

平面槽流的二次失稳分析

750-758

是勋刚 陈启生

TV131.6

(北京大学力学系湍流国家重点实验室, 北京 100871)

摘 要 本文以得自二维直接数值模拟的稳定的二维平衡态解, 或将其中的扰动部分乘一小的系数所得到的准定常解取作基本流, 考察它们对三维小扰动的不稳定性。导出了只包含二个未知函数的封闭的扰动运动方程组, 与齐次边条件一起构成了一个常微分方程组的特征值问题。采用 Chebyshev- τ 方法将问题转化为一个代数特征值问题。对三维基本波与亚谐波失稳两种情形数值求解获得了三维扰动增长率随二维扰动幅值、雷诺数与展向波数的变化关系。结果表明在各种情况下三维扰动的增长率都远高于二维 TS 波的增长率, 较好地解释了实验观测到的槽流转换现象。

关键词 平面槽流, 转换, 拟序结构, 流动稳定性, 二次失稳

水力学

1 引 言

对于平面槽流问题, Rayleigh(1880)的无粘线性稳定性理论无法说明速度剖面不带拐点的平面 Poiseuille 流为什么会失稳。Orr(1907)和 Sommerfeld(1908)提出的有粘线性稳定性理论正确地预测了在转换的初期会出现 Tollmien-Schlichting 波的现象, 但仍无法解释湍流的转换。因为用 OS 方程预测的临界雷诺数 $Re_{crit} = 5772.22$, 当 $Re < Re_{crit}$ 时, 所有的扰动都将衰减。而实际的槽流可在低至 $Re \approx 1000$ 左右时即发生转换; 其次, OS 方程所给出的 TS 波的增长率远低于实际观测的值。预测的最大增长率发生在 $Re = 48000$, $\alpha = 0.79$ 时, 其值只有 $\sigma_{max} = 0.0076$ 。按此增长率, 如扰动幅度要放大 10 倍, 需要经过的无量纲时间 $t = 300$, 亦即一个在槽中心的流体质点必须要走大约 150 倍槽宽的距离, 而实际的转换过程仅在很短的距离内完成了。如在层流 Poiseuille 流之上引入三维扰动, 也于事无补。因为按 Squire(1933)定理, 任何一个三维扰动波都对应于一个雷诺数较低的二维扰动波, 因此二维扰动更易失稳, 只需研究二维扰动就已足矣。

对于 OS 理论与实际的不符, 人们很自然地归咎于忽略了非线性效应。因为如考虑非线性效应, 则原来稳定的扰动波就不一定稳定, 原来按线性规律增长的扰动也不一定按线性规律无限增长。从 50 年代开始就有一些学者从事于有限幅值扰动的非线性稳定性研究, 如: Meksyn & Stuart(1951), Stuart(1960), Watson(1960), Zahn 等(1974), Herbert(1976)和 Zhou(1982, 1991)。非线性稳定性理论基本上都限于二维情形。这首先是因为线性理论指出最危险的扰动是二维的, 其次, 二维问题远比三维问题易于处理也是一重要原因。非线性稳定性理论的结论可归纳为在 (Re, α, E) 空间中存在一中性曲面, 其中 E 是扰动波的能量。Herbert(1976)得到的中性曲面示意在图 1 中。中

本文于 1994 年 10 月 20 日收到。国家自然科学基金与高等学校博士学科点专项科研资助项目。
第二作者目前工作单位: 中国科学院力学研究所。

性曲面由整个 $E=0$ 的平面与在上半空间 $E>0$ 中的包形曲面组成。这两部分的交线就是从 OS 方程得到的线性中性曲线。如初始流动状态落在曲面内,扰动将增长,如在曲面外,扰动则衰减。曲面的上半分支上的每一个点都代表一个稳定的平衡态解,下半分支则代表不稳定的平衡态解。在 $E=0$ 平面上线性中性曲线以外的部分也是稳定平衡解,在曲线内部则是不稳定的平衡解。包形曲面在 $E=0$ 平面上的投影所包围的区域要比线性中性曲线大很多。包形曲面的鼻尖点所对应的临界雷诺数 $Re_{crit} = 2935$,大大低于线性理论所给的值而更接近于实际。但非线性稳定性理论仍不能解释转捩,因为即使 $Re > 2935$,流动总是或者渐渐趋近某个二维平衡态解,相当于某个周期性的二次流,或者衰减回到层流 Poiseuille 流,都不能发展为湍流。但是平衡态解提供了一个不同于 Poiseuille 流的新的二维流态,它可能为新的不稳定性准备了条件。我们的另一篇文章(1991)中报导了我们用二维直接数值模拟的方法求得对应于中性曲面的上分支上各点的稳定的二维平衡态解的方法与结果。

