



(12)发明专利

(10)授权公告号 CN 107562691 B

(45)授权公告日 2020.03.17

(21)申请号 201710692877.5

(22)申请日 2017.08.14

(65)同一申请的已公布的文献号

申请公布号 CN 107562691 A

(43)申请公布日 2018.01.09

(73)专利权人 中国科学院力学研究所

地址 100190 北京市海淀区北四环西路15号

(72)发明人 李飞 王传胜 余西龙

(74)专利代理机构 北京和信华成知识产权代理事务所(普通合伙) 11390

代理人 胡剑辉

(51)Int.Cl.

G06F 17/11(2006.01)

G06F 17/15(2006.01)

(56)对比文件

EP 2386949 A1, 2011.11.16, 全文.
US 2010011040 A1, 2010.01.14, 全文.CN 106598913 A, 2017.04.26, 全文.
CN 105784237 A, 2016.07.20, 全文.
CN 108401561 B, 2013.07.24, 全文.
CN 103941756 A, 2014.07.23, 全文.

审查员 王高云

(54)发明名称

一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法

(57)摘要

本发明公开了一种基于最小二乘法的动态微小力测试方法，步骤为：首先以泛函思想为求解动态力的整体思想；然后假设力 $f(t)$ 的作用下摆臂产生了相应的位移 $x(t)$ ，且 $f(t)$ 使得控制方程有解析解；再利用控制方程的可叠加性以及连续函数离散化，设 $f(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_n} f_\tau \cdot \delta(t - \tau)$ ，此即为待求的动态力模型，将其代入控制方程求得

$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_n} X_\tau \cdot x(t - \tau)$ ，利用方差比较理论解与实验数据的相似程度，当 $x(t)$ 使得方差最小时， $f(t)$ 即作为产生此实验数据的力；最后根据判断准则，用最小二乘法求解理论模型的待定系数 f_τ ，最终推导出关于动态力 f_τ 的线性方程组；并将此线性方程组程序化，使动态力自动求解，该方法对所有与此扭摆系统控制方程相似的系统均适用，不限于求力，对本系统动态力测量误差小于2.5%。

权利要求书2页 说明书8页 附图5页

步骤 S105、以泛函思想为求解动态力的整体思想

步骤 S200、获得到一维扭摆式摆臂的位移数据后，然后假设该位移数据是在力 $f(t)$ 的作用下摆臂的运动位移，且 $f(t)$ 满足控制方程有解析解的条件步骤 S300、利用控制方程的可叠加性以及连续函数离散化，设 $f(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_n} f_\tau \cdot \delta(t - \tau)$ ，此即为待求的动态力模型。将其代入控制方程求得 $x(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_n} X_\tau \cdot x(t - \tau)$ 。步骤 S400、利用方差比较理论解与实验数据的相似程度，当 $x(t)$ 使得方差最小时， $f(t)$ 即作为产生此实验数据的力；最后根据判断准则，用最小二乘法求解理论模型的待定系数 f_τ ，最终推导出关于动态力 f_τ 的线性方程组，并将此线性方程组程序化，使动态力自动求解。

CN 107562691 B

1. 一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法, 其特征在于: 包括如下步骤:

S100、首先以泛函思想为求解动态力的整体思想;

S200、当得到一组扭摆式摆臂的位移数据后, 然后假设力 $f(t)$ 的作用下摆臂产生了相应的位移 $x(t)$, 且 $f(t)$ 使得控制方程有解析解;

S300、因为控制方程是线性方程, 利用其可叠加原理以及对冲量作用有解析解, 并结合连续函数离散近似的方法使得:

$$f(t) = \sum_{\tau=1}^n f_{\tau} \cdot \delta(t - \tau) \quad (1)$$

其中 $\delta(t - \tau)$ 是 τ 时刻的单位冲量作用, f 是权重即 τ 时刻的冲量大小;

每一个 $\delta(t - \tau)$ 带入控制方程得到一个对应的 $x(\tau)$, 那么得到:

$$x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \cdot x(\tau) \quad (2)$$

此 $x(t)$ 即为假设的力的近似理论解, 当两个相邻冲量间距趋于零时, 此时的 $x(t)$ 即为真实理论解; 并且不同的 $f(t)$ 会得到不同的 $x(t)$;

S400、拿理论解的 $x(t)$ 与实验数据在相同的采样率下与实验得到的位移数据在计算机上进行比较, 选取使得两者最接近的 $f(t)$ 作为产生实验数据的推力函数, 判断条件是求理论解与实验数据之间的最小方差即:

$$R_{\min} = \sum_i^M (x_{i\text{ 实验}} - x_{i\text{ 计算}})^2 \quad (3)$$

此时拟合函数的理论解模型在理论上已经得到, 只差待定系数, 根据判断条件, 利用最小二乘法求解待定系数, 最终得到一个表达式:

$$\begin{bmatrix} \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^M x_1(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \sum_i^M x_N(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

此表达式中的 f_{τ} 既是待定系数又是我们需要的力; 并求解该表达式得到待求的动态推力, 将测量得到的位移数据带入程序即可获得动态推力。

2. 根据权利要求1所述的一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法, 其特征在于: 所述步骤S100中所述的泛函思想是, 先假设一个力函数 $f(t)$, 该力函数 $f(t)$ 让运动方程有解析解, 不同的力 $f(t)$ 应不同的位移 $x(t)$; 通过判断原始数据与计算求解数据的方差来判断两者的相似度, 当两者之间的重合度最好时, 此时的 $f(t)$ 作为真实的推力。

3. 根据权利要求1所述的一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法, 其特征在于: 所述步骤S300中, 根据控制方程的可叠加性, 连续函数的离散近似, 以及控制方程对冲量作用有解析解得到任意位移序列可表示成单位冲量波序列的时间位移的加权和, 其表达式为:

$$x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \cdot x(\tau) \quad (5)$$

其中, τ 代表时间离散间隔, 其倒数为力的采样率; 将离散的“矩形作用”视为准冲量作用, 每个矩形作用效果可以用两个相邻的等大阶跃作用的差得到;

所述步骤S400中: 根据方差判断理论, 用最小二乘法求解理论模型的待定系数, 即所求解的力, 同时得到最小方差, 推导出求解动态力的表达式并程序化;

最小二乘法的原始定义和多元函数的极值求解法：

$$R = \min_{\{c_j\}} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i)^2)] \quad (6)$$

