

DOI: 10.13544/j.cnki.jeg.2017.s1.073

有限元强度折减法在边坡稳定性分析中的有效性及结果检验方法*

高桂云^① 杨家修^② 吴梦喜^{③④}

(^①中国地震局地壳应力研究所 北京 100085)

(^②中国电建集团贵阳勘测设计研究院有限公司 贵阳 550081)

(^③中国科学院力学研究所 北京 100190)

(^④中国科学院大学 北京 100049)

摘要 有限元强度折减法的有效性及其结果评价决定该方法是否能在工程上得到认可及推广的关键。本文基于有理论解的地基承载力问题和澳大利亚计算机应用协会(ACADS)边坡稳定性典型考题,通过计算值与理论解的对比以及塑性贯通区结果,对有限元强度折减法用于边坡稳定分析的有效性、失稳判据以及结果评价等问题进行了系统研究,提出了以塑性带宽度与长度之比检验计算结果的方法。结果发现,在足够且合理的网格密度下,有限元强度折减法分析边坡稳定性是有效的,不同类型的临界状态判据差异不大,而塑性区贯通判据最为客观;临界状态时塑性带的宽度与长度之比与安全系数的计算精度有很高的相关性,其值越小,精度越高,当塑性区相对宽度 b/L 小于 0.05 时,安全系数相对误差一般小于 5%;对于强度折减法计算结果的精度评价,只要所得的等效塑性应变分布能确定滑动机制和大致的滑动面位置,其安全系数计算结果与更细密的网格的结果差异一般也在 5% 以内,精度就是足够的。

关键词 边坡稳定性 强度折减法 塑性区贯通 失稳判据

中图分类号:P642 文献标识码:A

THE RELIABILITY OF FEM STRENGTH REDUCTION IN SLOPE STABILITY ANALYSIS AND ITS RESULT EVALUATION METHOD

GAO Guiyun^① YANG Jiaxiu^② WU Mengxi^{③④}

(^①Institute of Dynamic Crustal, China Earthquake Administration, Beijing 100085)

(^②Powerchina Guiyang Engineering Corporation Limited, Guiyang 550081)

(^③Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

(^④University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract The reliability of FEM strength reduction in slope stability analysis and its result evaluation are the key factors that influence the engineering application of this method. Based on the ultimate bearing capacity problem of foundation and the slope stability benchmark examples of Australian Computer Application Association(ACADS).

* 收稿日期: 2017-05-30; 收到修改稿日期: 2017-07-28.

基金项目: 中央级科研院所基本科研业务项目(ZDJ2017-13), 华能科技项目(NHKJ15-H13), 国家自然科学基金项目(41574088)资助.

第一作者简介: 高桂云(1984-), 女, 博士, 助理研究员, 主要从事边坡稳定性、岩石动态断裂、水压致裂等问题研究. Email: gygaopku@163.com

通讯作者简介: 吴梦喜(1967-), 男, 博士, 高级工程师, 主要从事水电站大坝、边坡、地下洞室与隧道工程中岩土体渗流与渗透变形、本构关系与有限元数值方法等的研究. Email: wumx@imech.ac.cn

This paper deals with the reliability, the slope failure criterion and result evaluation of FEM strength reduction in slope stability analysis. A result evaluation method based on the ratio of width and length of the plastic zone b/L was proposed. Results show that the FEM strength reduction method is effective in the condition of sufficient and reasonable mesh density. And there is no significant difference between different slope failure criterions in this condition, while the plastic strain zone connection criterion is the most objective criterion. The results show that the relevance are very high between the safety factor and the ratio of width and length of the plastic zone b/L . The smaller value of this ratio, the higher precision of the safety factor. And the relative error of safety factor is less than 5% when the ratio b/L is less than 0.05. If the slip mechanism and the slip face could be determined from the equivalent plastic strain distribution, the difference of safety factor from that of finer mesh grid is less than 5% and the accuracy of the FEM strength reduction method is sufficient.