局限在二维框架内,不论理论多么精密,都无法解释槽流的转捩。实验中早已发现,三维扰动的出现是转捩的关键阶段,一旦三维扰动出现,流动很快就形成复杂的流动结构,并迅速发展成湍流。Klebanoff 等(1962)首先在平板边界层的转捩实验中发现,一旦二维 TS 波的幅值达到自由气流速度的大约 1% 的阈值,三维扰动就快速增长,形成在 x_1, x_2 两个方向都有周期性的 Λ 型涡阵列,见图 2(a),流向波长与基本 TS 波一样,后人称这种三维结构为 K 型转捩路径。后来 Kachanov & Levchenko(1984)与 Saric & Thomas(1984)又在边界层转换的流动显示中发现了另一类三维扰动图型。相邻两排 Λ 型涡交错排列,流向波长是 TS 波的两倍,被称为亚谐波型二次失稳。依赖于初始 TS 波幅值的不同,其展向波长与流向 TS 波的波长之比又可能出现较宽与较窄的二种不同的情况,见图 2(b)与(c),分别被称为 C 型与 H 型的三维转捩路径。上述三种 Λ 型涡三维结构也在平面槽流中为 Kozlov & Ramazanov(1984)与 Nishioka(1984)所发现。

关于三维扰动的理论解释,比较成功的有 Craik(1971)的共振三波理论和 Herbert(1983)的二次失稳理论。Craik 利用 Raetz(1959)的共振概念和 Benney & Lin(1960)的三波模型,假设有一个二维 TS 波和二个流向周期加倍展向互相对称的斜波,它们每一个波都满足 OS 方程,且有相同的相速度。这三个波因各波之间的相互作用产生一个“强迫力”项而得到增强,形成共振。对每一个 Re 都只存在一个特别的展向波数才满足共振条件,从而提供了一个波数选择的机理。Herbert(1983)的二次失稳理论则是考虑一个二维平衡态(他用的实际上是一个扰动能量较低的不稳定平衡态)对三维小扰动的线性不稳定性。

本文采用 Herbert 的二次失稳理论的基本思想,但所取的基本流是得自二维直接数值模拟的稳定平衡态解,或者将平衡态解中的扰动部分乘一小的常数系数,使其幅值得到调整。

选择的基本流首先必须不同于层流 Poiseuille 流,否则,对三维扰动的线性稳定性问题已由 Squire 定理解决,但解释不了转捩问题。所以必须取一个经过二维 TS 波的非线性发展以后变了形的二维流态作二次失稳分析的出发点。其次,按一般的稳定性理论原则,这个基本流应是 NS 方程的定常解。所以很自然地到非线性中性曲面上去找。Herbert 取的是下分支的不稳定平衡态,而我们认为这一流态实际上几乎不可能出现。Orszag & Patera(1983)取的是上分支的稳定平衡态解。但这一流态的扰动幅值往往高达百分之十几,远高于实验观察到的开始出现三维扰动时的二维扰动幅值。特别是亚谐波型三维扰动结构只发生在二维扰动幅值低于 1% 的情况下。实际情形最可能发生的是在从无限小的二维 TS 波演化到平衡态解中间的某一阶段就开始出现三维扰动。这个中间阶段不是定常二维 NS 方程的准确解,但如果它的二维扰动增长率或衰减率远低于三维扰动的增长率,我们仍可认为它是准定常的。其次,这个中间状态在给定的 (Re, a) 值下也不是唯一确定的,可

有很大的随意性,例如从不同的初始 TS 波幅值出发就可经过不同的中间状态,尽管最终收敛于同一个平衡态解。在本文中,为确定起见,我们从真正的稳定平衡态解出发,当需要研究二维扰动幅值较低时的二次失稳时,就将其中的扰动部分即 $k_1 \geq 1$ 的各项,都乘以一个小的常数。以此代表有任意二维扰动幅值的中间状态,取作二次失稳分析的基本流。