多元函数求偏导得到：

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i)^2)] = 0, j = 0, 1 \dots n \quad (7)$$

整理后得到：

$$\begin{bmatrix} \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_1) \varphi(t_i - \tau_1) & \cdots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) & \cdots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

该式为 $Ax = y$ 的形式；其中 A 为 $N \times N$ 的方阵， x 是待求向量， y 是已知列向量；

当时间离散间隔趋向于零时，连续函数离散的前后作用效果等价，因为力的连续作用被离散后相邻两个离散点的作用可用以前面离散点对应的函数值为高，以离散间隔为底的“矩形作用”每一个矩形作用效果用两个相邻阶跃力的作用效果的差得到，而阶跃力作用下的控制方程有解析解，并且单位阶跃力在0时刻作用下的解为：

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n} \left(\frac{\cos(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta \sin(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \right] & t \geq 0^+ \end{cases} \quad (9)$$

其中 ζ 是阻尼系数， ω_n 是固有频率， ω_d 是阻尼作用下的频率；

根据式(9)可知，任何阶跃力的作用表达式相似，作用于不同时刻的阶跃力仅相当于初始相位的不同；

“矩形波”的作用表示如下：

$$x(\tau) = x(t) - x(t - \tau) \quad (10)$$

将 $x(\tau)$ 带入式(5)，得到任意的位移表达式：

$$x(t) = \sum_1^M X_\tau \cdot (x(t) - x(t - \tau)) \quad (11)$$

其中， $x(t)$ 是位移， X_τ 是常数，与 f_τ 存在变化系数；

将式(11)应用于最小二乘法，得到：

$$\begin{bmatrix} \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau))(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau))(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau))(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau))(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^M x_1(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_i^M x_N(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)是一个有唯一解的线性方程组，求解式(4)得到 f_k 即为待求的动态推力，将此方程程序化即可实现求解。

4. 根据权利要求3所述的一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法，其特征在于：所述步骤400中的最小二乘法是用于求解已获得的 $f(t)$ 的拟合曲线模型的待定系数；该步骤直接利用根据判断理论解与实验数据的关系式联想到最小二乘法的基本定义，故而使用最小二乘法进行求解待定系数。

一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法

技术领域

[0001] 本发明涉及微牛级动态测力技术领域,具体为一种基于最小二乘法的微小推力动态测试方法。

背景技术

[0002] 目前,多个领域已经对微小力的动态测量提出了需求,例如微小卫星精确控制领域,重力场测量,生物组织作用力测量等方面,都对微小力或冲量的精确测定都提出了很高要求。面对这一难题,国内外的研究人员对微小力的测量方法进行了大量的研究,如2002年美国南加州大学的Andre.J.Jamison和E.P.Muntz[1]团队研发的微牛级扭摆式测力系统,测力范围 $80\text{nN} \sim 1\mu\text{N}$;2004年东京大学的H.Koizumi和K.Komurasaki团队研发的毫牛级扭摆式测力系统,测力范围 $5\mu\text{N} \sim 200\text{mN}$;2007年法国的研究团队设计研究了一种悬臂式的测力系统测量精度为 $0.1\mu\text{N}$;美国弗罗里达大学应用物理实验室的S.Roy和J.Soni团队设计的扭摆式测力系统,其最小测量值已达到 10nN 。国内方面,北京航空航天大学的动量间接法得到毫牛的推力;哈尔滨工业大学的宁中喜和范金蕤研究团队研究的三线摆原理的台架可以测得毫牛量级的力等。不过,以上工作多针对稳态力测试。

[0003] 面对动态力测量方面的需求,研究人员对测力系统进行了基本的动力学研究。如日本的Keiji Hagiwara团队研发的通过PID控制主动测力设备,华盛顿的S.Ciarallii团队对位移传感器线性响应区间进行了研究,BrianC.D团队针对特定的冲量问题对扭摆式测力系统进行了系统的研究,得到一种通过数值求导的方式,获得冲量作用细节的方法。另有其他一些特定的动力学分析等。这些方法或是增加了系统的复杂性或是不具有通用性。

[0004] 上述所研究的扭摆式测力系统包括两大部分:

[0005] 1) 机械系统部分;这部分又分为摆臂系统、标定系统、阻尼系统和位移测量系统。摆臂系统是将推力转化为位移的装置,平衡推力器的重力从而克服微小推力器推重比小的难题,是实现微推力精确测定的关键。通过通电导线在磁场中产生力的原理实现精确标定,标定范围 $1 \sim 10000\mu\text{N}$,精度优于 $0.1\mu\text{N}$ 。阻尼系统的作用是让运动的摆臂尽快静止,节省时间。位移测量系统,选用了以平行板电容器为原理的位移传感器,测量范围是 $100\mu\text{m}$,分辨率 1nm ;

[0006] 2) 控制部分;包括相应的软硬件,主要是控制传感器等设备同时收集数据。该测力系统的主要参数是:测力范围 $5 \sim 3000\mu\text{N}$,精度 $1\mu\text{N}$ 。真空试验中,位移传感器的典型输出噪声幅度为 $0.01 \sim 0.05\text{V}$,典型的电压-力标定系数为 $202.15\mu\text{N/V}$ 。

[0007] 伴随航天卫星的小型化趋势,在微小卫星定轨、姿态调控、位置保持等方面对卫星推进技术的要求越来越高,科研人员为此研究设计了毫牛级和微牛级的新型推力器。为解决微小推力器的推力,特别是动态推力的测量难题,对已研制的扭摆式微牛测力系统进行动力学研究。通过对测力系统的控制方程进行数理分析,研究一种通过已知的位移数据求解产生该位移的动态力的方法。该方法具有通用性,对满足相似控制方程的二阶阻尼振动系统均适用,在不增加额外设备的前提下,为解决目前动态力的测定的问题提供了一条有

效途径。

发明内容

[0008] 为了克服现有技术方案的不足,本发明解决其技术问题所采用的技术方案是:一种基于控制方程进行数理分析,结合最小二乘法推导出一种通过已知位移数据计算得到产生该位移数据的推力的表达式,并通过编程实现动态力的求解,包括如下步骤:

[0009] S100、首先以泛函思想为求解动态力的整体思想;