Key words Slope stability, Strength reduction, Plastic strain zone connection, Failure criterion

0 引言

1975年,Zienkiewicz et al. (1975)提出在有限元中采用增加荷载或者降低抗剪强度的方法来计算岩土工程的安全系数,发现该方法得到的安全系数与极限平衡法计算的安全系数非常接近,可以用该方法来分析边坡稳定性。Matsui et al. (1988)通过分析多个边坡的稳定性对该方法进行了验证,并把此方法正式命名为强度折减法。强度折减法用于边坡稳定分析发挥了很大的作用(管旭东等, 2007; 姚文敏等, 2016),但也存在很大争议,目前该方法所得的计算结果,仍然只是工程的参考,还没有像极限平衡法那样,被国家或行业规范采纳,并作为工程设计的依据。因此,有必要对该方法的有效性进行进一步的研究。

Griffiths et al. (1999)强调采用有限元强度折减法研究边坡的稳定性,有两点至关重要:其一是必须要有足够密的计算网格,其二是必须要有功能强大的弹塑性有限元计算代码(或软件)。要满足此两点要求,采用有限元强度折减法进行边坡稳定分析时,必须要对所采用的网格密度是否足够和所采用的代码是否足够强大进行检验。如何合理有效地利用强度折减法来研究边坡问题,并如何检验所得计算结果的可靠性是本文的重要研究内容。

有限元强度折减法计算中,边坡的临界状态判定需要一个失稳判据。常用的失稳判据有3种:(1)收敛性判据:根据有限元迭代计算的收敛性来判别,即在给定的非线性迭代次数及收敛误差限值条件下,最大位移或不平衡力的残差不满足所要求的收敛条件;(2)特征点位移突变判据:根据计算域内某一部位的位移与折减系数之间关系曲线的变化

特征确定失稳状态,如当折减系数增大到某一特定值时,特征点的位移突然增大,则认为边坡发生失稳;(3)塑性区连通判据:通过域内塑性应变区或达到某一幅值的塑性应变区是否连通,来判断边坡是否发生破坏。何种判据更为客观合理,目前尚存在许多争议。

边坡的强度折减因子大于临界状态时的折减因子时,不存在一个既能满足静力平衡又能满足静力许可(应力不超过强度极限)的解,此时有限元计算必定不收敛。计算不收敛常被当作是边坡破坏的判据(Griffiths et al., 1999; 郑颖人等, 2004)。然而,很多学者认为以计算不收敛作为边坡失稳破坏判据是不客观的(连镇营等, 2001; 栾茂田等, 2003; 刘祚秋等, 2005; 李红等, 2007)。由于算法和计算代码本身并非是完美无缺,因而真实的既能满足静力平衡又能满足静力许可的解存在时同样可能出现计算不收敛的情况。连镇营等(2001)认为边坡内一定幅值的广义剪切应变自坡底向坡顶贯通是边坡破坏的标志。由于广义剪应变不仅含有塑性分量,而且也包括弹性分量,栾茂田等(2003)建议用塑性区的范围和连通性作为边坡的失稳判据,而刘祚秋等(2005)则提出以到达某一幅值的总等效塑性应变区贯通作为边坡破坏的标准。李红等(2007)则认为塑性区贯通标准在土体的泊松比较小的情况时欠妥,而位移突变判据则是普适的。史俊涛等(2014)则建议将塑性区贯通与特征点位移突变结合作为边坡失稳的判据。裴利剑等(2010)则认为在足够的计算精度时,上述3个判据所得结果是一致的。万少石等(2010)也持同样的观点,并指出合理的网格大小是计算的关键,而不同的单元类型具有不同的合理网格大小区间,并不是网格越密集越好。因而,本文将针对应用有限元强度折减法分析边坡稳定问

题时,应如何判别边坡的失稳状态进行研究。

采用强度折减法求边坡稳定安全性与求解地基极限承载力问题类似,都是通过寻找边坡或地基的极限状态(临界状态)来获得,因而可以通过分析有理论解的地基承载力问题,来研究有限元强度折减法来计算边坡的稳定性的有效性问题以及临界状态的判断问题。结合 ACADS 边坡稳定性典型考核题(Donald et al., 1992),进一步验证有限元强度折减法在边坡稳定性问题中的有效性,并提出采用塑性区宽度来检验有限元强度折减法稳定性计算结果精度的方法。

1 有限元强度折减法介绍

有限元强度折减法的基本原理是在理想弹塑性有限元计算中,将线弹性应力作为单元高斯点初始应力条件,同步除以一个折减因子 F_s ,降低边坡的强度参数黏聚力 c 和摩擦系数(内摩擦角 φ 的正切值),将导致边坡内部单元的应力超出了岩土体屈服强度,不能承受的应力将逐渐转移到周围土体单元中去;逐步提高折减因子 F_s ,使边坡内出现贯穿边坡表面的连续的屈服点连通面,即边坡达到临界状态,此时的强度折减因子 F_s 即为安全系数。