2 数学提法与数值方法

取以 TS 波的相速度运动的坐标系,并取得自二维直接数值模拟的二维平衡态解或经过扰动幅值调整的准平衡解作为基本流,

$$V_0(x, z) = \sum_{n=-N}^N \begin{bmatrix} U_n(z) \\ 0 \\ W_n(z) \end{bmatrix} \exp(inax) \quad (1)$$

其中 α 为 TS 波的波数。假定它准确或近似地满足定常二维 NS 方程组。假定三维小扰动具有简谐波的形式

$$v_{3D} = \varepsilon \exp[\sigma t + i(a_0 x + \beta y)] v(x, z) = \varepsilon \exp(\sigma t + i\beta y) \sum_{n=-N}^N v_n(z) \exp[i(n\alpha + a_0)x] \quad (2)$$

根据 Floquet 理论,由于基本流在 x 方向具有波长为 $\frac{2\pi}{\alpha}$ 的周期性,扰动流中的速度矢量 $v(x, z)$ 也可以有相同的周期性,因此可展开成 Fourier 级数形式。其 a_0 为一常数,当 $a_0 = 0$ 时,三维扰动与 TS 波有相同的流向波长,表征基本波失稳;当 $a_0 = \alpha/2$ 时,三维扰动的流向波长为 TS 波的二倍,表征亚谐波失稳。

将基本流与三维扰动的叠加代入 NS 方程组,求旋度消去压力 p ,得扰动涡量方程,对头两个分量方程再求一次旋度,将第三个分量方程对 y 求一次导数,并利用连续方程消去方程中的速度分量 v ,对 ε 进行线性化以后得扰动速度分量 u 与 w 所满足的方程组如下:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\sigma - \frac{1}{Re} (D^2 - \beta^2 - \alpha_n^2) \right] (D^2 - \beta^2 - \alpha_n^2) w_n - D \{ i\alpha_n [2(U_x u)_n + 2(U_x w)_n - D(Uw)_n] \\ & + D[(W_x U)_n - (Ww_x)_n] \} - (\beta^2 + \alpha_n^2) [(Uw_x)_n + (uW_x)_n + D(Ww)_n] = 0 \\ & \left[\sigma - \frac{1}{Re} (D^2 - \beta^2 - \alpha_n^2) \right] [(\alpha_n^2 + \beta^2) u_n - i\alpha_n D w_n] + \alpha_n^2 [U(u_x + w_x)]_n \\ & - i\alpha_n D [W(u_x + w_x)]_n + \beta^2 [i\alpha_n (V_x)_n + (Wu_x)_n + (wU_x)_n] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\alpha_n = n\alpha + a_0$, $D = \frac{d}{dz}$, $(uw)_n$ 表示 u 与 v 的卷积中第 n 个 Fourier 分量的系数。这是一组关于 u_n 与 w_n 的封闭的常微分方程组,其中对 w_n 的最高微商阶数是四阶,对 u_n 是二阶。与此相匹配,有关于 w_n 的边条件四个,关于 u_n 的边条件二个,即

在壁面上,

$$z = \pm 1, \quad u_n = w_n = Dw_n = 0 \quad (4)$$

上述方程组与边条件构成了一个常微分方程组的特征值问题。为了将它化成代数特征值问题,我们采用 Chebyshev- τ 方法。即令

$$\left. \begin{aligned} u_n(z) &= \sum_{k=0}^K u_{nk} T_k(z) \\ w_n(z) &= \sum_{k=0}^K w_{nk} T_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $T_n(z)$ 为 Chebyshev 多项式。将它们代入方程组(3),对每一个 n 得到两组方程组,将第一组中最后四个方程与第二组中最后两个方程去掉,代之以边条件(4),就得到封闭的代数特征值问题,最后采用 QR 算法求矩阵特征值。

