维普资讯 http://www.cqvip.com

一维定常泥石流的数学模型

范 椿
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

提要 根据泥石流在山坡斜面的长度 (L) 远大于泥石流横截面的特征长度 (H_0)，对连续方程，运动方程和 Bingham 模型的本构方程进行量级比较，忽略 H_0/L 量级的量，推导出控制一维定常泥石流运动的微分方程．本文方法可应用于推导非定常一维泥石流的数学模型．

关键词 一维定常泥石流，Bingham 模型，泥石流

以往对泥石流的研究，多采取地理学专家的防止和控制，采用观察现象、野外测量、实验模拟、总结经验等方法，有很大的实效．由于泥石流是一种极其复杂的自然现象，在对泥石流形成机理的认识、泥石流各种物理参数计算、泥石流的防治工程等方面，仍然存在许多难以解决的问题．近几年，苏联、日本、美国正在努力发展模拟泥石流运动的数学方法．把地理科学从定性研究深入到定量的研究．我们也开展了这方面的研究．

一维泥石流都发生在山坡上，我们将它看成为流体沿斜面的流动．采用直角坐标系，沿斜面为 x 轴，与斜面垂直向上为 y 轴，坐标原点在斜面上．g 为重力，斜面与水平面之夹角为 α．

为了进行量级比较，我们引进下列无量纲量

$$\left.\begin{aligned} &x=\bar{x}/L,\ y=\bar{y}/H_0, v_x=\bar{v}_x/v_0\\ &v_y=(\bar{v}_y/v_0)(L/H_0), p=\bar{p}/\rho v_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 v_x, v_y 分别是沿 x、y 方向的速度分量，上标 "—" 表示相应的有量纲量．p 是压力，L 是斜面的总长．v_0, H_0 分别是在 $x=x_0$ 处的速度 (x 方向的速度分量) 和流体高度，其无量纲坐标如图 1 所示．

下面给出一维定常泥石流的基本方程．

连续方程

$$\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y=0 \tag{2}$$

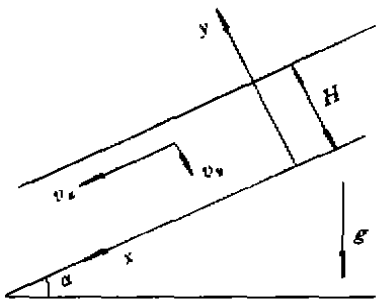

图 1 坐标简图

定常运动方程 [1]

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho v_0^2}\cdot\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{L}{H_0}\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\frac{H_0^2}{L^2}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho v_0^2}\cdot\left(\frac{H_0}{L}\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}\right) \tag{4}$$

其中 T_{xx}, T_{xy}, T_{yy} 为泥石流流体的偏应力张量分量，有量纲的量．

本构方程

考虑 Bingham 模型的本构方程 [1]．

$$\left.\begin{aligned} &T_{ij}=\left[\mu+\tau_y/\sqrt{1/2A_{st}A_{ts}}\right]A_{ij}\\ &\frac{1}{2}T_{st}T_{ts}\geq\tau_y^2\\ &A_{ij}=0,\quad \frac{1}{2}T_{st}T_{ts}\leq\tau_y^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 μ 为塑性黏度，τ_y 为屈服应力，A_{ij} 是 Rivlin-Ericksen 张量的分量，其表达式

$$\left.\begin{aligned} A_{xx}&=2(v_0/L)(\partial v_x/\partial x)\\ A_{yy}&=2(v_0/L)(\partial v_y/\partial y) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$A_{xy}=(v_0/H_0)\left[(\partial v_x/\partial y)+(H_0^2/L^2)(\partial v_y/\partial x)\right] \tag{7}$$

对于泥石流的具体情况

$$L>>H_0 \tag{8}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

则 (7) 式可简化为

$$A_{xy}=(v_0/H_0)(\partial v_x/\partial y) \tag{9}$$

将 (6) 、 (9) 式代入 (3) 式中的黏性项

$$\frac{1}{\rho v_0^2}\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{L}{H_0}\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\right)=\frac{\mu L}{\rho v_0 H_0^2}\left(2\frac{H_0^2}{L^2}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