[0010] S200、当得到一组扭摆式摆臂的位移数据后,然后假设力 $f(t)$ 的作用下摆臂产生了相应的位移 $x(t)$,且 $f(t)$ 使得控制方程有解析解;

[0011] S300、因为控制方程是线性方程,利用其可叠加原理以及对冲量作用有解析解,并结合连续函数离散近似的方法使得:

$$f(t) = \sum_{\tau=1}^n f_{\tau} \cdot \delta(t - \tau) \quad (1)$$

[0013] 其中 $\delta(t-\tau)$ 是 τ 时刻的单位冲量作用, f 是权重即 τ 时刻的冲量大小;

[0014] 每一个 $\delta(t-\tau)$ 带入控制方程得到一个对应的 $x(\tau)$,那么得到:

$$x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \cdot x(\tau) \quad (2)$$

[0016] 此 $x(t)$ 即为假设的力的近似理论解,当两个相邻冲量间距趋于零时,此时的 $x(t)$ 即为真实理论解;并且不同的 $f(t)$ 会得到不同的 $x(t)$;

[0017] S400、拿理论解的 $x(t)$ 与实验数据在相同的采样率下与实验得到的位移数据在计算机上进行比较,选取使得两者最接近的 $f(t)$ 作为产生实验数据的推力函数,判断条件是求理论解与实验数据之间的最小方差即:

$$R_{min} = \sum_i^M (x_{i\text{实验}} - x_{i\text{计算}})^2 \quad (3)$$

[0019] 此时拟合函数的理论解模型在理论上已经得到,只差待定系数,根据判断条件,利用最小二乘法求解待定系数,最终得到一个表达式

$$[0020] \begin{bmatrix} \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau))(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau))(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau))(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau))(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_k \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^M x_1(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \sum_i^M x_N(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

[0021] 此表达式中的 f 既是待定系数又是我们需要的力;并求解该方程组得到待求的动态推力,将测量得到的位移数据带入程序即可获得动态推力。

[0022] 优选的,所述步骤S100中所述的泛函基本思想是通过位移求得是何种力函数作用在台架系统上产生位移函数数据,先假设一个力函数 $f(t)$,该力函数 $f(t)$ 让运动方程有解析解,不同的力 $f(t)$ 应不同的位移 $x(t)$,通过判断原始数据与计算求解数据的方差来判断两者的相似度,当两者之间的重合度最好时,此时的 $f(t)$ 作为真实的推力。

[0023] 优选的,所述步骤S300中,根据控制方程的可叠加性,连续函数的离散近似,以及控制方程对冲量作用有解析解得到任意位移序列可表示成单位冲量波序列的时间位移的加权和,其表达式为:

$$[0024] x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \cdot x(\tau) \quad (5)$$

[0025] 其中, τ 代表时间离散间隔, 其倒数为力的采样率; 将离散的“矩形作用”视为准冲量作用, 每个矩形作用效果可以用两个相邻的等大阶跃作用的差得到。

[0026] 所述步骤S400中: 根据方差判断理论, 用最小二乘法求解理论模型的待定系数即所求解的力, 同时得到最小方差, 推导出求解动态力的表达式并用计算机程序化;

[0027] 最小二乘法的原始定义和多元函数的极值求解法:

$$[0028] R = \min_{\{c_j\}} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i)^2)] \quad (6)$$

[0029] 多元函数求偏导得到:

$$[0030] \frac{\partial R}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i)^2)] = 0, j = 0, 1 \dots n \quad (7)$$

[0031] 整理后得到:

$$[0032] \begin{bmatrix} \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_1) \varphi(t_i - \tau_1) & \dots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) & \dots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

[0033] 该式为 $Ax = y$ 的形式; 其中 A 为 $N \times N$ 的方阵, x 是待求向量, y 是已知列向量;

[0034] 当时间离散间隔趋向于零时, 连续函数离散的前后作用效果等价, 因为力的连续作用被离散后相邻两个离散点的作用可用以前面离散点对应的函数值为高, 以离散间隔为底的“矩形作用”每一个矩形作用效果用两个相邻阶跃力的作用效果的差得到, 而阶跃力作用下的控制方程有解析解, 并且单位阶跃力在0时刻作用下的解为:

$$[0035] x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n} \left(\frac{\cos(\omega_d t)}{\zeta} + \frac{\sin(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \right] & t \geq 0^+ \end{cases} \quad (9)$$

[0036] 其中 ζ 是阻尼系数, ω_n 是固有频率, ω_d 是阻尼作用下的频率;

[0037] 根据式(9)可知, 任何阶跃力的作用表达式相似, 作用于不同时刻的阶跃力仅相当于初始相位的不同;

[0038] “矩形波”的作用表示如下:

$$[0039] x(\tau) = x(t) - x(t - \tau) \quad (10)$$

[0040] 将 $x(\tau)$ 带入式(5), 得到任意的位移表达式:

$$[0041] x(t) = \sum_1^M X_\tau \cdot (x(t) - x(t - \tau)) \quad (11)$$

[0042] 其中, $x(t)$ 是位移, X_τ 是常数, 与 f_τ 存在变化系数;

[0043] 将式(11)应用于最小二乘法, 得到:

$$[0044] \begin{bmatrix} \sum_i^m (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \dots & \sum_i^m (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^m (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \dots & \sum_i^m (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^m x_1(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_i^m x_N(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (12)$$

[0045] 式(12)是一个有唯一解的线性方程组, 求解式(4)得到 f_k 即为待求的动态推力。

[0046] 优选的, 所述步骤400中的最小二乘法是用于求解已获得的 $f(t)$ 的拟合曲线模型的待定系数: 该步骤直接利用根据判断理论解与实验数据的关系式联想到最小二乘法的基本定义, 故而使用最小二乘法进行求解待定系数。

[0047] 与现有技术相比,本发明的有益效果是:本发明运用泛函基本原理,结合最小二乘法,通过推导、求解与待求动态力有关的线性方程组,得到动态力,该方法操作简单,无需添加其它设备,将测量得到的位移数据带入程序即可获得动态推力,该方法对本系统测力范围(10~3000μN)内的数据均适用,动态力测量误差小于2.5%。