3 结果分析

首先讨论 $\alpha_0 = 0$ 的基本波失稳情形,它对应于 K 型三维转捩路径。图 3 显示了当给定 $\alpha_1 = 1.25$, Re 数分别取 3250 与 4000,且基本流取相应的平衡态解时,三维扰动的最大增长率随展向波数的变化。由图可见,二次失稳对展向波数并没有很鲜明的选择性。图 4 显示了当给定 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.25$,并采用一固定的对应于 $Re = 3250$ 时的平衡态解作基本流时,三维扰动增长率随 Re 数的变化。在 $Re \neq 3250$ 时,这个基本流必定要发展或衰减,但其变化速度与求出来的三维扰动增长率相比很小,故可看成准定常的。从图看出,当 $Re \approx 500$ 时,增长降到 0,当 $Re \rightarrow \infty$ 时,似乎趋向一有限常数 $\sigma_\infty = 0.11$,对应于一个无粘增长率。图 5 画出了在给定 $\alpha_1 = 1.25$ 时在 (Re, α_2) 平面上的增长率等值线图。其最大值约为 $\sigma_{max} = 0.13$,比二维线性理论的最大增长率大了约 17 倍,可见三维扰动增长率远高于二维扰动的增长率。从图上还看出 $Re_{crit} \approx 400$,对应的展向波数 $\alpha_2 = 2$ 左右,这大体上也是在各个 Re 数时对应于最大增长率的展向波数。为显示三维不稳定波的空间结构,图 6 画出了在 $Re = 3250$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.25$ 时的展向峰谷交替的结构。图 7 显示了三维波的法向变化,其中 a, b, e, f 四条曲线分别对应于图 6 中四个不同的展向位置。由图可见,扰动最强的地点距壁面较近。但与 TS 波的法向变化相比,最大值的位置已略向中心偏移。实际发生 K 型转捩时的二维扰动幅值可能远小于平衡态时的值,例如在 $Re = 3250$, $\alpha_1 = 1.25$ 时,平衡态的扰动幅值约为 13.5%,远高于大约为 1%左右的实际值。为研究二维波幅较小时的 K 型二次失稳,让平衡态解中的扰动部分乘上一个小的系数后取作基本流。图 8 显示了当二维扰动波幅分别为 $A_0 = 12.5\%, 8\%, 4\%$ 和 2% 时三维增长率随展向波数的变化规律。显然可见,随二维波幅的减小,三维增长率也随之下降。尽管如此,三维扰动波的增长率仍远高于二维 TS 波的增长率。因此一旦出现三维扰动,向湍流转捩的过程就大大地加速。

其次,讨论 $\alpha_0 = \alpha/2$ 时的亚谐波型失稳情形。实验观察表明亚谐波型失稳只出现在二维扰动幅值较小的情况下。故只能采用扰动幅值调整以后的平衡态解作基本流。图 9 表示当二维扰动幅值分别为 2%,1%和 0.5%,在 (Re, α_2) 平面上的三维扰动增长率等值线图。显然,随着二维扰动强度的增加,三维扰动增长率显著增加,且不稳定的展向波数范围的宽度也随之增加。即使二维扰动幅值为 0.5% 时,三维亚谐波型扰动的最大增长率同样也远高于二维 TS 波的增长率。