经量阶比较可知，方程式 (3) 中的 $\partial T_{xx}/\partial x$ 项可以忽略. 上述黏性项可简化为

$$\left[(L/H_0)/Re\right](\partial v_x/\partial y)$$

其中

$$Re=\rho v_0 H_0/\mu \tag{10}$$

是 $x=x_0$ 处的雷诺数. 在运动方程 (3) 式中，如果 $Re>>L/H_0$ 则黏性项可以忽略. 如果 $Re<<L/H_0$，则惯性项可以忽略. 本文考虑一般情况，即 Re 和 L/H_0 是同一数量级.

下面考虑方程 (4) 式的黏性项

$$\frac{1}{\rho v_0^2}\left(\frac{H_0}{L}\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}\right)=\frac{\mu}{\rho v_0 L}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+2\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$
$$=(H_0^2/L^2)\left[(L/H_0)/Re\right](\partial v_x/\partial y+2\partial v_y/\partial y)$$

此式和方程 (4) 式中的惯性项是同一个数量级，和 (4) 式中的重力项和压力项相比都可以忽略. 方程 (4) 式可简化为

$$gH_0\cos\alpha/v_0^2=\partial p/\partial y$$

在自由面处，即 $y=H(\overline{H}/H_0)$ 时，$p=p_0$(大气压)，其中 $\overline{H}$ 是在 $\overline{x}$ 处的流体高度，H 为相应的无量纲量. 所以

$$p=p_0+(gH_0\cos\alpha/v_0^2)(y-H) \tag{11}$$

将 (11) 式代入 (3) 式，并采用一维水力学的简化方法 [2,3]，即用 v_x 在 y 方向的平均值 $v(x)$ 代替 (3) 式中的惯性项

$$v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{L}{\rho v_0^2 H_0}\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \tag{12}$$

将 (6) 、 (7) 进行量级比较后代入 (5) 式，则本构方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}&T_{xy}=\tau_y+\mu(v_0/H_0)(\partial v_x/\partial y)\\&\quad\text{当}\quad\frac{1}{2}T_{xy}T_{yx}\geq\tau_y^2\ \text{时}\\&\partial v_x/\partial y=0,\ \text{当}\ \frac{1}{2}T_{xy}T_{yx}\leq\tau_y^2\ \text{时}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

采用一维水力学的简化方法可将定常的连续方程简化为 [2,3]

$$Q=vH \tag{14}$$

其中 Q 为流量，是一无量纲的常数.

方程 (12) 、(13) 、(14) 是经简化后的基本方程. 下面将根据基本方程推导出控制一维定常泥石流运动的微分方程.

其边界条件是

(1) 在斜面上速度无滑移，在 $y=0$ 处

$$v_x=0 \tag{15}$$

(2) 在自由表面，剪切应力为零，在 $y=H$ 处

$$T_{xy}=0 \tag{16}$$

(3) 在开始截面处，y 方向的平均值为已知，在 $x=x_0$ 处

$$v(x)=1 \tag{17}$$

方程 (12) 、 (13) 和边界条件 (15) 、 (16) 的解是

$$\left.\begin{aligned}v_x=&\frac{ReH_0}{L}\left[\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}\right.\\&\left.-v\frac{\partial v}{\partial x}\right]\left(\xi y-\frac{y^2}{2}\right)(\text{当}\ \xi\geq y\geq 0)\\v_x=&\frac{ReH_0}{L}\left[\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}\right.\\&\left.-v\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\xi^2}{2}\quad(\text{当}\ H\geq y\geq\xi)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中 ξ 是液体状态和固体状态的交界面

$$\xi=H-\frac{L\tau_y}{\rho v_0^2 H_0}\Big/\left[\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{19}$$

将速度分布表达式 (18) 从 0 到 H 积分可得流量

$$Q=vH=\int_0^H v_x\mathrm{d}y=\frac{ReH_0}{L}\left[\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}\right.$$
$$\left.-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\xi^2}{2}\left(H-\frac{\xi}{3}\right)$$

将 (19) 式的 ξ 代入上式得

$$\frac{QL}{ReH_0}G^2=\frac{H^3}{3}G^3-\frac{H^2}{2}G^2\frac{L\tau_y}{\rho v_0^2 H_0}+\frac{1}{6}\left(\frac{L\tau_y}{\rho v_0^2 H_0}\right)^3 \tag{20}$$

其中

$$G=\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x} \tag{21}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

要解方程 (20) 还比较复杂，下面考虑一些特殊情况，便于有个数量级概念.