附图说明

- [0048] 图1为本发明的方法流程示意图;
- [0049] 图2为本发明具体实施例中连续函数离散化示意图;
- [0050] 图3为本发明具体实施例中实验数据与计算结果对比图;
- [0051] 图4为本发明具体实施例中幅频特性曲线图;
- [0052] 图5为本发明具体实施例中噪声强度从上到下依次为1%,5%,10%,15%的计算结果示意图;
- [0053] 图6为本发明具体实施例中位移数据的采样率不同,力的采样率相同的条件下的计算结果示意图;
- [0054] 图7为本发明具体实施例中噪声为1%时的计算结果的残差图。

具体实施方式

[0055] 下面将结合本发明实施例中的附图,对本发明实施例中的技术方案进行清楚、完整地描述,显然,所描述的实施例仅仅是本发明一部分实施例,而不是全部的实施例。基于本发明中的实施例,本领域普通技术人员在没有做出创造性劳动前提下所获得的所有其他实施例,都属于本发明保护的范围。

[0056] 实施例:

[0057] 如图1所示,本发明提供的一种基于控制方程进行数理分析结合最小二乘法推导出一种通过已知位移数据计算得到产生该位移数据的推力的表达式,并通过matlab编程实现动态力的求解包括如下步骤:

[0058] 步骤S100、通过泛函基本思想得到求解动态力的整体思想;所述的泛函基本思想是通过位移求得是何种力函数作用在台架系统上产生位移函数数据,先假设一个力函数 $f(t)$,该力函数 $f(t)$ 让运动方程有解析解,不同的力 $f(t)$ 应不同的位移 $x(t)$,通过判断原始数据与计算求解数据的方差来判断两者的相似度,当两者之间的重合度最好时,此时的 $f(t)$ 作为真实的推力;

[0059] 步骤S200、当得到一组扭摆式摆臂的位移数据后,然后假设该位移数据是在力 $f(t)$ 的作用下摆臂的运动位移,且 $f(t)$ 满足控制方程有解析解的条件;

[0060] 步骤S300、因为控制方程是线性方程,利用其可叠加原理以及对冲量作用有解析解,并结合连续函数离散近似的方法使得:

$$f(t) = \sum_{\tau=1}^n f_\tau \cdot \delta(t - \tau) \quad (1)$$

[0062] 其中 $\delta(t-\tau)$ 是 τ 时刻的单位冲量作用, f 是权重即 τ 时刻的冲量大小;

[0063] 每一个 $\delta(t-\tau)$ 带入控制方程得到一个对应的 $x(\tau)$,那么得到:

$$x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_\tau x(\tau) \quad (2)$$

[0065] 此 $x(t)$ 即为假设的力的近似理论解, 当两个相邻冲量间距趋于零时, 此时的 $x(t)$ 即为真实理论解; 并且不同的 $f(t)$ 会得到不同的 $x(t)$;

[0066] 步骤S400、拿理论解的 $x(t)$ 与实验数据在相同的采样率下与实验得到的位移数据在计算机上进行比较, 选取使得两者最接近的 $f(t)$ 作为产生实验数据的推力函数, 判断条件是求理论解与实验数据之间的最小方差即:

$$[0067] R_{\min} = \sum_i^M (x_{i\text{实验}} - x_{i\text{计算}})^2 \quad (3)$$

[0068] 此时拟合函数的理论解模型在理论上已经得到, 只差待定系数, 根据判断条件, 利用最小二乘法求解待定系数, 该步骤直接利用根据判断理论解与实验数据的关系式联想到最小二乘法的基本定义, 故而使用最小二乘法进行求解待定系数, 最终得到一个表达式

$$[0069] \begin{bmatrix} \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^M x_1(x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \sum_i^M x_N(x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

[0070] 此表达式中的 f 既是待定系数又是我们需要的力; 并求解该方程组得到待求的动态推力, 将测量得到的位移数据带入程序即可获得动态推力。

[0071] 上述步骤S300和S400中, 根据控制方程的可叠加性, 连续函数的离散近似, 以及控制方程对冲量作用有解析解得到任意位移序列可表示成单位冲量波序列的时间位移的加权和, 其表达式为:

$$[0072] x(t) = \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \cdot x(\tau) \quad (5)$$

[0073] 其中, τ 代表时间离散间隔, 其倒数为力的采样率; 将离散的“矩形作用”视为准冲量作用, 每个矩形作用效果可以用两个相邻的等大阶跃作用的差得到。

[0074] 根据方差判断理论, 用最小二乘法求解理论模型的待定系数即所求解的力, 同时得到最小方差, 推导出求解动态力的表达式并通过程序化;

[0075] 最小二乘法的原始定义和多元函数的极值求解法:

$$[0076] R = \min_{\{c_j\}} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i))^2] \quad (6)$$

[0077] 多元函数求偏导得到:

$$[0078] \frac{\partial R}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=0}^m [\sum_{j=0}^n (c_j \varphi_j(x_i - y_i))^2] = 0, j = 0, 1 \dots n \quad (7)$$

[0079] 整理后得到:

$$[0080] \begin{bmatrix} \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_1) \varphi(t_i - \tau_1) & \cdots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_1) & \cdots & \sum_i^m \varphi(t_i - \tau_N) \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_1) \\ \vdots \\ \sum_i^m y_i \varphi(t_i - \tau_N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

[0081] 该式为 $Ax = y$ 的形式; 其中 A 为 $N \times N$ 的方阵, x 是待求向量, y 是已知列向量;

[0082] 当时间离散间隔趋向于零时, 连续函数离散的前后作用效果等价, 因为力的连续作用被离散后相邻两个离散点的作用可用以前面离散点对应的函数值为高, 以离散间隔为底的“矩形作用”每一个矩形作用效果用两个相邻阶跃力的作用效果的差得到, 而阶跃力作用下的控制方程有解析解, 并且单位阶跃力在0时刻作用下的解为:

$$[0083] \quad x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n} \left(\frac{\cos(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right] & t \geq 0^+ \end{cases} \quad (9)$$

[0084] 其中 ζ 是阻尼系数, ω_n 是固有频率, ω_d 是阻尼作用下的频率;

[0085] 根据式(9)可知,任何阶跃力的作用表达式相似,作用于不同时刻的阶跃力仅相当于初始相位的不同;

[0086] “矩形波”的作用表示如下:

$$[0087] \quad x(\tau) = x(t) - x(t-\tau) \quad (10)$$

[0088] 将 $x(\tau)$ 带入式(5),得到任意的位移表达式:

$$[0089] \quad x(t) = \sum_1^M X_\tau \cdot (x(t) - x(t-\tau)) \quad (11)$$

[0090] 其中, $x(t)$ 是位移, X_τ 是常数,与 f_τ 存在变化系数;