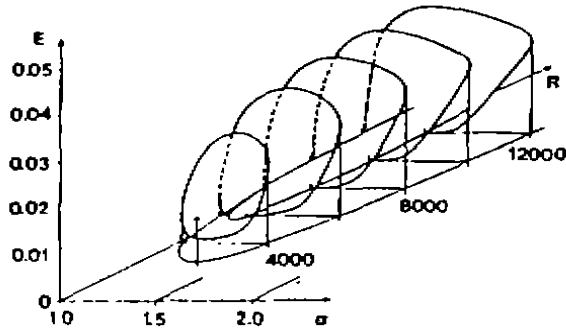


图1 Herbert(1976)给出的非线性中性曲面。

“鼻尖”对应于 $Re_{crit} = 2935$, $\alpha = 1.32$

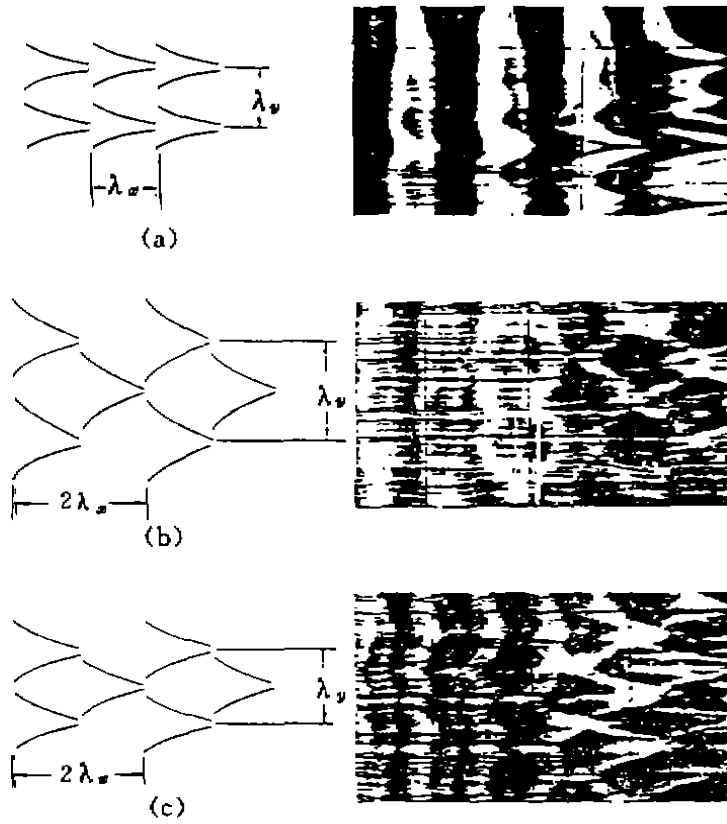


图2 三种A形涡的图型(a) K型, (b) C型, (c) H型

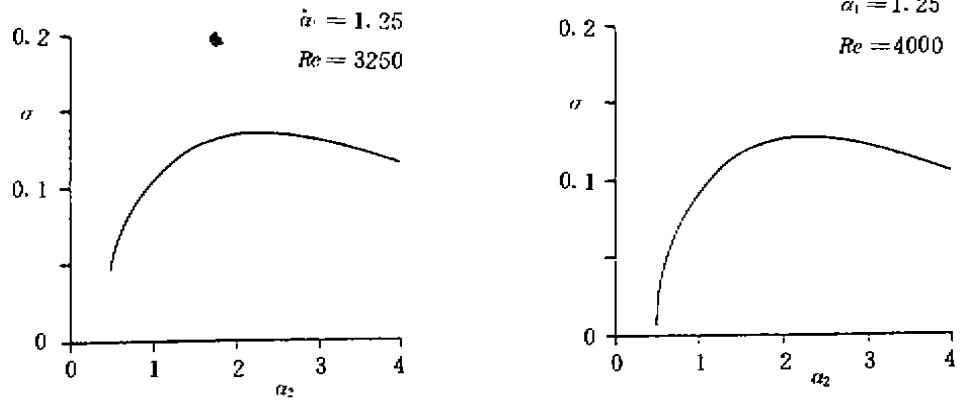


图 3 三维扰动增长率随展向波数的变化

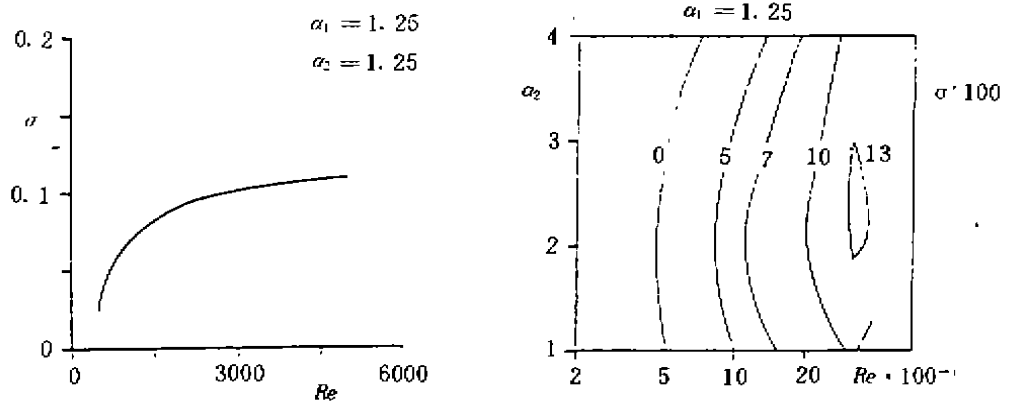


图 4 三维扰动增长率随雷诺数的变化

图 5 在 (Re, α_2) 平面上三维扰动增长率的等值线图

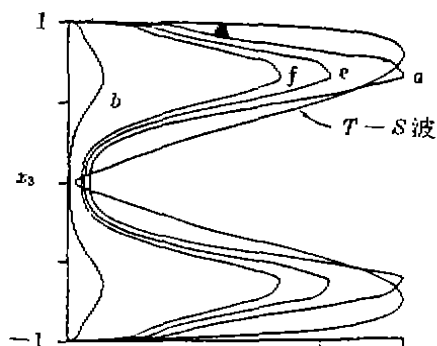
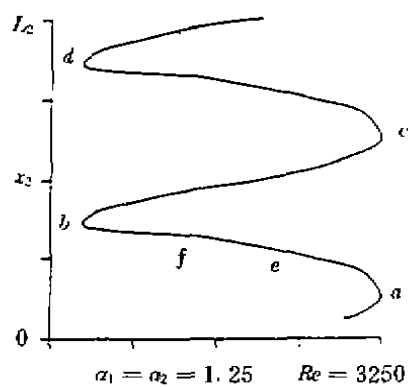