有限元强度折减法得到的安全系数是基于强度储备概念的安全系数,黏聚力 c 、内摩擦角 φ 按下式进行折减:

$$c_f = c/F_s, \tan\varphi_f = \tan\varphi/F_s$$

其中, F_s 为强度折减因子, c_f 和 φ_f 分别为折减 F_s 倍后的有效黏聚力、内摩擦角。

强度折减法不平衡力迁移计算中,本构模型一般采用理想弹塑性模型、Mohr-Coulomb 破坏准则,流动法则采用相关联流动法则。临界滑动面通常通过等效塑性应变(Zheng et al., 2009; Liu et al., 2015)的贯通带来获得。对于理想弹塑性材料,如果等效塑性应变大于0,则表明材料发生屈服,达到其强度极限。等效塑性应变 ε_{eq}^p 的定义为:

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \sqrt{2 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 3} dt$$

其中, ε_{eq}^p 为等效塑性应变; $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 为等效塑性应变速率。

2 有限元强度折减法有效性研究

采用有限元强度折减法求边坡稳定安全性与求

解地基极限承载力问题类似,都是通过寻找边坡或地基的极限状态(临界状态)来获得,因而可以通过分析有理论解的地基承载力问题,来研究如何合理采用有限元强度折减法来计算边坡的稳定性问题。不排水黏性地基上的条形基础的极限承载力是有塑性力学理论解的,而用弹塑性有限元求解是非常难以得出精确的结果,因为有限元法准确模拟塑性区的流动难度很大(Sloan et al., 1982)。该问题的模拟结果与网格类型、网格密度和所采用的计算软件有很大的关系。如果采用合适的网格类型和密度及计算软件用强度折减法能够比较准确地计算出条形地基的承载力,那么该方法用于模拟边坡的稳定性也会是比较准确的。因此,强度折减法对条形地基的模拟结果的检验与模拟经验对采用该方法研究边坡稳定问题是很重要的。

光滑刚性条形基础的地基极限承载力问题的基本理论基础源于 Prandtl 解(陈惠发等, 1995),对于承受均匀垂直荷载的半无限、无重量($\gamma=0$)地基,在 $\varphi=0$ 情况下,极限承载力的精确解为 $q_0^* = (\pi+2)c \approx 5.142c$ 。

这是一个典型的平面应变问题,考虑对称性,取其一半进行有限元计算,几何如图 1 所示。取条形基础的宽度 $B/2=0.5m$,计算范围取为 $3m \times 2m$ 。弹性模量和泊松比分别取 $E=1 \times 10^4 kN \cdot m^{-2}$ 和 $\nu=0.3$,黏聚力 $c=20kN \cdot m^{-2}$,内摩擦角取 $\varphi=0^\circ$ 。计算模型底部边界约束垂直和水平位移,左边界采用对称边界条件,右边界约束水平位移,荷载 $q=20kN \cdot m^{-2}$ 。土体采用理想弹塑性本构模型和 Mohr-Coulomb 强度破坏准则。该部分有限元计算采用商业软件 ABAQUS(版本 6.14-1)进行。

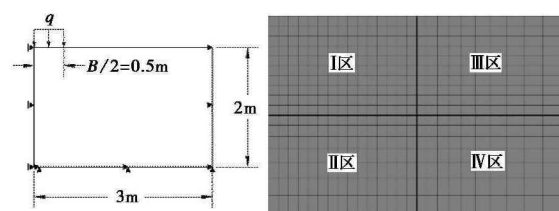


图 1 地基承载力计算模型及网格划分示意图

Fig. 1 Simulation model and mesh division of the bearing capacity problem of foundation

由于有限元是基于连续介质理论的,单元内部应变是连续的,因而有限元的一个单元无法模拟不连续的位移或应变,Griffiths et al.(1999)指出采用有限元强度折减法进行极限状态分析需要一个足够

密的网格,后续的许多文献也强调必须采用足够密的网格才能得到较精确的安全系数值(Dawson et al.,1999;张鲁渝等,2003;杨有成等,2008;Tschuchnigg et al.,2015)。

有限元网格剖分示意(图1),单元类型采用平面应变四边形一阶单元(CPE4),模型分为4个区域,I区为正方形网格,网格边长为 l ;II、III区为边长由 l 到 $2l$ 渐变的长方形网格;区域IV的网格根据II、III区协调自动生成。

不同网格尺寸情况下的特征点无量纲位移变化曲线(图2)。可见网格尺寸越大,计算终止时的强度折减因子值和位移值也越大,而位移曲线突变点的强度折减因子也越大。位移突变点与最后一个计算收敛点之间的强度折减因子的差也越大,即依据位移突变判据与不收敛判据所得的强度安全系数差也越大。