[0091] 将式(11)应用于最小二乘法,得到:

$$[0092] \quad \begin{bmatrix} \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) & \cdots & \sum_i^M (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^M x_1 (x_1(t_i) - x_1(t_i - \tau)) \\ \vdots \\ \sum_i^M x_N (x_N(t_i) - x_N(t_i - \tau)) \end{bmatrix} \quad (12)$$

[0093] 式(12)是一个有唯一解的线性方程组,求解式(4)得到 f_k 即为待求的动态推力。

[0094] 需要说明的是,本发明是基于扭摆式微牛测力系统进行动力学分析,扭摆式微牛测力系统是一种二阶阻尼振动系统,其控制方程为:

$$[0095] \quad I \frac{dx^2}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = f(t)L \quad (13)$$

[0096] 其中I是摆臂转动惯量,C是阻尼系数,K是弹簧弹性系数,x为位移(摆角),f为待求的动力学,L为力臂长度;

[0097] 这一方程是所有动态测力方法的基础,我们的思路是将已得到的位移数据带入到控制方程,从位移数据出发反向计算获得产生该位移的动力。因此,需要首先标定控制方程的所有参数。

[0098] 本发明为验证该动态测力方法,开展了验证试验:借助于扭摆式微牛测力系统的电磁标定系统,利用信号发生器提供已知波形(正弦、方波和三角波)、频率(0.1~10Hz)和幅值的电流,产生已知波形、频率和大小的作用力。通过对加载的已知动态力与上述方法的计算结果,验证该方法的适用频率范围和测力精度;

[0099] 图3为0.1Hz下的三种波形力的实验与计算结果对比,由图3可见,计算得到的动力与施加的力几乎重合,说明了上述动态测力方法的准确性。

[0100] 表1为正弦波形、不同电压下,加载力的振幅与计算得到力的振幅对比,两者最大偏差为1.5%。对应于该测力方法的测量精度。

[0101] 表1实验加载的推力,正弦波形

[0102]	激励电压V	加载推力振幅μ	计算推力振幅
	2	120	121.6
	3	180	179.9
	4	240	238.6
	5	300	295.4

[0103] 式(13)对应的二阶阻尼振动系统,均有固有的幅频响应特性,该扭摆式微牛测力系统的幅频特性曲线如图4所示;图中横坐标为相对频率(频率/固有频率),纵坐标振幅放大率;可见,在外力频率远小于台架固有频率时,振幅放大率为1,对应于 $x = f \cdot \frac{L}{K}$;当外力频率等于固有频率时,扭摆式微牛测力系统的台架共振,放大率约为5.0;当外力频率继续增加,位移放大率急剧减小。

[0104] 从图4可见,相对频率大于5(对应约7Hz)时,振幅放大率小于0.05;此时,有效台架运动幅度与噪声幅度相当,会导致动态力求解误差显著增加。

[0105] 在动态力的求解中,位移数据的采样率和数据中的噪声是测力结果产生影响,对其进行模拟实验,基本过程是:利用假设的动态力加载(如正弦波形式),计算得到台架的位移响应曲线;针对此曲线加载不同程度的白噪声,或者对其离散成不同的采样率;把这种处理后的数据作为“实验数据”带入程序求解,获得动态推力与最初的假设力对比,评估采样频率和噪声水平对于该动态测力方法的影响。

[0106] 图5和图6分别是不同噪声水平和不同采样率对于同一个正弦加载力的测量影响;其中,模拟试验中的位移数据对应200uN振幅,正弦频率0.1Hz,采样率为100~1000点/秒,噪声水平1%~15%(噪声振幅与原正弦振幅之比);由图5可见,同一频率下,噪声越大,计算结果的信噪比越差;但对测力结果进行平滑后,得到的振幅均是196.4μN,误差仅有1.8%;说明一定的噪声水平,不会对低频动态力产生过大影响,但必然对较高频率影响较大。

[0107] 图6是位移数据采样率分别为100,200,500,1000时,在相同的力的采样率下的计算结果。可见,相同噪声水平时,在力的采样率不变的前提下,位移数据采样率越高得到的推力的噪声越小。

[0108] 根据公式(12)可知,多点求和时会产生平均效果,因为当位移采样率越高,在单位时间内噪声的平均值越趋近于零,待计算的位移数据越接近“真实位移数据”,所以测力结果会变好。因此,适当提高位移数据采样率,可以提高动态测力精度。

[0109] 图7是1%噪声强度下的测力残差图,对计算结果的噪声进行残差分析,发现力的噪声较为均匀的分布较在横轴的两侧,残差平均值趋于0;说明计算得到的力可分解为正弦振动部分与白噪声部分之和,这与系统的控制方程是线性方程有密切关系,为我们日后计算滤除高频噪声,保留真实部分以及通过多点平滑去除噪声提供了实验依据。

[0110] 综上所述,通过对扭摆式uN测力系统进行数理分析,在不增加额外设备的前提下,基于最小二乘法,通过测量位移数据反向计算产生该位移的推力;这一动态测力误差在2%以内,针对文中的测力系统,可实现最高响应频率7Hz。通过实验验证试验证明该方法的精度,通过模拟实验分析得到噪声和采样率对于测力精度的影响。结果表明,针对低频动态力,噪声强度在15%以内时,仍能较准确测力。此外,可通过提高位移数据采样率的方法提高计算分辨率和测力精度。

[0111] 对于本领域技术人员而言,显然本发明不限于上述示范性实施例的细节,而且在不背离本发明的精神或基本特征的情况下,能够以其他的具体形式实现本发明。因此,无论从哪一点来看,均应将实施例看作是示范性的,而且是非限制性的,本发明的范围由所附权利要求而不是上述说明限定,因此旨在将落在权利要求的等同要件的含义和范围内的所有