图 6 三维扰动波的展向结构 图 7 三维扰动波的垂向变化,图中 \$a, b, e, f\$ 四条曲线对应于图 6 中四个不同的展向截面

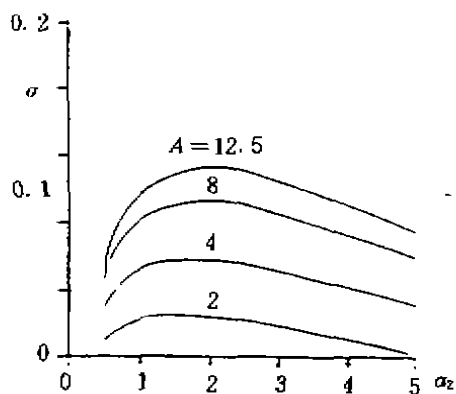


图 8 二维扰动幅值取不同大小时三维扰动增长率随展向波数的变化

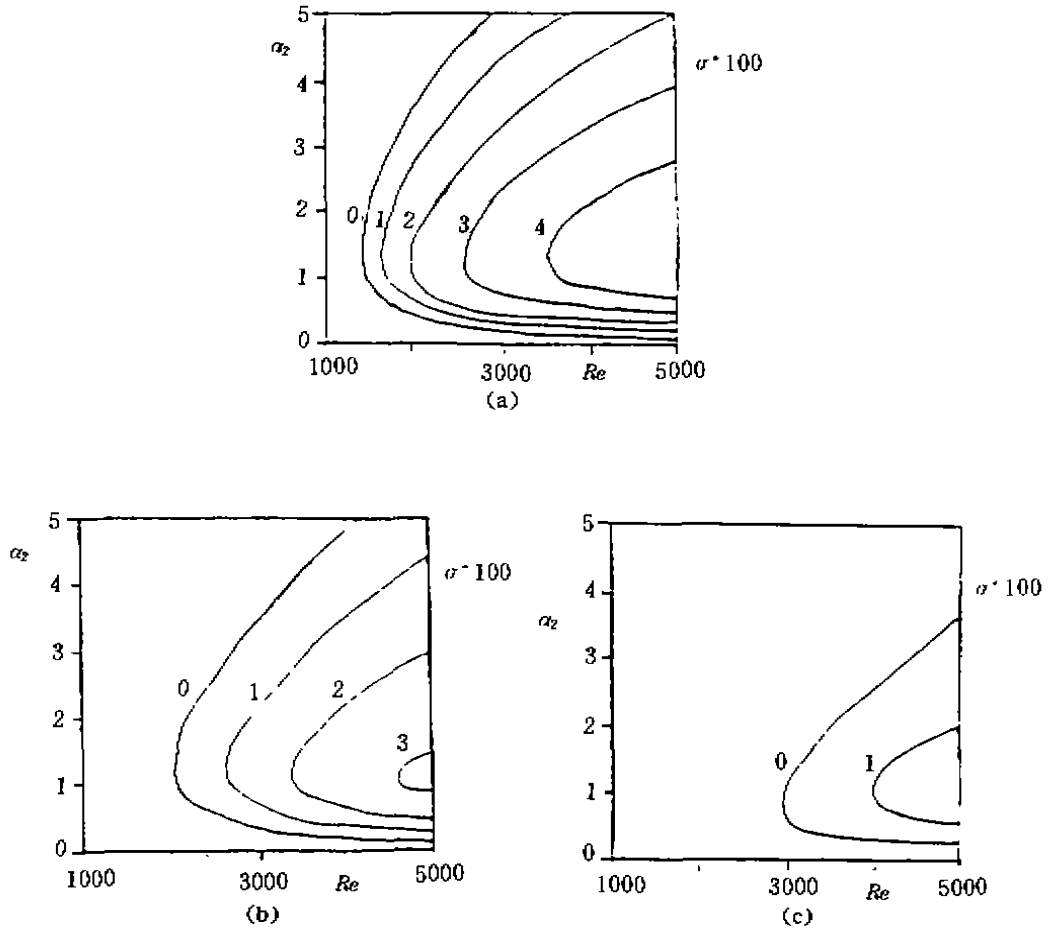


图 9 当二维扰动幅值取不同大小时(a) $A=2\%$, (b) 1% (c) 0.5%
在 (Re, α_2) 平面上亚谐波型三维扰动增长率的等值线图

参 考 文 献

- 1 Benney D J, Lin C C. *Phys. Fluids*, 3:656-657, 1960.
- 2 Craik A D D. *JFM*, 1971, 50, 393-413.
- 3 Herbert T. *Proc. Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn.* (Ed. A. I. van de Vooren & P. Zandbergen), *Lecture Notes in Physics*, 1976, 59, p. 235 Berlin, Springer-Verlag
- 4 Herbert T. *Phys. Fluids*, 1983, 26: 871-874.
- 5 Kachanov Yu S, Levchenko V Ya. *JFM*, 1984, 138, 209-47.
- 6 Klebanoff P S, Tidstrom K D, Sargent L M. *JFM*, 1962, 12: 1-34.
- 7 Kozlov V V, Ramazanov M P. *JFM*, 1984, 143: 149-57.
- 8 Meksyn D, Stuart J T. *Proc. Roy. Soc. Lond., A*, 1951, 208, 517-26.
- 9 Nishioka M, Asai M. In *Turbulence and Chaotic Phenomena in fluids* (ed. T. Tatsumi) p. 117-22. Amsterdam, North-Holland, 1984.
- 10 Orr W M F. *Proc. R. Ir. Acad.* 1907, A 27, 2-27, 69-138.

- 11 Orszag S A, Patera A T. *JFM*, 1983, 128, 347-85.
- 12 Raetz G S. NORAIR Rep. NOR-59-383, Hawthorne, Calif, 1959.
- 13 Rayleigh Lord. In *Scientific Papers of Lord Rayleigh*, 1: 474-87. New York, Dover, 1964.
- 14 Saric W S, Thomas A S W. In *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids* (ed. T. Tatsumi) p. 117-22. Amsterdam, North-Holland, 1984.
- 15 Squire H B. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1933 A 142: 621-28.
- 16 Sommerfeld A. *Atti Congr. Int. Math.*, 4th., Rome, p. 116-24, 1908.
- 17 Stuart J T. *JFM*, 1960, 9, 353-70.