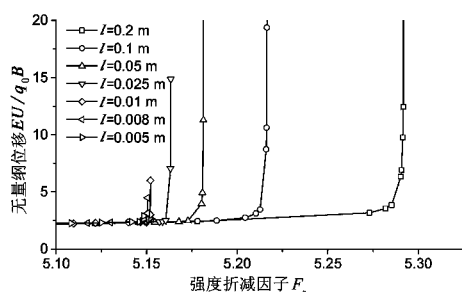


图2 不同网格尺寸时的特征点位移 EU/q_0B 随强度折减因子 F_s 变化曲线

Fig. 2 The strength reduction factor F_s versus dimensionless displacement EU/q_0B of different mesh size

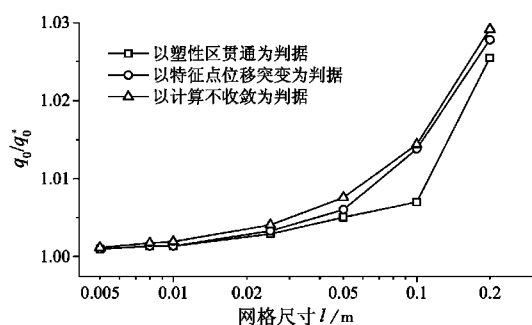


图3 网格尺寸对不同失稳判据的承载力结果影响

Fig. 3 The influence of mesh size on the bearing capacity results based on different failure criterion

采用塑性区贯通、位移突变判据与计算不收敛判据得到承载力结果(图3)。可见网格尺寸越小,这3种判据给出的结果也越接近,其承载力计算结

果也越接近理论解。网格尺寸为0.2m时,3种判据的误差都接近3%,而网格尺寸小于0.01m时,误差均小于0.2%。可见在软件能有效计算的情况下,足够的网格密度是获得合理结果的关键,而不同判据造成的差异是次要的甚至是可以忽略的。

破坏机制是承载力或稳定性分析的另一个重要方面。网格密度不仅影响承载力的计算值,还影响滑动机构或滑动面位置的确定。不同网格尺寸最后一次计算收敛时的等效塑性应变分布如图4所示,塑性应变区最窄处宽度见表1。等效塑性带的范围是随着网格密度增加而减小的。网格特征尺寸 $l=0.2m$ 和 $0.1m$ 时,塑性连通带近似是一个区域,难以看出滑动机制或滑动机制不明确;当 $l=0.05m$ 时,可以看出明显的滑动面位置,滑动机制与Prandtl机制类似;网格尺寸进一步减小时,塑性连通带最窄处宽度也进一步降低。随网格的加密,塑性连通区变窄,滑动机制更加明确且极限承载力的结果与理论解相比误差也越小。对于此问题, $l=0.05m$ 这个尺寸,可以认为是达到了足够的网格密度。此时承载力误差也小于1.0%。可见,能否从计算的最后一个收敛结果时的等效塑性应变分布图能否确定滑动机制可以作为检验网格密度是否足够和软件是否有效的后验标准。

表1 不同网格尺寸时最大等效塑性应变与塑性带最小宽度 b

Table 1 The maximum equivalent plastic strain and the minimum plastic zone size b

网格尺寸 l/m	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.008	0.005
最大等效塑性应变	0.886	0.395	0.967	0.672	0.751	0.745	0.865
塑性带最小宽度 b/m	0.600	0.452	0.311	0.149	0.038	0.027	0.020

边坡滑动失稳表现为应变局部化带的渐进扩展(刘晓宇等,2012),对于理想弹塑性模型,应变局部化表现为一个很窄的应变集中区域(Krabbenhoft et al.,2012)。采用有限元理论分析时,最先得到的是各单元节点处的位移,再通过节点插值求得得到单元内部应变,单元内部应变是均匀的(一阶单元)或均匀变化的(二阶单元)。而不同变形模量的单元共同面两侧的应变一般是不连续的。模拟所得的滑动面(或应变不连续面)总是优先沿着单元边发展(Tschuchnigg et al.,2015)。如图5中的细网格所示,单元尺寸会影响到等效塑性应变模拟结果的分

