P1=(x,y)=(0.9293,1.021)$ 及 $P2=(0.1624,0.9375)$. 对点 $P1$ 及 $P2$ 的 x 方向速度分量 u 作谱分析，频谱信号分别在图 5(b), (c) 中给出. 这些信号只有一个基频且出现位置与总动能一致，这说明总动能及点 $P1$ 、 $P2$ 上的 u 是周期变化的. 当然，同一点不同时刻的速度 u 组成的二维曲线 $(u(t), u(t+0.5))$ 也能准确反应数据是否是周期的. $P1$ 、 $P2$ 的曲线 $(n(t), u(t+0.5))$ 分别见图 6(a), (b), 这些图像是封闭的曲线，这说明速度是周期变化的.

从以上这些定性和定量分析，不难判断出 $Re=5000$ 的流场的渐近状态是周期的.

维普资讯 http://www.cqvip.com

把 $Re=5000$ 的渐近周期解作为初值，网格及时间步长不变，模拟 $Re=10000$ 的数值流场. $T=1675$ 时流场出现周期变化，每个周期为 3.425 个无量纲时间单位. 这时三级涡的数量比 $Re=5000$ 时多且流场变化更为复杂. 总动能、$P1$ 及 $P2$ 上 u 的谱密度分布图分别见图 5(d), (e), (f), 它们都只有唯一的基频且在 $0.292\approx\frac{1}{3.425}$ 处出现. 点 $P1$ 、$P2$ 的曲线 $(u(t),u(t+0.5))$ 在图 6(c) 、(d) 给出，可见，$Re=10000$ 时流场达到了渐近周期状态.

四、$Re=3000$ 和 3500 的数值模拟以及 Hopf 分叉点的范围

从上述两节可看出 Hopf 分叉点出现在 Re 为 2000 与 5000 之间. 为了找到更准确的位置，对 Re 数在此范围的流场进行了搜索，发现 Re 在 3000 与 3500 时流场发生质变.

用第四节中的方法对 $Re=3000$ 的驱动长形腔流场进行数值模拟，流场收敛到定常状态. 在此基础上，将定常结果作为初值，增加 Re 到 3500, 计算到 $T=830$ 时，总体相对误差、总动能及点 $P1$ 、$P2$ 上 u 出现周期变化，每个周期为 2.625 个无量纲时间单位. 流场的周期性仍主要表现在剪切层及其附近. 同样，总动能、点 $P1$ 、$P2$ 上 u 的频谱只有一个基频且在 $0.38\approx\frac{1}{0.263}$ 附近出现，谱密度在图 5(g), (h), (i) 中给出；点 $P1$ 、$P2$ 的曲线 $(u(t),u(t+0.5))$ 也是一条封闭曲线，见图 6(e), (f); 这些特点都说明 $Re=3500$ 时流场达到渐近周期状态.

由此可见，Hopf 分叉点在 Re 从 3000 对 3500 之间，这比方腔出现得早，主要原因是驱动长形腔中上、下两个反向旋转的涡相互作用，在腔中部形成剪切层，这正是长形腔与方腔流动特征的最大区别. 由于剪切流对流场的非定常过程的发展起着重要作用，因此剪切层的产生使得流场的非稳定现象提早出现.

五、结　束　语

本文采用非均匀交错网格上的修正 Temam 格式以及压力修正投影法求解不可压 NS 方程，用光滑函数的坐标变换设置非均匀网格分布使格式在空间保持二阶精度. 对 Re 为 100 、400 、1000 、2000 、3000 、3500 、5000 、10000 的驱动长形腔内流场进行了数值模拟. $Re\le 3000$ 时，随计算时间的增加，流场能达到定常状态；而 $Re\ge 3500$ 时，流场最终出现的是渐近周期结果；这说明 Re 数在 3000 与 3500 之间出现 Hopf 分叉点.

参　考　文　献

1 Ghia U, Ghia KN, Shin CT. High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J Comput Phys*, 1982, 48: 387–411

2 Gustafson K, Halasi K. Vortex dynamics of cavity flows. *J Comput Phys*, 1986, 64: 279–319

3 Bruneau C, Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys*, 1990, 89: 389–413

4 Gustafson K and Halasi K. Cavity flow dynamics at higher Reynolds number and higher aspect ratio. *J Comput Phys*, 1987, 70: 271–283

维普资讯 http://www.cqvip.com

5 Goodrich JW, Gustafson K, Halasi K. Hopf brifurcation in the driven cavity. *J Comput Phys*, 1990, 90: 219–261

6 Shen J. Hopf brifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow. *J Comput Phys*, 1991, 95: 228–245

7 黄兰洁，伍亚丹. 不可压 Navier-Stokes 方程的隐式投影法. 计算数学，1993, 1:77–89

8 伍亚丹，黄兰洁. 非均匀交错网格上的 Temam 法及驱动方腔流动的数值模拟. 计算物理，1994, 11(2)

9 Agrawal AK, Peckover RS. Nonuniform grid generation for boundary-layer problems. *Computer Phys Comm*, 1980, 19: 171–178

NUMERICAL SIMULATION OF INSTABILITY IN DRIVEN RECTANGULAR CAVITY FLOW

Wu Yadan Fu Dexun Huang Lanchieh

(*Computing Center, Institute of Mechanics, Computing Center, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080, *China*)

Abstract Numerical simulation is reported for the two-dimensional driven cavity flow with aspect ratio two. Calculation has been performed for Reyonld number from 100 to 10000 on nonuniform staggered grids with the modified implicit Temam scheme and pressure correction method. When $Re \leq 3000$, steady-state solutions have been obtained; when $Re \geq 3500$, periodic asymptotic solutions have been obtained and verifed with spectral analysis. It is shown that Hopf bifurcation occurs between $Re = 3000$ and 3500.

Key words driven rectangular cavity flow, modified implicit Temam scheme, periodic asymptotic solution