- 18 Watson J. *JFM*, 1960, 9, 371-89.
- 19 Zahn J D, Toomre J, Spiegel E A, Gough D D. *JFM*, 1974, 64: 319-45.
- 20 Zhou H. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1982, A 381: 407-18.
- 21 Zhou H. *Chinese Sci. Bulletin*, 1991, 36: 372-76.
- 22 是勋刚, 陈启生, 汤劲武. 平面槽流的二维平衡解的直接数值模拟, 第三届全国湍流与流动稳定性学术会议文集, 1991. 天津, P. 299-306.

Secondary Instability Analysis of Plane Channel Flow

Shi Xun-gang Chen Qi-sheng

(State Dey Laboratory for Turbulence Research Department
of Mechanics, Peking University, 100871)

Abstract Taken the stable 2-D equilibrium solution obtained from 2-D direct numerical simulation, or the quasi-steady solutions obtained by multiplied its perturbation part by a small coefficient as a basic flow, their instability to 3-D small perturbation is examined. A closed perturbation equation set including only two unknown functions is derived, which with the homogeneous boundary conditions together constitutes an eigenvalue problem of an ordinary differential equation system. Chebyshev- τ method is used to transform the above problem into an algebraic eigenvalue problem. For 3-D fundamental and subharmonic modes, the growing rates of 3-D perturbations on the amplitude values of 2-D perturbations, Reynolds numbers and spanwise wavenumbers is obtained numerically. Results indicate that in all cases the growing rates of 3-D Perturbations are much greater than those of 2-D T-S waves, so the transition phenomena in channel flow observed in wxperiments are better explained.

Key words plane channel flow, transition, coherent structures, flow stability, secondary instability