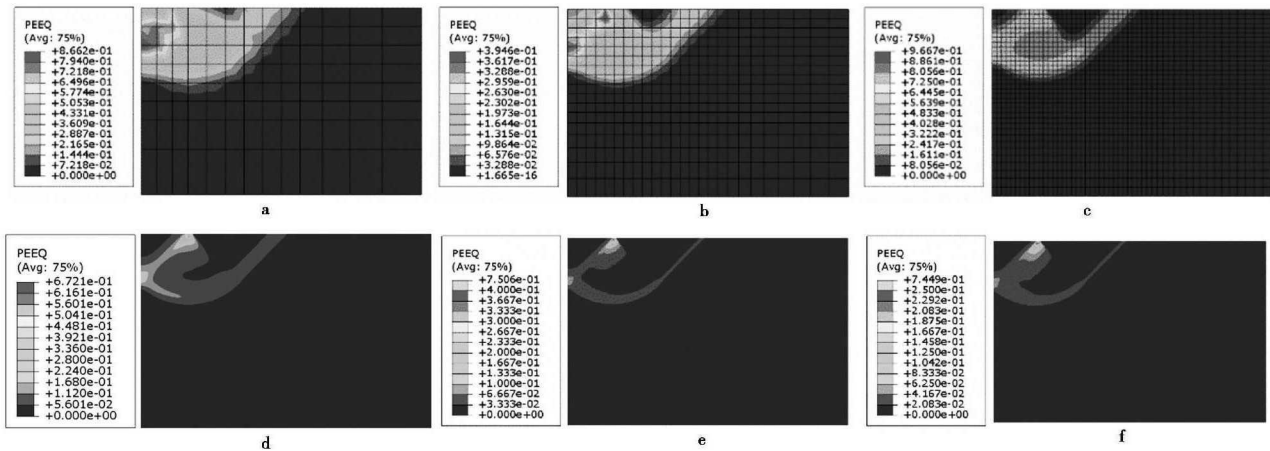


图4 不同网格尺寸的等效塑性应变分布云图

Fig. 4 The distribution of equivalent plastic strain of different mesh size
a. $l=0.2\text{m}$; b. $l=0.1\text{m}$; c. $l=0.05\text{m}$; d. $l=0.025\text{m}$; e. $l=0.01\text{m}$; f. $l=0.008\text{m}$

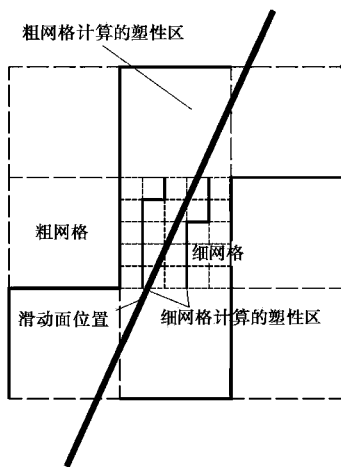


图5 有限元不连续变形模拟示意图

Fig. 5 The sketch of simulation of discontinuous deformation

布范围。除有一对单元边平行于局部化带的特殊情况外,一般需要多层单元才能适应这种应变局部化带的模拟。网格不够细密将无法捕捉到应变局部化带或夸大局部化带的范围(Pastor et al., 1995)。而塑性区范围越大,塑性区贯通时的强度折减系数也越大。即使塑性区已经贯通,由于塑性应变的发展仍然受到塑性区周边单元的约束,不平衡力的迁移仍可以获得静力平衡的计算结果,这就是采用不收敛判据所获得的强度折减因子大于塑性区贯通判据的强度折减因子的原因。因此,用有限元强度折减法进行地基极限承载力分析或边坡稳定分析,必须要有足够密的网格,才能够较好的模拟滑动面并得到比较准确的安全系数值。这也是 Griffiths et al. (1999)强调有限元强度折减法分析边坡稳定性时

需要有足够的网格密度的内在原因。

正如 Griffiths et al. (1999)所强调的,足够密的网格和强大的计算软件是有限元强度折减法有效的关键。满足这两项要求的计算结果是有效的。网格密度是导致极限状态判据争议的主要原因,网格足够密的情况下3类判据得到的安全系数结果一致。由于计算收敛性受有限元程序及收敛标准的影响较大,具有一定的人为因素,且常出现计算不收敛但贯通的塑性区并没有形成情况,因而计算不收敛并不等同于机构的破坏状态;等效塑性应变的幅值受弹性参数等的影响,且对理想弹塑性材料而言塑性区贯通意味着基础承载能力的失效,因此等效塑性应变贯通基础上再要求贯通区的塑性应变幅值既无客观标准又无必要;特征点位移突变判据受特征点位置选取的影响,这一判据也不够客观。因此,以塑性区贯通作为极限状态判据是比较客观的。足够密的网格是计算精度达到要求的关键,而计算精度是否足够可以通过等效塑性应变分布图,依据是否形成贯通的区域,形成明确的滑动机制来检验。