变化囊括在本发明内。不应将权利要求中的任何附图标记视为限制所涉及的权利要求。

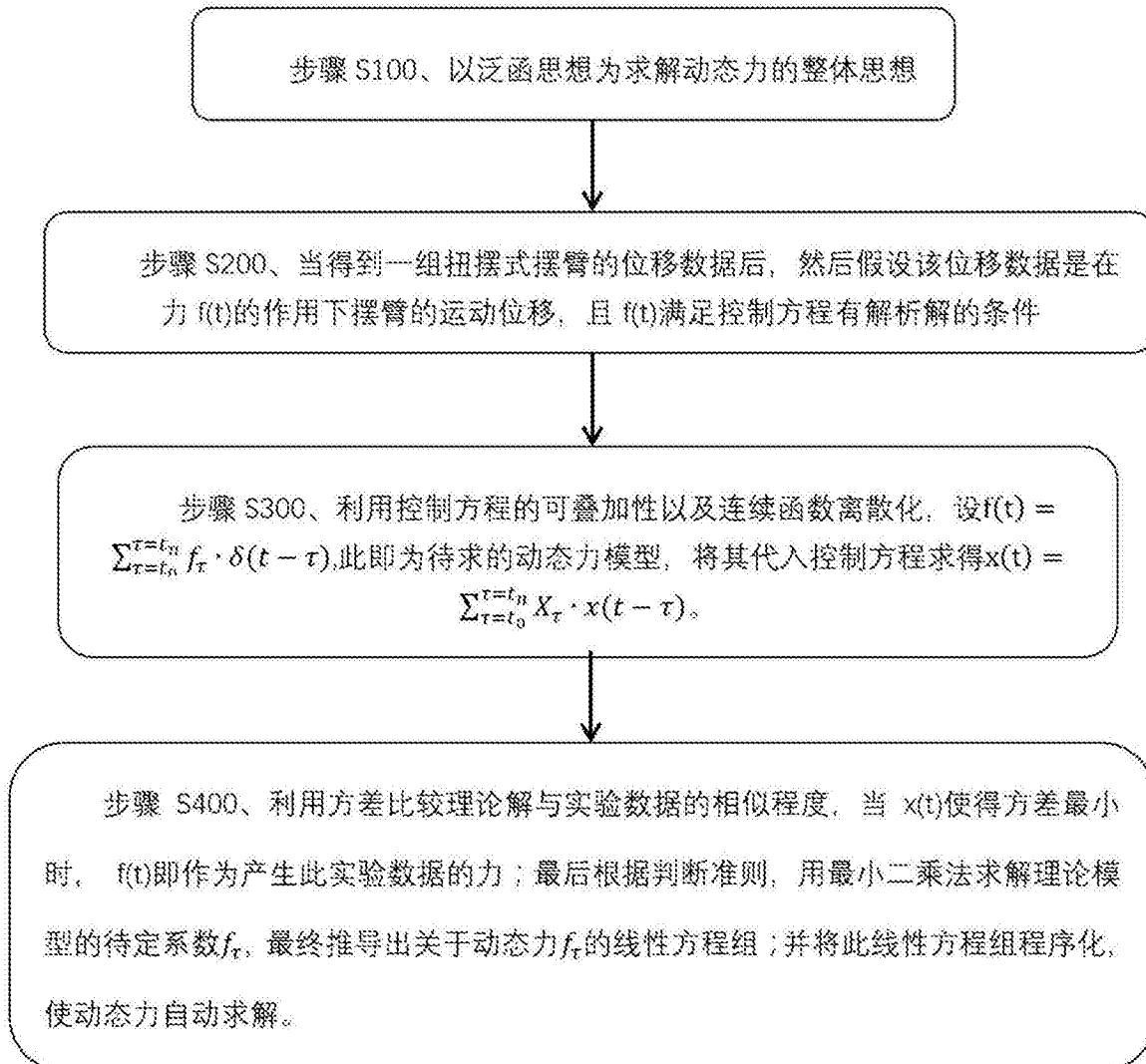


图1

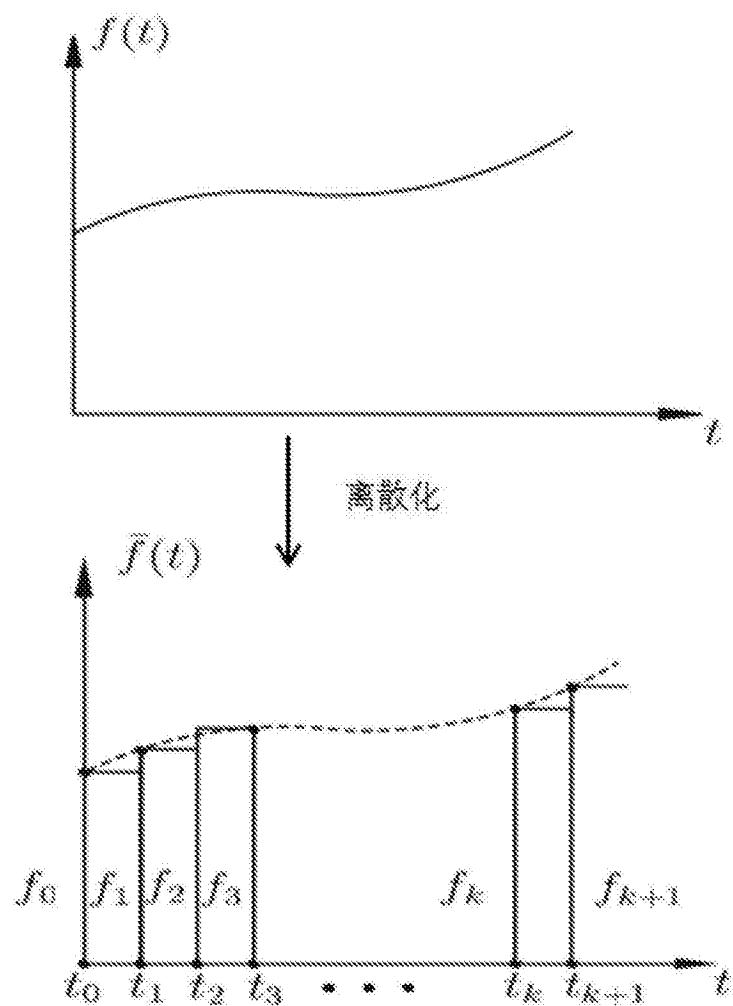