(1) $(L/H_0)(\tau_y/\rho v_0^2) << 1$，忽略其三阶项，即方程 (20) 中的最后一项可以忽略，将 (21) 式代入 (20) 式，经简单计算可得

$$v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{gH_0\cos\alpha}{v_0^2}\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}-\frac{L}{ReH_0}\frac{3v}{H^2}-\frac{L}{\rho v_0^2H_0}\frac{3\tau_y}{2H} \tag{22}$$

此式与 R.C.MacArthur 等 [4] 所用的基本方程一致. 方程 (22) 式也可写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=v^2\left[\frac{gL\sin\alpha}{v_0^2}Q^2-\frac{3Lv^3}{ReH_0}-\frac{3L\tau_yvQ}{2\rho v_0^2H_0}\right]\Big/\left\{Q^2\left[v^3+Q(gH_0\cos\alpha/v_0^2)\right]\right\} \tag{23}$$

写成有量纲形式如下：

$$x=x_0+\int_{v_0}^{\bar v}\left\{\left[\rho\bar Q^2\left(\bar v^3-g\cos\alpha\bar Q\right)\right]\right\}\Big/\left[\bar v^2\left(\rho g\sin\alpha\bar Q^2-3\mu\bar v^3-3\tau_y\bar v\bar Q/2\right)\right]\Big\}\mathrm{d}v \tag{24}$$

方程 (23) 及边界条件 (17) 可用 Runge-Kutta 法进行数值解，也可以直接用 (24) 式的数值积分表达式.

(2) 等速流动的情况. 即 $v(x)$ 为常数，根据连续方程 (14) 可知 $H(x)$ 为常数，如此，(21) 简化为

$$G=gL\sin\alpha/v_0^2 \tag{25}$$

将 (25) 式代入 (20) 式，经整理后，有量纲形式如下：

$$\bar Q=\left(\rho g\sin\alpha\bar h^3/3\mu\right)\left[1-\frac{3\tau_y}{2\rho g\sin\alpha\bar h}-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_y}{\rho g\sin\alpha\bar h}\right)^3\right] \tag{26}$$

A. И. Бабчин 等 [5] 的文章有明显的错误，经改正后与本文 (26) 式一致.

本文方法可应用于推导非定常一维泥石流的数学模型.

本文得到中国科学院力学研究所所长择优基金项目“环境和灾害力学”的资助.

作者感谢中国科学院成都山地灾害与环境研究所章书成同志的有益建议和讨论.

参 考 文 献

[1] Schowalter W R. Mechanics of non-Newtonian fluids. Oxford: Pergamon Press, 1978

[2] A. B. 别洛娃. 某些气体动力学问题和水力学问题的比拟. 北京：科学出版社，1956

[3] 华东水利学院编. 本力学. 北京：科学出版社，1979

[4] MacArthur R C, Schamber D R, Hamilton D L, West M H. Generalized methodology for simulating mud flow. Presented at Water Forum 86, ASCE, Aug. 1986

[5] Бабчин А И, Леви С М. Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии, 1972, Том, 17, Выпуск 5, 321-324

(本文于 1992 年 6 月 21 日收到)

(19)

52-55, 47

轴对称变厚度 Reissner 圆环板的初参数积分方程及应用

黄 骏 刘龙泉

(重庆建筑工程学院，重庆 630045)

0302

提要 本文导出了变厚度 Reissner 圆环板一般轴对称问题的一组初参数积分方程，研究了初参数的确定和特殊情况下的应用，给出了算例并与准确解进行了比较.

关键词 轴对称，变厚度，圆环板，初参数，积分方程

结构力学

1. 基本关系