3 强度折减法的有效性在边坡稳定分析考题中的检验

足够的网格密度是边坡稳定安全性计算结果准确可靠的保证。为进一步检验有限元强度折减法在边坡稳定分析中的有效性,结合澳大利亚计算机协会(ACADS)边坡稳定性考题(Donald et al., 1992),通过采用不同的网格密度,来进一步检验上述明确的滑动机制与确定的滑动面位置作为检验所得的边

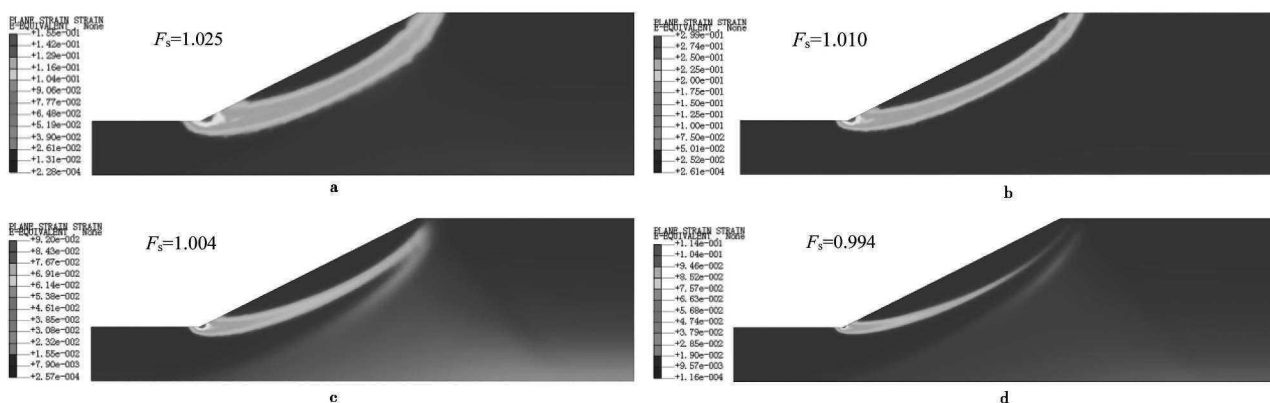


图 6 临界状态时的等效塑性应变结果(考核题 EX1-1)

Fig. 6 The distribution of equivalent plastic strain of different mesh size(EX1-1)

a. $l=1.5\text{m}$; b. $l=1.0\text{m}$; c. $l=0.8\text{m}$; d. $l=0.5\text{m}$

坡稳定计算结果精度是否足够好这一方法的合理性和可靠性。

为定量分析网格密度对滑动面位置确定的影响、以贯通的塑性区的最窄宽度 b 与滑动面的长度 L 的比值 b/L , 作为塑性区相对宽度来表征滑动面位置确定的准确程度。以考核题 EX1-1 为例, 不同网格尺寸下的等效塑性应变分布云图如图 6 所示, 滑动带长度 L 约为 24.4m。安全系数相对参考答案比值及塑性区相对宽度见表 2。随着网格尺寸的减小, 塑性连通区宽度减小, 安全系数值也降低。网格尺寸由 $l=1.5\text{m}$ 减小到 $l=0.5\text{m}$ 时, 塑性区相对其长度的比值由 0.102 减小到了 0.036, 安全系数值减小了 0.031, 降低了 3.1%。与极限平衡法考题推荐答案 $F_s^* = 1.0$ 相比, 网格尺度 $l=1.5\text{m}$ 时的安全系数大 2.5%, 网格尺度加密到 $l=0.5\text{m}$ 时大 -0.6%。但是当网格尺寸 $l=0.8\text{m}$ 和 0.5m 时, 可以看到除了可能的滑动面附近的塑性应变较大外, 在该塑性带下方还存在较大的塑性应变。继续加密网格, 网格尺寸为 0.25m , 计算不收敛时, 虽然塑性带变得很窄, 反而并没有明显的塑性贯通区。万少石等已指出并不是网格越密越好, 有限元强度折减法计算需要适宜的网格密度(万少石等, 2010)。足够密的网格是有限元强度计算结果有效的保证, 然而网格密度过大也会造成塑性应变失真的问题, 这是一个矛盾。推测产生这一矛盾的原因, 网格越密, 对于相同的强度折减因子增量计算步, 产生不平衡力的单元越多, 应力迁移迭代计算也越难以收敛, 对软件“足够强大”的要求越高。

可以看出, 网格越密、计算所得的安全系数越小、塑性区的相对宽度也越小。ACADS 其他考题中

表 2 不同网格尺寸时安全系数和塑性区宽度值(考题 EX1-1)

Table 2 The relative safety factor and plastic zone width(EX1-1)