图2

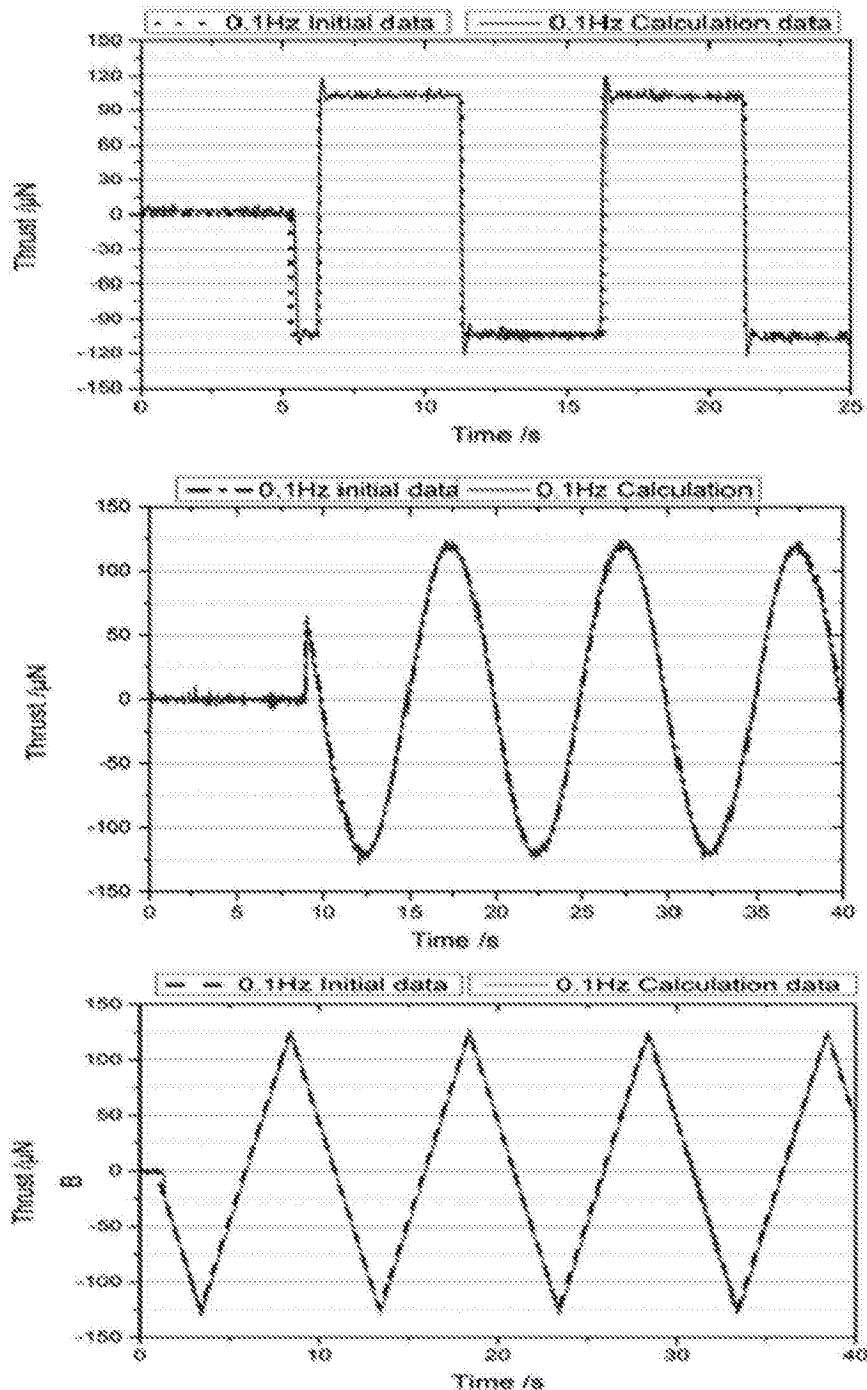


图3

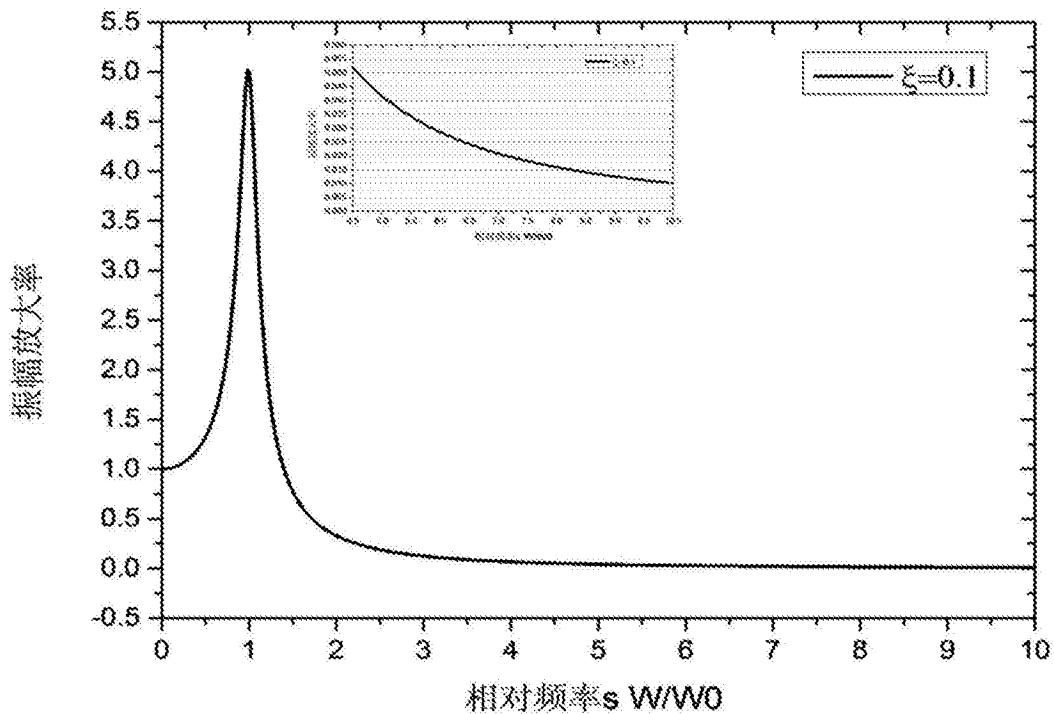


图4

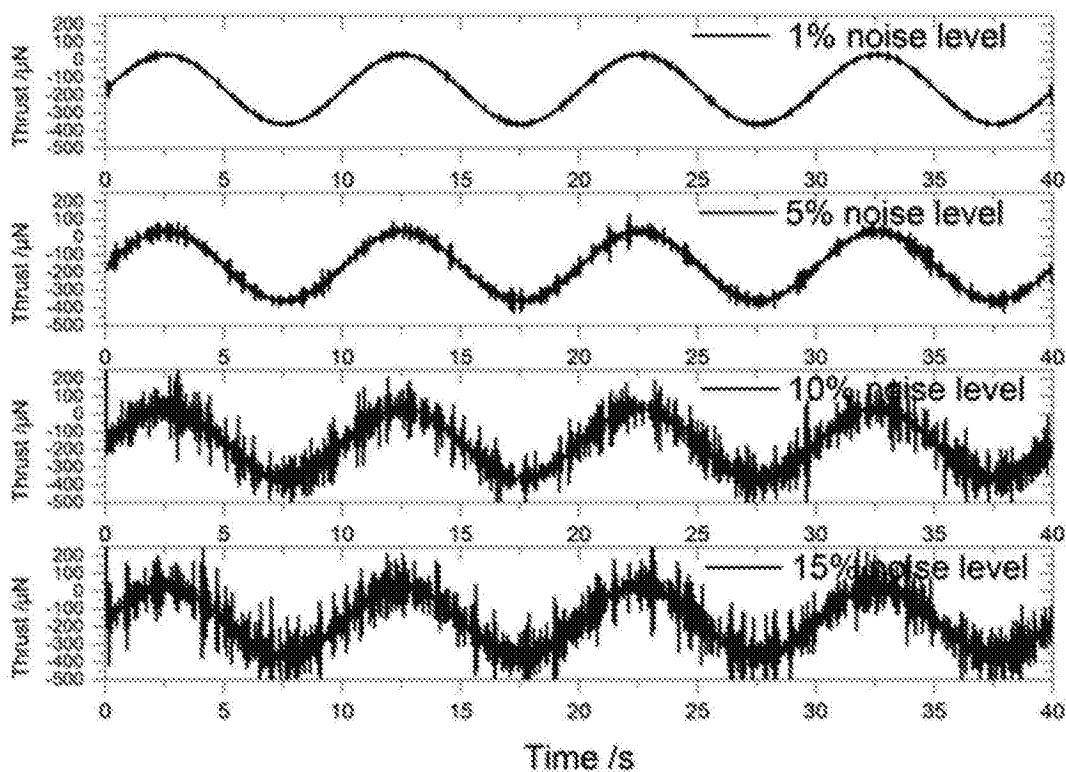


图5

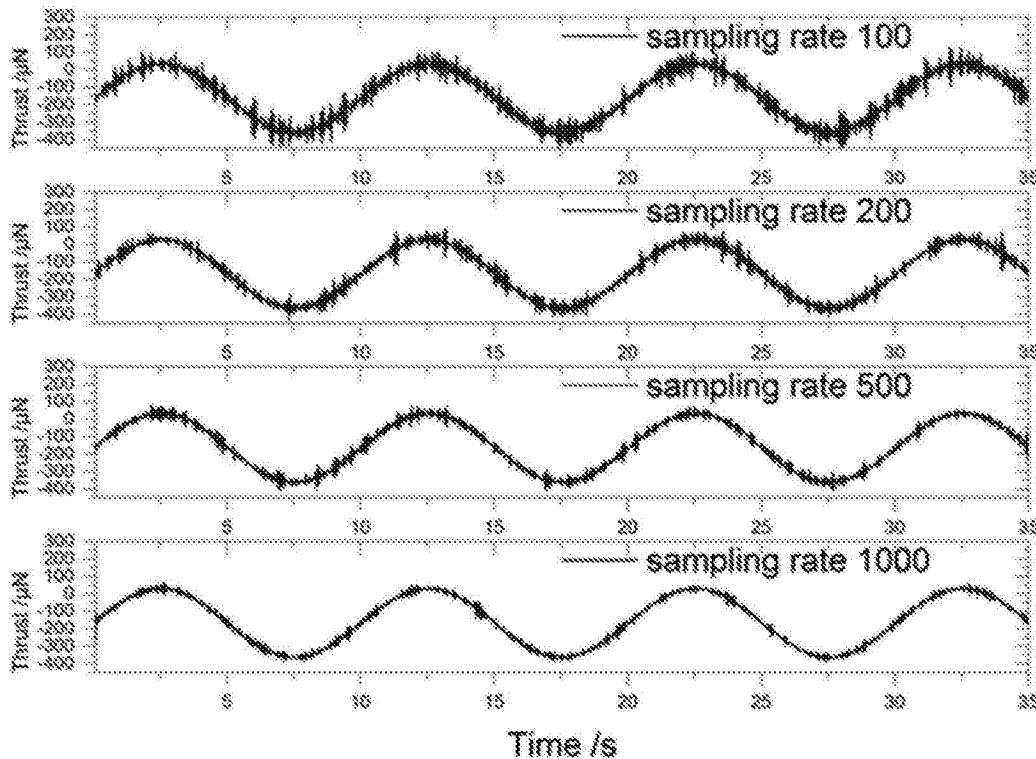


图6

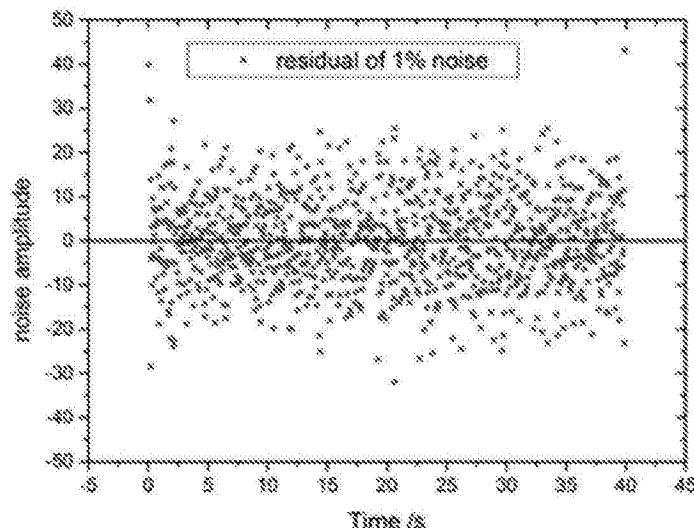


图7