网格尺寸 l/m	1.5	1.0	0.8	0.5	0.25
塑性区相对宽度 b/L	0.102	0.066	0.046	0.036	—
F_s/F_s^*	1.025	1.010	1.004	0.994	0.984

的比值 F_s/F_s^* 随塑性区宽度变化关系如图 7 所示。虽然各考题不同网格密度的塑性区的宽度差异很大, 但安全系数的相对差异却很小。由于过密的网格计算所得的塑性区分布有时反而不利于滑动机制和滑动面的确定, 且计算的耗时是超过网格尺寸比值倒数的一次方增长的, 综合以上各考题的分析, 对于强度折减法计算结果的精度评价, 只要所得的等效塑性应变分布能确定滑动机制和大致的滑动面位置, 其安全系数计算结果与更细密的网格的结果差异一般也在 5% 以内, 精度就是足够的。当塑性区相对宽度 b/L 小于 0.05 时, 安全系数结果的相对误

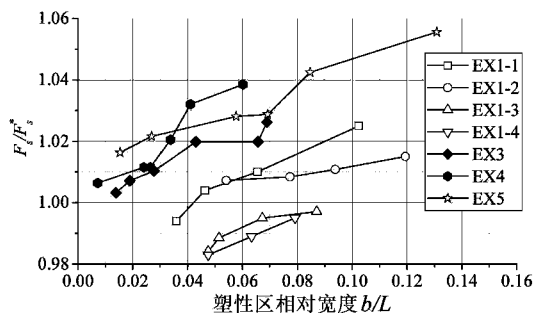


图 7 F_s/F_s^* 与塑性区相对宽度 b/L 关系

Fig. 7 The relative safety factor F_s/F_s^* versus plastic zone width b/L

差一般小于5%。

4 结 论

基于地基承载力问题和 ACADS 边坡稳定考题,研究了网格密度对有限元强度折减法的有效性和计算精度的影响,探讨了边坡失稳判据问题,提出了采用塑性区相对宽度检验稳定性结果的方法,得出以下主要结论:

(1) 足够密的网格和强大的计算代码是有限元强度折减法有效的要求,所得临界状态时塑性区分布能得出合理的滑动机制和确定滑动面的大致位置是确定计算结果有效的标志;虽然越密的网格安全系数精度越高,但过密的网格由于代码本身的不完美造成塑性区计算误差有时反而会影响滑动机制的判断,足够且合理的网格密度是采用强度折减法的合适选择。

(2) 足够且合理的网格密度情况下,不同类型的边坡临界状态判据差异不大,而塑性区贯通判据最为客观。

(3) 塑性区相对宽度可以作为检验边坡稳定性计算结果好坏的标准。发现塑性带宽度与长度之比 b/L 与安全系数的计算精度有很好的对应关系,安全系数计算精度随着 b/L 比值下降而提高;当塑性区相对宽度 b/L 小于 0.05 时,安全系数相对误差一般小于 5%。

参 考 文 献

- Chen H F, Zhan S B. 1995. Limit analysis and soil plasticity[M]. Beijing: China Communication Press.
- Dawson E M, Roth W H, Drescher A. 1999. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Géotechnique, **49**(6): 835~840.
- Donald I, Giam P. 1992. The ACADS slope stability programs review. Proc.6th International Symposium on Landslides.3, 1665~1670.
- Griffiths D V, Lane P A. 1999. Slope stability analysis by finite elements[J]. Géotechnique, **49**(3): 387~403.
- Guan X D, Sun J Z, Bai Y, et al. 2007. 2D FEM analysis of rock slope stability based on strength reduction method[J]. Journal of Engineering Geology, **15**(S1): 344~348.
- Krabbenhoft K, Karim M, Lyamin A, et al. 2012. Associated computational plasticity schemes for nonassociated frictional materials[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **90**(9): 1089~1117.
- Li H, Gong B N, Chen, Y. 2007. Study on criteria for evaluating stability of slope with FEM based on shear strength reduction methods[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, **5**(1): 79~82.
- Lian Z Y, Han G C, Kong X J. 2001. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, **23**(4): 407~411.
- Liu S Y, Shao L T, Li H J. 2015. Slope stability analysis using the limit equilibrium method and two finite element methods[J]. Computers and Geotechnics, **63**: 291~298.
- Liu X Y, Zhao Y, Liu Y, et al. 2012. Determination method of limit equilibrium state and critical slip surface of soil slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, **31**(7): 1369~1378.
- Liu, Z Q, Zhou C Y, Dong, L G, et al. 2005. Slope stability and strengthening analysis by strength reduction FEM[J]. Rock and Soil Mechanics, **26**(4): 558~561.
- Luan M T, Wu Y J, Nian T K. 2003. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, **23**(3): 1~8.
- Matsui T, San K. 1988. Finite element stability analysis method for reinforced slope cutting[C]. International Geotechnical Symposium on Theory and Practice of Earth Reinforcement, Fukuoka, Japan, AA Balkema.317~322.
- Pastor M, Quecedo M. 1995. A patch test for mesh alignment effects in localized failure[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, **11**(12): 1015~1024.
- Pei L J, Qu B N, Qian S G. 2010. Uniformity of slope instability criteria of strength reduction with FEM[J]. Rock and Soil Mechanics, **31**(10): 3337~3341.
- Shi J T, Kong S L, Ren Q. 2014. Analysis on the applicability of criterions for evaluating slope stability based on strength reduction FEM[J]. Yellow River, **36**(2): 135~137.
- Sloan S, Randolph M F. 1982. Numerical prediction of collapse loads using finite element methods[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **6**(1): 47~76.
- Tschuchnigg F, Schweiger H F, Sloan S W. 2015. Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques. Part I: Numerical studies considering non-associated plasticity[J]. Computers and Geotechnics, **70**: 169~177.
- Wan S S, Nian T K, Jiang J C, et al. 2010. Discussion on several issues in slope stability analysis based on shear strength reduction finite element methods(SSR-FEM)[J]. Rock and Soil Mechanics, **31**(7): 2283~2288, 2316.
- Yang Y C, Li Q, Chen X Z, et al. 2008. Discussion on strength reduction using FLAC[J]. Rock and Soil Mechanics, **29**(4): 1103~1106.
- Yao W M, Hu B, Mao Y J, et al. 2016. Comprehensive evaluation of slope failure mode and stability of open-pit mine[J]. Journal of Engineering Geology, **24**(S1): 1093~1099.
- Zhang L Y, Zheng Y R, Zhao S Y, et al. 2003. The feasibility study of strength-reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability[J]. Journal of Hydraulic Engineering, **1**(2): 21~27.
- Zheng H, Sun G, Liu D. 2009. A practical procedure for searching critical slip surfaces of slopes based on the strength reduction technique[J].

- Computers and Geotechnics, **36**(1-2): 1~5.
- Zheng Y R, Zhao S Y. 2004. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, **23**(19): 3381~338.
- Zienkiewicz O C, Humpheson C, Lewis R W. 1975. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. Géotechnique, **25**(1): 671~689.
- 陈惠发, 詹世斌. 1995. 极限分析与土体塑性[M]. 北京: 人民交通出版社.
- 管旭东, 孙进忠, 白英, 等. 2007. 基于强度折减法的岩质边坡稳定性二维有限元分析[J]. 工程地质学报, **15**(S1): 344~348.
- 李红, 宫必宁, 陈琰. 2007. 有限元强度折减法边坡失稳判据[J]. 水利与建筑工程学报, **5**(1): 79~82.
- 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 2001. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, **23**(4): 407~411.
- 刘晓宇, 赵颖, 刘洋, 等. 2012. 土质边坡极限平衡状态及临界滑动面的判定方法[J]. 岩石力学与工程学报, **31**(7): 1369~1378.
- 刘祚秋, 周翠英, 董立国, 等. 2005. 边坡稳定及加固分析的有限元强度折减法[J]. 岩土力学, **26**(4): 558~561.
- 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 2003. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, **23**(3): 1~8.
- 裴利剑, 屈本宁, 钱闪光. 2010. 有限元强度折减法边坡失稳判据的统一性[J]. 岩土力学, **31**(10): 3337~3341.
- 史俊涛, 孔思丽, 任琪. 2014. 有限元强度折减法边坡失稳判据适用性分析[J]. 人民黄河, **36**(2): 135~137.
- 万少石, 年廷凯, 蒋景彩, 等. 2010. 边坡稳定强度折减有限元分析中的若干问题讨论[J]. 岩土力学, **31**(7): 2283~2288, 2316.
- 杨有成, 李群, 陈新泽, 等. 2008. 对强度折减法若干问题的讨论[J]. 岩土力学, **29**(4): 1103~1106.
- 姚文敏, 胡斌, 毛元静, 等. 2016. 露天矿山边坡破坏模式与稳定性的综合评价[J]. 工程地质学报, **24**(S1): 1093~1099.
- 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 2003. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. 水利学报, **1**(2): 21~27.
- 郑颖人, 赵尚毅. 2004. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, **23**(19): 3381~3388.